

Содержание

Введение	7
<i>i. Решение дифференциального уравнения</i>	7
<i>ii. Общее решение</i>	7
<i>iii. Особенности обозначений и нумерации</i>	8
1 Поля направлений на плоскости	9
1.1 Уравнение в дифференциалах	9
<i>i. Поле направлений</i>	9
<i>ii. Интегральная кривая</i>	10
<i>iii. Логарифмическое уравнение</i>	11
1.2 Дифференциальное уравнение	12
<i>i. Два взгляда на уравнение</i>	12
<i>ii. Эквивалентность двух взглядов</i>	13
<i>iii. Уравнение первообразной</i>	14
1.3 Общее решение	15
<i>i. Интеграл уравнения в дифференциалах</i>	15
<i>ii. Формула общего решения</i>	16
<i>iii. Уравнение в полных дифференциалах</i>	18
<i>iv*. Случай ветвления потенциала</i>	19
1.4 Автономное уравнение	20
<i>i. Общее решение при отсутствии особых точек</i>	21
<i>ii. Единственность при наличии особой точки</i>	21
<i>iii. Дифференциальный признак единственности</i>	23
<i>iv. Характерные примеры</i>	24
1.5 Уравнение с разделяющимися переменными	25
<i>i. Разделение переменных</i>	25
<i>ii. Однородное уравнение</i>	26
<i>iii*. Геометрический смысл замены переменных</i>	28
1.6 Задачи для самостоятельного решения	28
2 Существование и единственность решений	30
2.1 Локальная теорема существования и единственности	30
<i>i. Постановка задачи Коши</i>	30
<i>ii. Формулировка локальной теоремы</i>	31
<i>iii. Сведение задачи к интегральному уравнению</i>	32
2.2 Нормы в конечномерных пространствах	32
<i>i. Инвариантность понятия производной</i>	33

ii*.	Эквивалентность норм	34
iii*.	Определение топологии	34
iv*.	Операторная норма	35
v*.	Оценка конечных приращений	36
2.3	Равномерная метрика	37
i.	Пространство непрерывных функций	37
ii*.	Теорема о сжимающем отображении	37
iii*.	Приближения Пикара	38
2.4	Доказательство локальной теоремы	39
i.	Доказательство теоремы	39
ii.	Усиление и ослабление гладкости	42
iii*.	Гарантированный интервал существования	43
2.5	Единственность решения	43
i.	Локальная единственность	43
ii.	Глобальная единственность	44
iii.	О возможной неединственности решений	45
2.6	Теорема существования	45
i.	Существование при условии непрерывности	45
ii*.	Ломаная Эйлера	46
iii*.	Лемма Арцела — Асколи	47
iv*.	Доказательство теоремы Пеано	48
2.7	Продолжаемость решений	50
i.	Существование непродолжаемого решения	50
ii.	Единственность непродолжаемого решения	52
iii.	Продолжаемость до границы области	52
iv*.	Существенность условия непрерывности	55
v.	Примеры продолжаемости и непродолжаемости	56
2.8	Непродолжаемые решения линейной системы	57
i.	Лемма Гронволла — Беллмана	57
ii.	Лемма о дифференциальном неравенстве	59
iii.	Теорема продолжаемости для линейной системы	59
2.9	Каноническая замена переменных	61
i.	Система, отвечающая уравнению	61
ii.	Простейшие свойства канонической замены	61
iii.	Связь между уравнением и системой	62
2.10	Теоремы существования, единственности и продол- жаемости для уравнения	64
i.	Основные теоремы для уравнения	64
ii.	Продолжаемость решений линейного уравнения	65

iii. Колебания математического маятника	66
2.11 Уравнение, не разрешенное относительно производной	68
i. Расширение задачи Коши	68
ii*. Теорема существования и единственности	69
iii. Особые решения	71
iv. Сглаженное уравнение вытекания жидкости	72
v. Сравнение свойств уравнений	73
2.12 Метод введения параметра	74
i. Уравнение, разрешенное относительно функции	74
ii. Пример введения параметра	75
iii*. Уравнение Клеро	75
iv*. Геометрическая интерпретация	77
2.13 Задачи для самостоятельного решения	78
3 Общая теория линейных уравнений и систем	81
3.1 Общее решение однородной системы	81
i. Линейное пространство вектор-функций	81
ii. Теорема об изоморфизме	81
iii. Фундаментальные системы решений	82
3.2 Оператор Коши и фундаментальная матрица	83
i. Оператор Коши	83
ii. Фундаментальная матрица	84
iii. Матрица Коши	85
iv. Матричное дифференциальное уравнение	86
3.3 Определитель Вронского и формула Лиувилля — Остроградского	87
i. Определитель Вронского и линейная зависимость	87
ii. Формула Лиувилля — Остроградского	89
iii*. Определитель и след оператора	90
3.4 Общее решение неоднородной системы	91
i. Вид общего решения	91
ii. Аффинное пространство	91
iii. Метод вариации постоянных	92
3.5 Линейные периодические системы	93
i. Матрица монодромии и мультипликаторы	94
ii*. Задача о периодическом решении	95
iii*. Критерий невырожденности задачи	95
iv. Одномерное периодическое уравнение	96

3.6	Общее решение линейного уравнения	97
	<i>i. Линейность канонической замены</i>	97
	<i>ii. Сведение линейного уравнения к системе</i>	98
	<i>iii. Общее решение</i>	99
3.7	Определитель Вронского скалярных функций . . .	100
	<i>i. Свойства определителя Вронского</i>	101
	<i>ii*. Восстановление линейного уравнения</i>	102
	<i>iii*. Признаки линейной зависимости</i>	103
3.8	Метод вариации постоянных	104
	<i>i. Обоснование метода</i>	104
	<i>ii*. Функция Грина задачи Коши</i>	105
	<i>iii*. Физический смысл функции Грина</i>	106
3.9	Краевая задача	107
	<i>i. Теорема об альтернативе</i>	107
	<i>ii*. Функция Грина краевой задачи</i>	109
	<i>iii*. Существование и единственность функции Грина</i>	110
	<i>iv*. Уравнение равновесия струны</i>	111
3.10	Нули решений уравнения второго порядка	112
	<i>i. Конечность числа нулей на отрезке</i>	113
	<i>ii. Перемежаемость нулей</i>	113
	<i>iii. Теорема сравнения</i>	115
	<i>iv. Устранение первой производной в уравнении</i>	116
3.11	Оценки колеблемости	116
	<i>i. Оценки расстояний между нулями</i>	116
	<i>ii*. Теорема Кнезера</i>	118
	<i>iii. Колеблемость маятника</i>	119
	<i>iv*. Характеристические частоты</i>	120
3.12	Задачи для самостоятельного решения	120
4	Линейные уравнения и системы с постоянными	
	коэффициентами	123
4.1	Экспонента оператора	123
	<i>i. Определение и свойства экспоненты</i>	123
	<i>ii. Сходимость ряда для экспоненты</i>	123
	<i>iii. Экспонента и оператор Коши</i>	124
4.2	Комплексификация оператора и системы	125
	<i>i*. Комплексификация оператора</i>	125
	<i>ii*. Комплексификация системы</i>	127
	<i>iii. Действительные и комплексные решения</i>	127

4.3	Метод жордановых форм	128
	<i>i. Жорданова матрица</i>	128
	<i>ii. Вычисление экспоненты матрицы</i>	129
	<i>iii. Экспонента матрицы второго порядка</i>	131
	<i>iv. Фундаментальная система решений</i>	133
4.4	Метод неопределенных коэффициентов	134
	<i>i. Квазимногочлены</i>	134
	<i>ii. Вид общего решения</i>	135
4.5	Теория Флоке — Ляпунова	137
	<i>i. Определение и свойства логарифма</i>	137
	<i>ii. Вычисление логарифма матрицы</i>	138
	<i>iii*. Комплексный и действительный логарифм</i>	138
	<i>iv*. Ляпуновские преобразования</i>	140
	<i>v*. Теорема Флоке — Ляпунова</i>	141
4.6	Характеристический многочлен	142
	<i>i. Совпадение характеристических многочленов</i>	142
	<i>ii*. Оператор дифференцирования</i>	143
	<i>iii*. Уравнение Эйлера</i>	143
4.7	Решение однородного уравнения	144
	<i>i. Общее решение</i>	144
	<i>ii. Стандартная фундаментальная система</i>	146
	<i>iii. Решение уравнения малых колебаний</i>	146
	<i>iv*. Частоты решений уравнения второго порядка</i>	147
4.8	Уравнение с квазимногочленом в правой части . . .	148
	<i>i. Разложение неоднородности</i>	148
	<i>ii. Резонанс и его кратность</i>	148
	<i>iii. Комплексное частное решение</i>	149
	<i>iv*. Действительное частное решение</i>	150
4.9	Явление резонанса	151
	<i>i. Неограниченные колебания маятника</i>	151
	<i>ii*. Колебательный контур</i>	152
	<i>iii*. Параметрический резонанс</i>	153
4.10	Задачи для самостоятельного решения	153
5	Зависимость решений от параметров	157
5.1	Непрерывная зависимость от правых частей	157
	<i>i. Формулировка основной теоремы</i>	157
	<i>ii*. Расстояние между множествами</i>	158
	<i>iii*. Полная поверхность трубки</i>	158

	<i>iv. Доказательство основной теоремы</i>	159
5.2	Компактно-открытая топология	161
	<i>i. Естественные топологии</i>	161
	<i>ii. Топологическое усиление теоремы</i>	162
	<i>iii*. Варианты непрерывности по двум переменным</i>	163
5.3	Непрерывность по параметру	165
	<i>i. Зависимость от параметра</i>	165
	<i>ii. Решение семейства задач Коши</i>	166
	<i>iii. Зависимость от начального значения</i>	167
	<i>iv*. Контрпример к непрерывности на интервале</i>	168
5.4	Дифференцируемость по параметру	169
	<i>i. Формулировка теоремы</i>	169
	<i>ii*. Лемма Адамара</i>	170
	<i>iii*. Доказательство теоремы</i>	171
	<i>iv. Дифференцируемость по начальному значению</i>	173
5.5	Система в вариациях	174
	<i>i. Вариации по параметру</i>	174
	<i>ii. Вариации по начальному значению</i>	175
	<i>iii*. Выпрямление интегральных кривых</i>	176
	<i>iv. Система в вариациях в линейном случае</i>	176
5.6	Разложение решений по параметру	177
	<i>i. Нулевое приближение</i>	177
	<i>ii. Первое приближение</i>	178
	<i>iii*. Равномерность по параметру</i>	179
	<i>iv*. Теорема Лиувилля о фазовом объеме</i>	179
	<i>v*. Гамильтонов инвариант</i>	181
5.7	Зависимость решений уравнений от параметра . . .	181
	<i>i. Каноническое преобразование топологии</i>	181
	<i>ii. Колебания, близкие к резонансным</i>	183
	<i>iii. Дифференцируемость по параметру</i>	184
	<i>iv*. Уравнение в вариациях</i>	185
	<i>v*. Разложение в ряд</i>	185
	<i>vi*. Переход к уравнению малых колебаний</i>	186
5.8	Задачи для самостоятельного решения	188
6	Устойчивость по Ляпунову	190
6.1	Определение устойчивости	190
	<i>i. Устойчивость решения системы</i>	190
	<i>ii. Устойчивость решения уравнения</i>	191

iii. Существенные упрощения	192
iv*. Вариации понятия устойчивости	194
6.2 Устойчивость решений линейной системы	195
i. Устойчивость линейной системы	195
ii. Система с постоянными коэффициентами	197
iii. Малые колебания маятника	197
iv*. Необходимое условие устойчивости	198
v. Периодическая система	199
6.3 Функция Ляпунова	199
i. Понятие функции Ляпунова	200
ii. Смысл производной в силу системы	200
iii*. О равномерных оценках производной	201
6.4 Леммы Ляпунова и теорема Четаева	202
i. Лемма об устойчивости	202
ii. Признак неасимптотической устойчивости	204
iii. Устойчивость маятника без трения	204
iv. Лемма об асимптотической устойчивости	205
v*. Лемма о неустойчивости	207
vi*. Теорема Четаева	207
6.5 Система первого приближения	209
i. Линеаризация системы	209
ii. Формулировка теоремы Ляпунова	210
iii. Положения равновесия маятника	210
6.6 Доказательство теоремы Ляпунова	211
i. Признак устойчивости	211
ii*. Признак неустойчивости	214
6.7 Показатели Ляпунова	215
i*. Свойства показателей	215
ii*. Показатели линейной системы	216
iii*. Связь показателей Ляпунова с устойчивостью	219
iv*. Условная устойчивость	220
6.8 Задачи для самостоятельного решения	220
7 Автономные системы	223
7.1 Фазовое пространство	223
i*. Превращение системы в автономную	223
ii. Интегральные и фазовые кривые	223
iii. Фазовая скорость и ее направление	224
iv. Сдвиги фазовых траекторий	224
	301

	<i>v. Непересекаемость фазовых кривых</i>	225
7.2	Три типа фазовых кривых	226
	<i>i. Точные определения основных типов</i>	226
	<i>ii. Отсутствие других типов</i>	226
	<i>iii. Точки покоя</i>	227
	<i>iv*. Период цикла</i>	228
7.3	Выпрямление фазовых траекторий	228
	<i>i. Диффеоморфизмы фазового пространства</i>	228
	<i>ii. Выпрямляющий диффеоморфизм</i>	229
	<i>iii. Локальное выпрямление векторного поля</i>	230
7.4	Первый интеграл автономной системы	232
	<i>i. Дифференциальный критерий</i>	232
	<i>ii. Автономная гамильтонова система</i>	233
	<i>iii*. Инвариантные множества</i>	233
	<i>iv. Первые интегралы в разных областях</i>	234
7.5	Независимые первые интегралы	234
	<i>i. Независимость в точке и зависимость в области</i>	235
	<i>ii. Универсальная система первых интегралов</i>	235
	<i>iii. Произвольная локально полная система</i>	236
	<i>iv. Первые интегралы малых колебаний маятника</i>	237
	<i>v*. Локальное задание фазовых кривых</i>	238
7.6	Маломерные фазовые пространства	239
	<i>i. Критерий устойчивости на прямой</i>	239
	<i>ii. Бифуркация особой точки на прямой</i>	240
	<i>iii. Уравнение фазовых кривых на плоскости</i>	241
	<i>iv. Экологическая модель Лотки — Вольтерры</i>	242
7.7	Интеграл энергии для уравнения Ньютона	244
	<i>i. Закон сохранения энергии</i>	244
	<i>ii. Энергия колебаний маятника</i>	245
	<i>iii*. Исследование фазового портрета маятника</i>	245
7.8	Особые точки на плоскости	247
	<i>i. Диагональный действительный случай</i>	247
	<i>ii. Недиагональный случай</i>	248
	<i>iii. Недействительный случай</i>	249
	<i>iv. Положения равновесия маятника</i>	250
	<i>v. Малые колебания в системе «хищник — жертва»</i>	251
7.9	Фазовый поток	251
	<i>i. Отображение Коши</i>	252
	<i>ii. Динамическая система и фазовый поток</i>	252

<i>iii*</i> . Генератор фазового потока	253
<i>iv*</i> . Генератор экспоненты	254
7.10 Поворот окружности и обмотка тора	255
<i>i</i> . Колебания маятника и поворот окружности	255
<i>ii</i> . Фазовое и временное средние	256
<i>iii*</i> . Иррациональный поворот окружности	256
<i>iv</i> . Пара маятников	258
<i>v</i> . Свойства обмотки тора	260
7.11 Свойства циклов	261
<i>i</i> . Мультипликаторы системы в вариациях	261
<i>ii</i> . Отсутствие асимптотической устойчивости	262
<i>iii*</i> . Отображение Пуанкаре	262
<i>iv*</i> . Орбитальные мультипликаторы	264
7.12 Предельные множества	266
<i>i</i> . Предельные точки и множества	266
<i>ii*</i> . Свойства предельных множеств	266
7.13 Предельный цикл на плоскости	268
<i>i</i> . Разновидности плоских циклов	268
<i>ii</i> . Функция последования для плоского цикла	268
<i>iii</i> . Предельный цикл и мешок Бендиксона	269
<i>iv</i> . Исследование предельного цикла	271
<i>v*</i> . Мультипликатор плоского цикла	271
7.14 Задачи для самостоятельного решения	272
8 Уравнения в частных производных первого порядка	276
8.1 Линейное однородное уравнение	276
<i>i</i> . Характеристики линейного уравнения	276
<i>ii</i> . Общее решение	277
<i>iii</i> . Уравнение интегралов гамильтоновой системы	277
<i>iv*</i> . Общий вид интегрирующего множителя	277
8.2 Задача Коши	279
<i>i</i> . Пояснения к начальному условию	279
<i>ii</i> . Существование и единственность решения	280
<i>iii</i> . О единственности решений	283
<i>iv</i> . Существование условия трансверсальности	283
8.3 Квазилинейное уравнение	285
<i>i</i> . Характеристики квазилинейного уравнения	285
<i>ii*</i> . Поверхности уровня первых интегралов	285
	303

<i>iii</i> *. Существование интегрирующего множителя	286
<i>iv</i> *. Инвариантные поверхности	287
8.4 Решение задачи Коши	288
<i>i</i> *. Существование и единственность решения	288
<i>ii</i> . Одномерное поле скоростей свободных частиц	290
8.5 Задачи для самостоятельного решения	291
Дополнительная литература	293

Учебное издание
Серия «Классический университетский учебник»

Сергеев Игорь Николаевич. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. Курс лекций
2-е издание

Художественное оформление Ю. Н. Симоненко. Корректор Е. Г. Якимова. Верстка И. Н. Сергеев

Подписано в печать 26.05.2025. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 14,0. Усл. печ. л. 19,0.
Тираж 300 экз. Изд. № 12957. Заказ №



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com
<https://msupress.com>. Отдел реализации:
тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com

Отпечатано в типографии ООО «Паблит». 127214, г. Москва, Полярная ул., д. 31В, стр. 1, Э/ПОМ/К 3/1/1.
Тел.: (495) 859-48-62