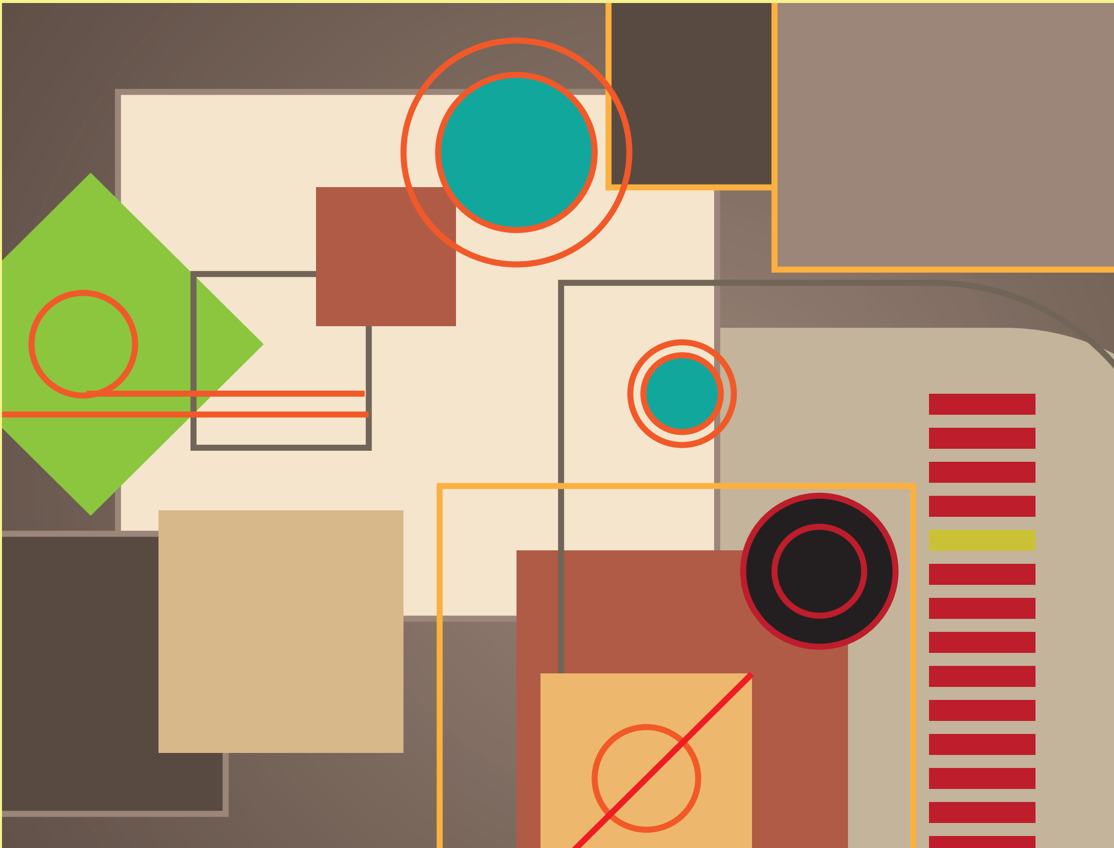
Н. В. Зайцева, Э. Л. Шишкина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Н. В. Зайцева, Э. Л. Шишкина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Учебник для вузов

Издательство Московского университета
2024

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
З17

Рецензенты:

Садовничая И. В. — доктор физико-математических наук, профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Фомичёв В. В. — доктор физико-математических наук, профессор факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова

Зайцева Н. В., Шишкина Э. Л.

З17 Математический анализ. Часть 1 : учебник для вузов / Н. В. Зайцева, Э. Л. Шишкина. — Москва : Издательство Московского университета, 2024. — 328 с. : ил.

ISBN 978-5-19-012045-5

Учебник представляет собой первую часть курса математического анализа, включающую в себя теорию множеств, теорию числовых последовательностей, теории пределов, непрерывности, дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной. Учебник соответствует программе курса математического анализа для студентов математических, механико-математических и естественно-научных факультетов университетов, а также технических и педагогических вузов.

Рекомендуется для преподавателей и студентов университетов, а также для лиц, изучающих математический анализ самостоятельно.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

Учебное издание

Зайцева Наталья Владимировна, **Шишкина** Элина Леонидовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Учебник для вузов

Художественное оформление *К. В. Саутенков*. Верстка *Н. В. Зайцева*, *Э. Л. Шишкина*

Подписано в печать 30.05.2024. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 9,2. Усл. печ. л. 20,5.
Тираж 50 экз. Изд. № 12818. Заказ №

Издательство Московского университета. 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15.
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com. Отдел реализации. Тел.: (495) 939-33-23;
e-mail: zakaz@msupress.com. Сайт Издательства МГУ: http://msupress.com

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «Паблит».
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1. Тел.: (495) 859-48-62

ISBN 978-5-19-012045-5

Предисловие

Учебник представляет собой первую часть курса математического анализа, включающую в себя теорию множеств, теорию числовых последовательностей, теорию пределов и непрерывности функций одной переменной, теорию дифференциального исчисления и её приложения, а также теорию интегрального исчисления функций одной переменной.

Особенностью книги являются подробные доказательства всех утверждений и теорем, а также наличие большого числа разобранных практических задач, примеров и иллюстраций.

В учебнике обобщён, методически переработан и изложен опыт преподавания математического анализа авторами за последние два десятилетия.

Авторы выражают глубокую благодарность и особую признательность профессору И.В. Садовничей и профессору В.В. Фомичёву за существенное улучшение текста и помощь в написании учебника, а также члену-корреспонденту Российской академии наук, профессору А.В. Ильину за ценные советы и поддержку.

Содержание

Таблица греческих букв

$A\ \alpha$	Альфа	$H\ \eta$	Эта	$N\ \nu$	Ню	$T\ \tau$	Тау
$B\ \beta$	Бета	$\Theta\ \theta$	Тета	$\Xi\ \xi$	Кси	$\Upsilon\ \upsilon$	Ипсилон
$\Gamma\ \gamma$	Гамма	$I\ \iota$	Йота	$O\ o$	Омикрон	$\Phi\ \varphi$	Фи
$\Delta\ \delta$	Дельта	$K\ \kappa$	Каппа	$\Pi\ \pi$	Пи	$X\ \chi$	Хи
$E\ \varepsilon$	Эпсилон	$\Lambda\ \lambda$	Лямбда	$P\ \rho$	Ро	$\Psi\ \psi$	Пси
$Z\ \zeta$	Дзета	$M\ \mu$	Мю	$\Sigma\ \sigma$	Сигма	$\Omega\ \omega$	Омега

1 Раздел 1. Введение в математический анализ

Математический анализ – это раздел математики, который изучает функции вещественной переменной, пределы, производные, интегралы и ряды.

Формально считается, что математический анализ возник в XVII веке, однако многие из его идей появились в гораздо более ранние времена. Например, идея о бесконечной сумме геометрической прогрессии присутствует в апориях древнегреческого философа Зенона (V век до н.э.) и в афоризмах древнекитайского философа Гунсунь Луна (IV-III века до н.э.) [22]. Позже греческие математики, такие как Евдокс и Архимед (III век до нашей эры), стали более явно, но неформально применять концепции пределов и сходимости, например, при использовании метода исчерпывания для вычисления площадей плоских фигур и объёмов тел [20]. Индийцы владели формулами нахождения сумм арифметических и геометрических прогрессий ещё в IV веке до нашей эры. Ачарья Бхадрабаху использовал сумму геометрической прогрессии в тексте Кальпасутры в V веке до нашей эры [16].

В средневековье китайские и индийские учёные вводили понятия и получали утверждения, которые затем, начиная с XVII века, переоткрывались и обобщались европейцами. Так, китайский астроном, математик, политик и изобретатель Цзу Чунчжи в V веке н.э. разработал метод определения объёма сферы, который позже был назван принципом Кавальери [21]. В XII веке индийский математик Бхаскара привёл примеры производных и использовал утверждение, которое сейчас известно как теорема Ролля [17]. В XIV веке индийский астроном и математик, основатель Керальской школы астрономии и математики Мадхава из Сангамаграмы разработал разложение в степенные ряды таких функций как синус, косинус, тангенс и арктангенс, которые сейчас называются рядами Тейлора [19].

Современные основы математического анализа были заложены в Европе в XVII веке [18]. Решая геометрические задачи, Пьер Ферма определил максимумы и минимумы функций, а также касательные кривых. Работая с алгебраическими кривыми, Рене Декарт ввёл систему координат, которая теперь называется "декартовой". Через несколько десятилетий Исаак Ньютон и Готфрид Вильгельм Лейбниц независимо друг от друга разработали исчисление, основанное на понятии бесконечно малой величины. Это породило несколько различных направлений математики: теория пределов и непрерывности функций, дифференциальное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными, вариационное исчисление.

Само название "Математический анализ" является видоизменённым сокращением названия первого европейского печатного учебника по дифференциальному исчислению "Анализ посредством бесконечно малых величин" (Analyse des infiniment petxts, 1696 г.) Гийома Франсуа Антуана Лопиталя.

Математический анализ является основой как для других математических курсов, таких как: функциональный анализ; теория функций комплексной переменной; специальные функции; обыкновенные дифференциальные уравнения; уравнения с частными производными; теория вероятностей, так и для прикладных дисциплин, таких как: математическое моделирование; цифровая обработка сигналов; математическая статистика; теория очередей; беспроводная связь; анализ финансов; исследование операций и др. При написании учебника были использованы источники [1–11, 13–15].

1.1 Логические символы

В математическом анализе принято использовать логические символы для сокращения обозначений. Приведём некоторые из них:

$\exists$ – “существует” (квантор существования);

$\exists!$ – “существует строго один элемент” или “существует единственный элемент”;

$\forall$ – “для любого”, “для всех” (квантор всеобщности);

$\Rightarrow$ – “справедливо”, “следует”, “имеет место”;

$\Leftrightarrow$ – “тогда и только тогда”;

$\urcorner$ – отрицание.

1.2 Множества. Основные операции над множествами

Начнём с элементарного понятия математического анализа – понятия множества, а также рассмотрим некоторые операции над множествами.

Определение 1. *Множество* – это совокупность определённых объектов любой природы, рассматриваемых как единое целое[1].

Для обозначения множеств обычно используют заглавные буквы латинского алфавита: $A, B, X, \ldots$.

Одним из примеров множества в реальной жизни является книжный шкаф. Объектами такого множества являются книги, а размещение в шкафу позволяет рассматривать их как единое целое. Книги можно хранить определённым образом: либо в алфавитном порядке по названиям, либо в алфавитном порядке по именам авторов, либо по тематике и т.д. Можно также говорить о множестве всех букв конкретного алфавита, множестве

[1]Это “наивное” определение множества. В современной математике разработаны более формальные и строгие определения множеств.

всех точек данной кривой, множестве всех решений данного уравнения, множестве всех натуральных чисел и т.п. Теория формальных языков рассматривает множество строк. Исходя из определения множества, “все лучшие математики России” – это не множество, поскольку объекты не являются “определёнными” – не все согласятся с тем, является ли конкретный математик “лучшим”.

Определение 2. *Элементом* или *точкой* множества является любой из объектов, принадлежащих этому множеству.

Элементы множеств обычно обозначаются строчными буквами латинского алфавита: $a, b, x, y, \dots$.

Запись

$$a \in A \qquad (A \ni a)$$

означает, что элемент a принадлежит множеству A. Если элемент a не принадлежит A, то это записывается в виде

$$a \notin A.$$

Определение 3. Множество A называется *подмножеством* множества B, если все элементы множества A принадлежат множеству B. Это обозначается следующим образом:

$$A \subset B \qquad (B \supset A).$$

Диаграмма Венна для $A \subset B$ приведена на рис. 1.

Есть несколько множеств, с которыми мы будем работать в дальнейшем.

1. Множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

2. Множество целых чисел $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$.

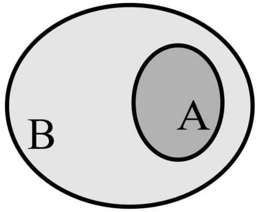


Рис. 1: $A \subset B$

3. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$.

4. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Для множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ справедливы следующие соотношения:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Два множества A и B *равны* $A{=}B$ тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Порядок элементов не влияет на равенство двух множеств.

Если два множества A и B являются подмножествами друг друга, то эти два множества равны:

$$B \subset A \quad \text{и} \quad A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A = B.$$

В теории множеств удобно рассматривать *универсальное* множество как множество, содержащее все объекты, включая самого себя. Таким образом, все множества, участвующие в каком-либо рассуждении, рассматривают как подмножества некоторого фиксированного *универсального* множества E:

$$A \subset E \qquad \text{для любого } A.$$

Запись $A = \{a, b, c, \ldots\}$ означает, что множество A состоит из элементов a, b, c и других.

Часто определять множество, перечисляя первые несколько элементов, оказывается неудобным, поэтому для описания множества используют какое-либо правило или условие. Обозначим некоторое правило через α. То, что правило α порождает множество A, записывается следующим образом:

$$A = \{a \in E \ : \ \alpha\}. \tag{1}$$

Запись (1) означает, что множество A состоит только из тех элементов множества E, которые удовлетворяют условию α.

Пример 1. Множество $A = \{-64, -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27, 64\}$ состоит из целых чисел, больших или равных -4 и меньших или равных 4, возведённых в куб. Записав это множество в виде (1), получим

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : \ x^3 \text{ и } -4 \le x \le 4\}.$$

Пример 2. Множество

$$A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \frac{6}{37}, \ldots\right\}$$

в виде (1) можно записать следующим образом:

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q} : \ x = \frac{n}{n^2+1}, \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

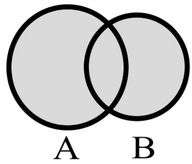
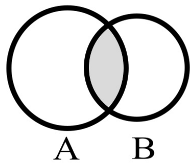
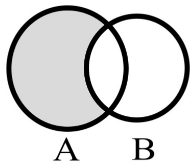
В теории множеств часто требуется множество, не содержащее ни одного элемента – *пустое множество*. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Такое множество может возникнуть, например, когда для некоторого правила α в универсальном множестве E не существует элементов, ему удовлетворяющих. Можно определить пустое множество, например, так:

$$\varnothing = \{a \in E \ : \ a \neq a\}.$$

Здесь α – это свойство, что $a \neq a$.

Операции над множествами – это операции, которые применяются к двум или более множествам для установления отношений между ними. Существует четыре основных типа операций над множествами, а именно: объединение, пересечение, дополнение и разность. Каждую операцию над множествами мы будем иллюстрировать диаграммой Венна – диаграммой, показывающей отношения между различными множествами.

Таблица 1. Определения операций над множествами.

Операция над множествами	Диаграмма Венна
Объединением $A \cup B$ двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех различных элементов, каждый из которых входит, по крайней мере, в одно из множеств A или B: $A \cup B = \{x :\ x \in A \ \text{или}\ x \in B\}.$	
Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых входит одновременно и в A, и в B: $A \cap B = \{x :\ x \in A \ \text{и}\ x \in B\}.$	
Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих A и не принадлежащих B: $A \setminus B = \{x :\ x \in A \ \text{и}\ x \notin B\}.$	

Аналогично определяются объединение и пересечение произвольной совокупности множеств.

Пусть n – натуральное число. Для обозначения объединения множеств $B_1, B_2, \ldots, B_n$ будем использовать обозначение

$$\bigcup_{j=1}^{n} B_j = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n.$$

В свою очередь,

$$\bigcap_{j=1}^{n} B_j = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$$

обозначает пересечение множеств $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Кроме того, если индекс объединения или пересечения должен принимать не все значения подряд из некоторого диапазона, а все значения из некоторого множества Γ (говорят при этом, что индекс "пробегает" множество Γ), то это указывают под знаком операции, например,

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} M_\alpha \qquad \text{или} \qquad \bigcap_{\alpha\in\Gamma} M_\alpha.$$

Пример 3. В качестве примера рассмотрим два множества заглавных букв русского и греческого алфавитов:

$$\mathbf{Q} = \{\text{А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, Ж, З, И, Й, К, Л, М, Н, О, П, Р, С, Т, У,}$$

$$\text{Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я}\}$$

и

$$\mathbf{R} = \{A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, \Lambda, M, N, \Xi, O, \Pi, P,$$

$$\Sigma, T, \Upsilon, \Phi, X, \Psi, \Omega\}.$$

Объединение, пересечение и разность двух множеств **Q** и **R** имеют вид (см. рис. 2):

$$\mathbf{Q} \cup \mathbf{R} = \{\text{А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, Ж, З, И, Й, К, Л, М, Н, О, П, Р, С, Т, У,}$$

$$\text{Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я}, \Theta, \Xi, \Omega, \Sigma, \Delta, \Lambda, I, \Psi, N, Z\},$$

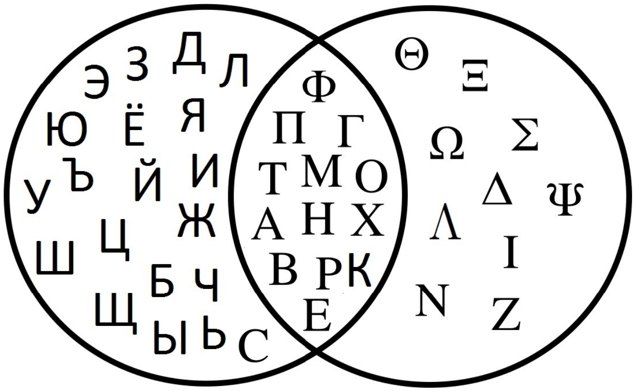


Рис. 2: Диаграмма Венна для множеств заглавных букв русского и греческого алфавитов.

$$\mathbf{Q} \cap \mathbf{R} = \{\text{А, В, Г, Е, К, М, Н, О, П, Р, Т, Ф, Х}\},$$
$$\mathbf{Q} \setminus \mathbf{R} = \{\text{Б, Д, Ё, Ж, З, И, Й, Л, С, У, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я}\}.$$

Если $B \subset A$, то $A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до A, или дополнением B в A и обозначается

$$B' = A \setminus B.$$

Свойства операций над множествами

Для любой системы множеств A_α, $\alpha \in \Gamma$, и любых множеств A, B и X справедливы формулы:

1. $A \subset A, \quad \varnothing \subset A$;

2. $(\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) \bigcap B = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} (A_\alpha \bigcap B)$,
   в частности $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

3. $(\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) \bigcup B = \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} (A_\alpha \bigcup B)$,
   в частности $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

4. $X \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} (X \setminus A_\alpha)$;

5. $X \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} (X \setminus A_\alpha)$.

Замечание 1. Для того чтобы доказать равенство двух множеств, нужно показать, что всякий элемент x, принадлежащий правой части равенства, принадлежит и левой, и наоборот.

Докажем, например, свойства 2 и 4.

Доказательство свойства 2. Нам нужно показать, что если $C_1 = (\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) \bigcap B$ и $C_2 = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} (A_\alpha \bigcap B)$, то $C_1 = C_2$.

1) Покажем, что $C_1 \subset C_2$. Возьмём любой элемент $a \in C_1$. Тогда $a \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ и $a \in B$. Это означает, что a входит хотя бы в одно множество A_α, $\alpha\in\Gamma$, и в множество B, т.е. найдётся $\alpha\in\Gamma$ такое, что $a \in A_\alpha \cap B$. А это и означает, что $a \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} (A_\alpha \bigcap B)$.

2) Покажем, что $C_2 \subset C_1$. Возьмём любой элемент $a \in C_2$. Тогда найдётся $\alpha\in\Gamma$ такое, что $a \in A_\alpha \bigcap B$. Поэтому $a \in A_\alpha$ и одновременно $a \in B$, следовательно $a \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ и $a \in B$, а это означает, что $a \in (\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha) \bigcap B$.

Доказательство свойства 4. Пусть $C_1 = X \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$, $C_2 = \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} (X \setminus A_\alpha)$. Докажем, что $C_1 = C_2$.

1) Сначала покажем, что $C_1 \subset C_2$. Возьмём любой элемент $x \in C_1$, тогда $x \in X$ и $x \notin \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$, т.е. $x \notin A_\alpha$ с любым $\alpha\in\Gamma$. Это означает, что $x \in X \setminus A_\alpha$ для всех $\alpha\in\Gamma$, т.е. $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} (X \setminus A_\alpha) = C_2$. Поскольку для всякого $x \in C_1$ верно, что $x \in C_2$, то вложение $C_1 \subset C_2$ доказано.

2) Покажем, что $C_2 \subset C_1$. Возьмём любой элемент $x \in C_2$, тогда $x \in X \setminus A_\alpha$ для любого $\alpha\in\Gamma$, т.е. $x \in X$ и $x \notin A_\alpha$, α — любое, поэтому

$x \notin \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$, т.е. $x{\in}X\backslash \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$. Значит, для всякого $x{\in} \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} (X\backslash A_\alpha)$ выполняется $x{\in}X\backslash \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha{=}C_1$, следовательно $C_2{\subset}C_1$.

Из $C_1{\subset}C_2$ и $C_2{\subset}C_1$ вытекает, что $C_1{=}C_2$. Доказательство закончено.

Определение 4. Рассмотрим два непустых множества A и B. *Декартово произведение* множеств A и B – это множество всех упорядоченных пар элементов, в которых первый элемент принадлежит первому множеству A, а второй – второму множеству B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Пример 4. Пусть $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, тогда

$$\{0, 1\} \times \{1, 2\} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}.$$

Пример 5. • Декартово произведение двух отрезков $A{=}[a, b]$ и $B{=}[c, d]$ даёт прямоугольник (см. рис. 3).

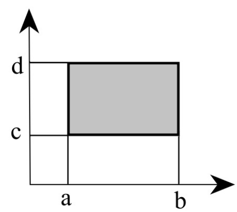


Рис. 3: Декартово произведение двух отрезков $A = [a, b]$ и $B = [c, d]$.

- Декартово произведение прямой и окружности – цилиндрическая поверхность (см. рис. 4, a)).
- Декартово двух окружностей представляет собой тор (см. рис. 4, b)).

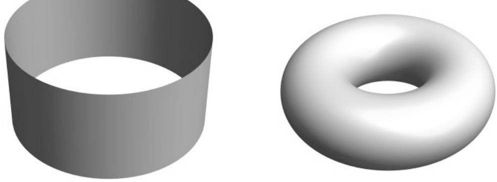


Рис. 4: a) цилиндрическая поверхность, b) тор.

Декартовым произведением непустых множеств A_1, A_2, ..., A_m называется множество $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ..., $x_m \in A_m$. Декартово произведение m равных множеств A обозначается A^m.

1.3 Метод математической индукции. Факториал и двойной факториал. Бином Ньютона

В этом подразделе мы рассмотрим метод математической индукции. Этот метод может использоваться для доказательства справедливости тождества для всех натуральных чисел или для всех натуральных чисел, начиная с некоторого натурального числа.

Натуральные числа определяются как числа для счёта: положительные целые числа, начинающиеся с 1 и бесконечно увеличивающиеся на 1 при переходе к следующему числу. Нуль не является натуральным числом.

Множество всех натуральных чисел мы обозначаем:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Для множества натуральных чисел справедлива *аксиома правильного порядка*.

Аксиома 1 (правильного порядка). Если $S \subset \mathbb{N}$, $S \neq \emptyset$, то существует элемент $x \in S$ такой, что $x \leq y$ для любого $y \in S$. Это означает, что любое подмножество множества натуральных чисел, кроме пустого, имеет наименьший элемент.

Аксиома – утверждение, которое считается установленным, принятым или очевидно истинным, не требующим доказательства.

Метод математической индукции состоит в следующем. Рассмотрим утверждение $P(n)$, где n – натуральное число. Чтобы доказать справедливость $P(n)$ для всех натуральных чисел n, нужно выполнить следующие три действия.

1. Доказать, что утверждение $P(1)$ верно, т.е. $P(n)$ верно для $n=1$.
2. Предположить, что утверждение $P(n)$ справедливо при $n=k$ и $k \geq 1$, т.е., что $P(k)$ верно.
3. Доказать справедливость $P(k+1)$, т.е., что утверждение $P(n)$ верно при $n=k+1$.

Доказательство. Мы будем использовать аксиому 1 правильного порядка. Пусть S – подмножество множества $\mathbb{N}$ такое, что $1 \in S$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ из того, что $n \in S$ следует, что $n+1 \in S$. Мы должны доказать, что $S = \mathbb{N}$.

Предположим противное, т.е., что $S \neq \mathbb{N}$. Это означает, что существуют элементы из $\mathbb{N}$, которых нет в S. Пусть $T = \mathbb{N} \setminus S$ – множество натуральных чисел, которых нет в S.

В силу аксиомы 1 каждое подмножество $\mathbb{N}$ должно иметь наименьший элемент. Пусть $t \in T$ – наименьший элемент T. Поскольку $1 \in S$, то $t > 1$.

Из аксиомы 1 правильного порядка мы знаем, что найдётся такое p, что $t=p+1$. Кроме того, поскольку t – наименьший элемент T, $p \notin T$. Следовательно, $p \in S$.

Однако по свойствам множества S из того, что $p \in S$ следует, что $t = p + 1 \in S$, а это противоречит тому, что $t \in T$.

Таким образом, T не может иметь наименьший элемент, и поэтому $T = \emptyset$, а это означает, что $T = \mathbb{N} \backslash = \emptyset$, т.е. $S = \mathbb{N}$. Доказательство закончено.

Замечание 2. Когда мы доказываем что-то от противного, мы предполагаем, что желаемый вывод ложен, а затем показываем, что при этом мы приходим к ложному утверждению. Таким образом, мы приходим к тому, что исходное утверждение должно быть ложным. Мы предположили, что $S \neq \mathbb{N}$ при доказательстве справедливости метода математической индукции и пришли к противоречию.

Замечание 3. Методом математической индукции можно доказывать утверждения, справедливые и при $n \geq m$, где $m > 1$. При этом в ходе доказательства нужно заменить первый шаг и доказать, что утверждение верно при $n = m$, а все остальное оставить как и прежде, при необходимости пользуясь тем, что $n \geq m$.

Определение 5. *Факториал* числа n (обозначается $n!$, произносится “эн факториал”) – это произведение всех натуральных чисел до n включительно:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n, \qquad 0! = 1.$$

Двойной факториал числа n обозначается $n!!$ и определяется как произведение всех чисел одинаковой с ним чётности до n включительно. Таким образом,

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k = 2^k k!,$$

$$(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k+1) = \frac{(2k+1)!}{2^k k!}, \qquad 0!! = 1. \quad (2)$$

Теорема 1. Для любого натурального числа n и для любых чисел x и y, $x, y \in \mathbb{R}$, справедлива формула

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^m x^{n-m} y^m + \ldots + C_n^n y^n. \quad (3)$$

Формула (3) называется *биномом Ньютона*. Коротко эту формулу можно записать так

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^{n-m} y^m, \quad (4)$$

где

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

– биномиальный коэффициент.

Доказательство. Применим метод математической индукции.

1. При n=1 формула (4) верна:

$$x + y = C_1^0 x + C_1^1 y = \frac{1!}{0!(1-0)!} x + \frac{1!}{1!(1-1)!} y =$$

$$= \frac{1!}{0!1!} x + \frac{1!}{1!0!} y = x + y,$$

в силу того, что $0! = 1! = 1$.

2. Пусть формула бинома Ньютона (4) справедлива при n=k, $k \geq 1$:

$$(x+y)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^{k-m} y^m. \quad (5)$$

3. Докажем, что формула (4) верна при $n = k + 1$:

$$(x+y)^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m x^{k+1-m} y^m.$$

Имеем

$$(x + y)^{k+1} = (x + y)(x + y)^k.$$

К $(x + y)^k$ применим (5) и раскроем скобки

$$(x + y)^{k+1} = (x + y) \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^{k-m} y^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^{k+1-m} y^m + \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^{k-m} y^{m+1}.$$

Отделим в первой сумме $\sum\limits_{m=0}^{k} C_k^m x^{k+1-m} y^m$ первое слагаемое $C_k^0 x^{k+1}$ (оно получается при m=0), а во второй сумме $\sum\limits_{m=0}^{k} C_k^m x^{k-m} y^{m+1}$ – последнее слагаемое $C_k^k y^{k+1}$ (при m=k). Будем иметь

$$(x + y)^{k+1} =$$

$$= C_k^0 x^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} C_k^m x^{k+1-m} y^m + \sum_{m=0}^{k-1} C_k^m x^{k-m} y^{m+1} + C_k^k y^{k+1} =$$

$$= x^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} C_k^m x^{k+1-m} y^m + \sum_{m=0}^{k-1} C_k^m x^{k-m} y^{m+1} + y^{k+1},$$

так как $C_k^0 = \frac{k!}{0!(k-0)!} = 1$ и $C_k^k = \frac{k!}{k!(k-k)!} = 1$. В третьем слагаемом $\sum\limits_{m=0}^{k-1} C_k^m x^{k-m} y^{m+1}$ заменим m на $m - 1$ и получим

$$(x+y)^{k+1} = x^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} C_k^m x^{k+1-m} y^m + \sum_{m=1}^{k} C_k^{m-1} x^{k-m+1} y^m + y^{k+1}.$$

Теперь можно объединить второе и третье слагаемое в одну сумму

$$(x+y)^{k+1} = x^{k+1} + \sum_{m=1}^{k}(C_k^m + C_k^{m-1})x^{k+1-m}y^m + y^{k+1}.$$

Рассмотрим отдельно сумму $C_k^m + C_k^{m-1}$. При $0 \le m \le k$ имеем

$$C_k^m + C_k^{m-1} = \frac{k!}{m!(k-m)!} + \frac{k!}{(m-1)!(k-m+1)!} =$$

$$= \frac{k!}{(m-1)!(k-m)!}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{k-m+1}\right) =$$

$$= \frac{k!}{(m-1)!(k-m)!} \cdot \frac{k+1}{m(k-m+1)} =$$

$$= \frac{(k+1)!}{m!(k-m+1)!} = C_{k+1}^m.$$

Далее, возвращаясь к выражению $(x+y)^{k+1}$, получим

$$(x+y)^{k+1} = x^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} C_{k+1}^m x^{k+1-m}y^m + y^{k+1}.$$

Слагаемое $x^{k+1} = C_{k+1}^0 x^{k+1}$, а $y^{k+1} = C_{k+1}^{k+1} y^{k+1}$, так как $C_{k+1}^0 = C_{k+1}^{k+1} = 1$, поэтому

$$(x+y)^{k+1} = C_{k+1}^0 x^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} C_{k+1}^m x^{k+1-m}y^m + C_{k+1}^{k+1} y^{k+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m x^{k+1-m}y^m.$$

Доказательство закончено.

Замечание 4. Аналогично доказывается и формула для *полинома Ньютона* от s переменных $x, y, \ldots, z \in \mathbb{R}$ вида

$$(x + y + \ldots + z)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_s=n} \frac{n!}{k_1! \ldots k_s!} x^{k_1} y^{k_2} \ldots z^{k_s},$$

где $k_1, \ldots, k_s$ – натуральные числа.

Докажем неравенство Бернулли, которое будет использовано при изучении теории предела последовательности.

Утверждение 1. При $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, $x \neq 0$ и при произвольном натуральном $n \geq 2$ справедливо *неравенство Бернулли*

$$(1 + x)^n > 1 + nx. \tag{6}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции.

1. Сначала убедимся, что при $n=2$ неравенство (6) верно. Действительно, при $x > -1$ и $x \neq 0$

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x.$$

2. Предположим, что для номера $n=k$ неравенство (6) справедливо:

$$(1 + x)^k > 1 + kx, \quad k \geq 2.$$

3. Докажем неравенство Бернулли при $n=k+1$. Имеем

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x) > (1 + kx)(1 + x) =$$

$$= 1 + (k + 1)x + kx^2 > 1 + (k + 1)x.$$

Здесь мы также учли, что $x > -1$ и $x \neq 0$.

Доказательство закончено.

Докажем справедливость формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Утверждение 2. Для всех чисел q, где $q \neq 1$, и для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{7}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции.

1. Докажем сначала справедливость утверждения (7) при $n=1$. Слева получаем $1+q$ при $n = 1$. Справа вычисляем
$$\frac{1 - q^2}{1 - q} = \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} = 1 + q.$$
Таким образом, утверждение при $n=1$ доказано.

2. Предположим, что (7) верно при $n=k$:
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}. \tag{8}$$

3. Докажем утверждение (7) при $n=k+1$, т.е.
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^k + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+2}}{1 - q}.$$
С учётом (8) получим
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^k + q^{k+1} = (1 + q + q^2 + \cdots + q^k) + q^{k+1} =$$
$$= \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+1} + q^{k+1}(1 - q)}{(1 - q)} =$$
$$= \frac{1 - q^{(k+1)+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{k+2}}{1 - q}.$$

Доказательство закончено.

Рассмотрим на примерах, как методом математической индукции можно решать задачи арифметического характера, доказывать теоремы элементарной алгебры, решать тригонометрические задачи и доказывать неравенства.

Пример 6. Доказать, что сумма первых n нечётных чисел равна n^2:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Введём обозначение

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

Применим метод математической индукции.

1. При n=1 сумма S_1 представляется одним слагаемым, равным 1. Выражение n^2 при n=1 также равно 1. Значит, при n=1 утверждение (9) верно: S_1=1=1^2.

2. Допустим, что утверждение (9) верно для n=k:

$$S_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2. \tag{10}$$

3. Докажем, что утверждение (9) справедливо и для n=k+1, т.е., что S_{k+1}=$(k+1)^2$. Действительно,

$$S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = S_k + (2k + 1),$$

но, учитывая (10), S_k=k^2, поэтому

$$S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2,$$

что и требовалось доказать.

Пример 7. Методом математической индукции доказать равенство

$$\sin\alpha + \sin(2\alpha) + \ldots + \sin(n\alpha) = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{n\alpha}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Для краткости положим

$$S_n = \sin\alpha + \sin(2\alpha) + \ldots + \sin(n\alpha).$$

1. При n=1 равенство (11) справедливо, поскольку

$$S_1 = \sin\alpha = \frac{\sin\frac{2\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha.$$

2. Предположим, что равенство (11) выполняется при n=k:

$$S_k = \sin\alpha + \sin(2\alpha) + \ldots + \sin(k\alpha) = \frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{k\alpha}{2}. \quad (12)$$

3. Докажем, что равенство (11) верно $n = k + 1$. То есть нам нужно доказать, что

$$S_{k+1} = \sin\alpha + \sin(2\alpha) + \ldots + \sin(k\alpha) + \sin((k+1)\alpha) =$$

$$= \frac{\sin\frac{(k+2)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}.$$

Действительно, применив (12), получим

$$S_{k+1} = \sin\alpha + \sin(2\alpha) + \ldots + \sin(k\alpha) + \sin((k+1)\alpha) =$$

$$= S_k + \sin((k+1)\alpha) = \frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{k\alpha}{2} + \sin((k+1)\alpha) =$$

$$= \frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{k\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin((k+1)\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Используя формулу для синуса двойного угла

$$\sin((k+1)\alpha) = 2\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2},$$

будем иметь

$$S_{k+1} = \frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{k\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\left(\sin\frac{k\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Замечая, что

$$\sin\frac{k\alpha}{2} = \sin\left(\frac{(k+1)\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2},$$

получим

$$S_{k+1} = \frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\times\left(\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\left(\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{(k+2)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались формулой для синуса суммы

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Доказательство закончено.

Пример 8. Доказать, что при любом положительном $a \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{n} \leq \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad (13)$$

Применим метод математической индукции.

1. Пусть n=1. Покажем, что

$$\sqrt{a} \le \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$$

или

$$2\sqrt{a} - 1 \le \sqrt{4a + 1}.$$

Это неравенство справедливо, поскольку

$$(2\sqrt{a} - 1)^2 = 4a - 4\sqrt{a} + 1 \le 4a + 1.$$

2. Допустим, что неравенство (13) верно при n=k:

$$\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{k} \le \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}. \qquad (14)$$

3. Докажем неравенство (13) при $n = k$+1, т.е.

$$\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{k+1} \le \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}. \qquad (15)$$

Прибавив a к обеим частям равенства (14), получим

$$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}} \le \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2} + a =$$

$$= \frac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

Очевидно, что

$$\frac{2a + 1 + \sqrt{4a + 1}}{2} = \left(\frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}\right)^2,$$

поэтому неравенство (15) доказано, а следовательно, доказано и неравенство (13).

1.4 Понятие отображения (функции). Сюръективное, инъективное и биективное отображения

Следующим после множества важнейшим понятием математического анализа является понятие отображения, а также эквивалентное ему понятие функции.

Пусть M и E – непустые множества и $D \subset M$.

Определение 6. *Отображением* f множества D в множество E или *функцией* f, определённой на множестве D со значениями в E, будем называть правило, по которому каждому элементу $x \in D$ сопоставляется строго один элемент $y = f(x)$ из множества E.

Элемент $y = f(x)$ множества E называется *образом* элемента x при отображении f.

Элемент x при этом называется *прообразом* (одним из возможных) элемента y.

Совокупность $\{f(x) : x \in D\}$ всех элементов вида $f(x)$, $x \in D$, называется *образом множества* D при отображении f и обозначается $f(D)$. Справедливо вложение $f(D) \subset E$. Само множество D при отображении f называется *полным прообразом* множества $f(D)$.

Для отображения f часто используются обозначения

$$f : D \to E \qquad \text{или} \qquad D \xrightarrow{f} E.$$

Можно также определить отображение из множества M в множество E как некоторое подмножество декартова произведения $M \times E$, т.е. некоторое множество упорядоченных пар вида (x, y), где $x \in D \subset M$. Однако такой объект чаще называют *графиком отображения*.

Если E – числовое множество, т.е. значениями отображения являются числа, то отображение чаще всего называют *функцией* и пишут $y=f(x)$, $x\in D$, $y\in E$. В этом случае множество D называют *областью определения* функции f, $f(D)\subset E$ – *областью значений*, x называется *аргументом* функции или *переменной*, а $y=f(x)$ – *значением* функции в точке x.

Значение функции f в точке x_0 обозначается следующим образом:

$$f(x_0) = f(x)|_{x=x_0}.$$

Если аргумент x отображения (функции) $y=f(x)$ может быть представлен как элемент некоторого декартова произведения $D_1\times D_2\times\ldots\times D_n$, т.е. как упорядоченный набор $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1\in D_1$, $x_2\in D_2$, $\ldots$, $x_n\in D_n$, то f называют *отображением (функцией) n переменных (аргументов)* и при этом пишут $y=f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим некоторые типы отображений.

Определение 7. Говорят, что отображение $f\colon D\to E$ является *сюръективным*, если выполнено равенство $f(D)=E$, т.е. если каждый $y\in E$ является образом хотя бы одного x из D (см. рис. 5, а)).

Отображение $f\colon D\to E$ является *инъективным*, если из условия $x_1, x_2\in D$, $x_1\neq x_2$ следует, что $f(x_1)\neq f(x_2)$ (см. рис. 5, b)).

Отображение являющееся одновременно и сюръективным, и инъективным называется *биективным* или *взаимно однозначным соответствием* между D и E, или *биекцией* (см. рис. 5, c)).

Таким образом, биекция каждому элементу множества D сопоставляет единственный элемент множества E, и наоборот, каждый элемент множества E является значением (образом) единственного элемента (прообраза) из множества D.

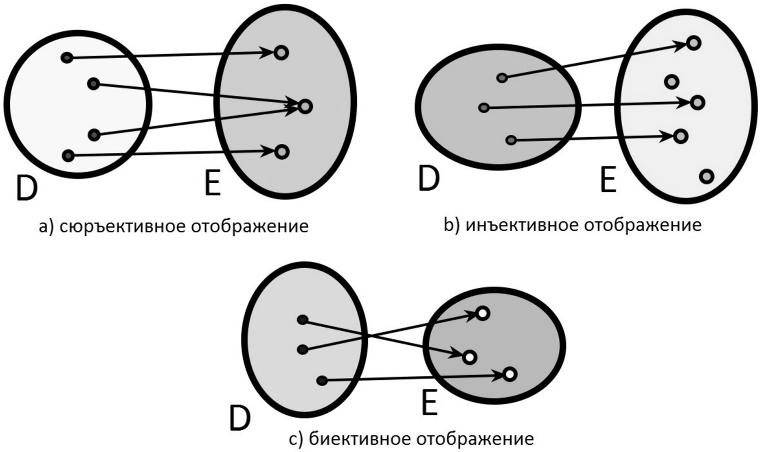


Рис. 5: Типы отображений.

То, что между множествами D и E осуществляется биекция, обозначается как

$$D \leftrightarrow E.$$

Если отображение $f\colon D\to E$ является взаимно однозначным соответствием, то для любого $y\in E$ найдется единственный элемент x из D такой, что $y=f(x)$. Обозначим этот x через $f^{-1}(y)$, тем самым на множестве E определено некоторое отображение f^{-1} со значением из D:

$$f^{-1} : E \to D.$$

Отображение f^{-1} называется *обратным* по отношению к f.

Ясно, что f^{-1} есть биекция E на D и обратное к нему отображение $(f^{-1})^{-1}\colon D\to E$ совпадает с $f\colon D\to E$.

Пусть $f\colon D\to E$ и $A\subset D$. *Сужением* отображения f на множество A называется отображение множества A в множество E, определённое по тому же правилу, что и f, но только для $x \in A$. Сужение обозначается f_A, $f|_A$. Таким образом, $f_A{:}A\to E$,

$f_A(x)=f(x)$ для любого $x\in A$. Функция f тогда называется *продолжением* функции f_A на множество D.

Определение 8. Пусть $f\colon D\to E$, $g\colon E\to Z$. Отображение $h\colon D\to Z$, определяемое по правилу $h(x)=g(f(x))$, $x\in D$, называется *композицией* (*суперпозицией*) отображений f и g и обозначается $g\circ f$, т.е.

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Задать функцию означает установить правило (закон), с помощью которого по данным значениям независимой переменной следует находить соответствующие им значения функции. Рассмотрим некоторые способы задания функций.

Способы задания функций

1. *Табличный способ.*

   Довольно распространённый, заключается в задании таблицы отдельных значений аргумента и соответствующих им значений функции. Такой способ задания функции применяется в том случае, когда область определения функции является дискретным конечным множеством.

   При табличном способе задания функции можно приближённо вычислить не содержащиеся в таблице значения функции, соответствующие промежуточным значениям аргумента. Для этого используют способ интерполяции.

   Преимущество табличного способа задания функции состоит в том, что он даёт возможность определить те или другие конкретные значения сразу, без дополнительных измерений или вычислений. Однако в некоторых случаях таблица определяет функцию не полностью, а лишь для некоторых значений аргумента и не даёт наглядного изображения характера изменения функции в зависимости от изменения аргумента.

2. *Графический способ.*

   Графический способ задания функции не всегда даёт возможность точно определить численные значения аргумента. Однако он имеет большое преимущество перед другими способами — наглядность. В технике и физике часто пользуются графическим способом задания функции, причём график бывает единственно доступным для этого способом.

   Чтобы графическое задание функции было вполне корректным с математической точки зрения, необходимо указывать точную геометрическую конструкцию графика, которая чаще всего задаётся уравнением. Это приводит к следующему способу задания функции.

3. *Явный аналитический способ.*

   Чаще всего закон, устанавливающий связь между аргументом и функцией, задаётся посредством формулы $y=f(x)$. Такой способ задания функции называется аналитическим.

   Этот способ даёт возможность по каждому численному значению аргумента x найти соответствующее ему численное значение функции y точно или с некоторой точностью.

   Если зависимость между x и y задана формулой, разрешенной относительно y, т.е. имеет вид $y=f(x)$, то говорят, что функция от x задана в явном виде.

4. *Параметрический способ.*

Параметрические функции используются для выражения кривых, которые нельзя записать в виде одного уравнения. Вместо определения y через x, как в предыдущем случае, x и y определяются через другую переменную t – параметр, так что $x{=}x(t)$ и $y{=}y(t)$. Таким образом, функции x и y связаны друг с другом посредством параметра t и определяют набор упорядоченных пар (x, y).

В физике они используются для определения изменения положения объекта во времени. В этом случае объект в момент времени t имеет координаты $(x(t), y(t))$.

5. *Неявный аналитический способ.*

   Неявно заданная функция задаётся соотношением вида $F(x, y){=}0$, где F – функция двух (или более, если $x{=}(x_1, \ldots, x_n)$) переменных.

   Не каждое уравнение $F(x, y){=}0$ может быть сведено к $y{=}f(x)$, но часто $F(x, y){=}0$ можно представить как объединение функций вида $y{=}f(x)$ на разных промежутках x или y.

   Каждая параметрически заданная функция $x{=}x(t)$, $y{=}y(t)$ может быть выражена как неявная функция $F(x, y){=}0$, но не все неявные функции $F(x, y){=}0$ могут быть выражены параметрически в виде $x{=}x(t)$, $y{=}y(t)$. Таким образом, неявное представление является более общим, чем параметрическое, но его часто сложнее использовать.

1.5 Рациональные и иррациональные числа. Сравнение множеств. Мощность множеств

Мы будем иметь дело с бесконечными множествами, вот некоторые из них:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – множество всех целых чисел (натуральные числа, натуральные числа со знаком минус и нуль);

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \right\}$ – множество всех рациональных чисел, т.е. всех дробей $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Два рациональных числа $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ считаются равными, если они имеют одинаковый знак и выполняется равенство $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$. При этом $\frac{0}{q} = 0$.

Два неотрицательных рациональных числа $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ находятся в отношении $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$, если выполнено условие $p_1 \cdot q_2 < p_2 \cdot q_1$.

Два неположительных рациональных числа a и b связаны тем же знаком, что и два неотрицательных числа $|b|$ и $|a|$. Если a – неотрицательное, а b – отрицательное рациональное число, то $a > b$.

Отметим, что любое рациональное число с помощью процесса деления можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Числа нужны для измерения геометрических, физических и других величин, однако для этой цели рациональных чисел недостаточно. Так, имеются отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами. Например, диагональ единичного квадрата.

Утверждение 3. Диагональ единичного квадрата на координатной плоскости не может измеряться рациональным числом.

Доказательство. Обозначим через d длину диагонали единичного квадрата. Действительно, если это число рациональное, то $d = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$ (т.е. дробь $\frac{p}{q}$ несократима). Здесь символом (p, q) обозначен наибольший общий делитель чисел p и q. По теореме

Пифагора имеем

$$d^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2.$$

Следовательно, $p^2{=}2q^2$. Рассмотрим два возможных случая.

1. Если p нечётно, то $p{=}2k{+}1$, $p{=}0, 1, 2, \ldots$, следовательно, $p^2{=}4k^2{+}4k{+}1$ нечётно, и потому равенство $p^2{=}2q^2$ невозможно.

2. Если p чётно, то $p{=}2k$, $p{=}0, 1, 2, \ldots$, $p^2{=}4k^2$ и $2k^2{=}q^2$. Но тогда, рассуждая аналогично, получим, что q тоже чётно. А это значит, что оба числа p и q делятся на 2, откуда $(p, q){\geq}2$, что противоречит условию. Значит, a – не рациональное число, что и требовалось доказать.

Доказательство закончено.

Итак, имеются отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами. Появилась необходимость в новых числах, называемых *иррациональными*. Так, например, возникло число $\sqrt{2}$, выражающее длину диагонали рассмотренного единичного квадрата.

Обратимся теперь к вопросу: как определить, в каком из двух множеств элементов больше? Если число элементов двух множеств конечно, что можно просто найти количество элементов каждого множества и сравнить полученные числа. Количество элементов конечного множества характеризует его “размер” и называется его *мощностью*. Возникает необходимость распространить понятие мощности множества на произвольные бесконечные множества или ответить на вопрос “Когда два множества имеют одинаковый размер?” Кантор ответил на этот вопрос в 1800-х годах, заявив, что два множества имеют одинаковый размер, если можно соединить каждый элемент одного множества с единственным элементом в другом. Таким образом, сравнение множеств осуществляется с помощью понятия взаимно однозначного соответствия или биекции (см. определение 7).

Определение 9. Два множества, между элементами которого можно установить взаимно однозначное соответствие, называются *равномощными*. То, что множество A равномощно множеству B, обозначается как $A \sim B$.

Понятие равномощности обладает свойством транзитивности:

$$A \sim B \text{ и } B \sim C, \text{ то } A \sim C.$$

В терминах определения 9, множество X называется конечным, если существует такое натуральное число $n \in \mathbb{N}$, что между элементами множества X и элементами множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда содержат одинаковое количество элементов.

Пустое множество по определению не содержит элементов и предполагается конечным.

Пример 9.

- Множество чётных чисел равномощно множеству натуральных чисел, т.е.

  $$\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} \sim \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}.$$

  Действительно, отображение $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ в $\{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ осуществляется биекцией

  $$n \leftrightarrow 2n.$$

  Аналогично,

  $$\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} \sim \{2^n\},$$

что устанавливается с помощью биекции

$$n \leftrightarrow 2^n.$$

- Интервалы $(0, 1)$ и (a, b), где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, равномощны:

  $$(0, 1) \sim (a, b).$$

  Это устанавливается с помощью биекции

  $$y = (b - a)x + a.$$

  Аналогично,

  $$[0, 1] \sim [a, b].$$

- Интервал $(-1, 1)$ равномощен всей вещественной оси:

  $$(-1, 1) \sim \mathbb{R},$$

  поскольку можно установить взаимно однозначное соответствие $y=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $x=\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}y$.

Заметим, что в случае бесконечных множеств, множество оказывается равномощным некоторому своему собственному подмножеству.

Вернёмся к определению “размера” множества. Итак, если множество X конечно и содержит $n\in\mathbb{N}$ элементов, то число n называется *мощностью множества* X. Мощностью бесконечного множества будем называть характеристику его “размера”, обобщающую понятие количества элементов конечного множества. Мощность множества X обозначается $|X|$. Мощности называют также *кардинальными* (т.е. *количественными*) *числами*.

Определение 10. Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счётным*.

Таким образом, множество X является счётным, если для него существует биекция со множеством натуральных чисел: $X \leftrightarrow \mathbb{N}$, другими словами, если без повторений все элементы множества X можно последовательно пронумеровать: x_1, x_2, x_3, $\ldots$.

Мощность множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ или его кардинальное число обозначается символом $\aleph_0$ (читается как "алеф-нуль"): $|\mathbb{N}|=\aleph_0$. Множество называется *бесконечным*, если его мощность не меньше мощности множества натуральных чисел, то есть не меньше $\aleph_0$. Счётные множества – это множества, имеющие самый маленький "размер" из бесконечных множеств.

Бесконечное множество, не являющееся счётным, называется *несчётным*.

Для обозначения мощностей несчётных множеств используются кардинальные числа $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots$, которые идут в порядке возрастания.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Доказательство. Пусть X – бесконечное множество, тогда оно не пустое. Выберем произвольный элемент, обозначим его x_1. Тогда $X \backslash x_1$ – тоже не пустое множество. Выберем из множества $X \backslash x_1$ произвольный элемент и обозначим его через x_2, и т.д. Если элементы x_1, x_2, $\ldots$, x_n уже выбраны, то в множестве $X \backslash \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, выберем элемент x_{n+1}. Таким образом, получим бесконечное множество занумерованных элементов

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

содержащихся в X. Это и будет счётное подмножество X. Доказательство закончено.

Лемма 2. Любое бесконечное подмножество счётного множества счётно.

Доказательство. Пусть X – счётное множество:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Пусть $Y \subset X$ – бесконечное подмножество множества X. Обозначим через y тот элемент из Y, который имеет в множестве X наименьший номер. Пусть этот наименьший номер n_1, тогда $y_1 = x_{n_1}$. Через y_2 обозначим тот элемент из Y, который имеет в множестве X наименьший номер среди номеров $n > n_1$, и т.д.

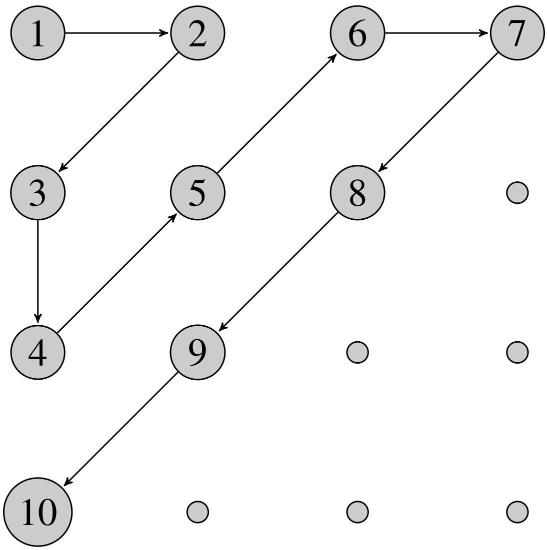
Поскольку каждый элемент из Y есть некоторый элемент x_k из X, то через конечное число шагов, не большее, чем k, ему будет присвоен некоторый номер m в множестве Y. Процесс не оборвётся, поскольку Y – бесконечно. Доказательство закончено.

Теорема 2. Множество всех рациональных чисел счётно.

Доказательство. Счётность означает, что мы можем расположить элементы множества рациональных чисел в порядке, подобном тому, как располагаются натуральные числа. Определим правило, по которому каждому рациональному числу присваивается номер по следующей схеме. В n-й строке таблицы разместим все рациональные числа, записанные в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, расположенные по возрастанию их модуля, причём за каждым положительным числом непосредственно следует ему противоположное. Очевидно, что каждое рациональное число находится на каком-то месте в этой таблице. Присваивая первый номер рациональному числу 0, занумеруем элементы таблицы показанным на следующей схеме образом, где направление присвоения следующего номера показано стрелками.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 1 \arrow[dl] & -1 \arrow[r] & 2 \arrow[dl] & -2 & \cdots \\
\frac{1}{2} \arrow[d] & -\frac{1}{2} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} \arrow[ur] & -\frac{1}{3} \arrow[dl] & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}
$$

На следующей схеме в кружочках стоят номера соответствующих элементов, а стрелки указывают направление нумерации.



В результате каждое рациональное число получит некоторый номер. Доказательств закончено.

Теорема 3. Множество всех действительных чисел интервала $(0, 1)$ несчётно.

Доказательство. Заметим, что всякое число может быть единственным образом представлено в виде бесконечной десятичной дроби, не имеющей в периоде цифру 9.

Предположим противное, что множество чисел $(0, 1)$ счётно. И занумеруем их x_1, x_2, x_3, ... Запишем для каждого числа x_κ его десятичное разложение и составим таблицу.

$$x_1 = 0,\ a_1^{(1)}\, a_2^{(1)}\, a_3^{(1)}\ \ldots\ a_n^{(1)}\ \ldots$$

$$x_2 = 0,\ a_1^{(2)}\, a_2^{(2)}\, a_3^{(2)}\ \ldots\ a_n^{(2)}\ \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = 0,\ a_1^{(n)}\, a_2^{(n)}\, a_3^{(n)}\ \ldots\ a_n^{(n)}\ \ldots$$

Здесь $a_k^{(1)}$ – k-й десятичный знак числа x_i, $a_k^{(i)}$ – элемент множества $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Построим десятичную дробь вида: $0, b_1\, b_2\, b_3\ \ldots\ b_n \ldots$ с помощью диагональной процедуры Кантора.

Пусть $a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, a_3^{(3)}, \ldots, a_n^{(n)}, \ldots$ – диагональные элементы таблицы. Для любого числа $k \in \mathbb{N}$ в качестве b_k возьмём произвольное число из чисел $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 8\}$ так, чтобы $b_k \neq a_k^{(k)}$, и поэтому должно содержаться в таблице, чего быть не может. Доказательство закончено.

Поскольку $(0, 1) \sim (a, b) \sim \mathbb{R}$, то множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ тоже несчётно.

Определение 11. Множество, эквивалентное множеству всех действительных чисел, называется множеством мощности *континуума*.

1.6 Вещественные числа и их основные свойства. Аксиома полноты

В этом подразделе дадим аксиоматическое определение вещественных чисел и проанализируем их важное свойство полноты или непрерывности.

Определение 12. Множество $\mathbb{R}$ называется *множеством вещественных (действительных) чисел*, а его элементы – *вещественными (действительными) числами*, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел.

I. Аксиомы сложения

Определено отображение "+" (операция сложения)

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов $x, y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый *суммой* x и y. При этом выполнены следующие условия.

1. Существует нейтральный элемент $0 \in \mathbb{R}$, называемый *нулем*, такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

2. Для любого элемента $x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $(-x) \in \mathbb{R}$, называемый *противоположным* к x, такой, что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3. Операция "+" ассоциативна, т.е. для любых элементов $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

4. Операция “+” коммутативна, т.е. для любых элементов $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x + y = y + x.$$

II. Аксиомы умножения

Определено отображение “$\cdot$” (операция умножения)

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов $x, y \in \mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y = xy \in \mathbb{R}$, называемый *произведением* x и y. При этом выполнены следующие условия.

1. Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R}$, называемый *единицей*, такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

2. Для любого элемента $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ имеется элемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$, называемый *обратным* к x, такой, что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3. Операция “$\cdot$” ассоциативна, т.е. для любых элементов $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

4. Операция “$\cdot$” коммутативна, т.е. для любых элементов $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

III. Связь сложения и умножения

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, т.е. для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

IV. Аксиомы порядка

Между элементами из множества $\mathbb{R}$ имеется отношение *неравенства* “$\leq$”, т.е. для элементов $x, y \in \mathbb{R}$ установлено: выполняется $x \leq y$ или нет. При этом должны выполняться следующие условия.

1. $x \leq x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.
2. $x \leq y$ и $y \leq x \Rightarrow x = y$.
3. $x \leq y$ и $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.
4. $x \leq y$ или $y \leq x$ для любых $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$.

V. Связь сложения и порядка в $\mathbb{R}$ реализуется следующим образом: для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$$

VI. Связь умножения и порядка в $\mathbb{R}$ реализуется следующим образом: для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$0 \leq x \text{ и } 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y.$$

VII. Аксиома полноты (непрерывности)

Если X и Y – непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \leq y$, то существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leq c \leq y$.

Геометрической интерпретацией множества вещественных чисел является вещественная прямая (ось). Вещественная ось

$\mathbb{R}$ представляет собой прямую линию с выбранным направлением, началом координат (нулём) и фиксированным масштабом, так что каждое вещественное число соответствует единственной точке на линии и наоборот, каждая точка на линии соответствует единственному вещественному числу.

Для математического анализа большое значение имеет аксиома полноты (непрерывности) множества вещественных чисел. Если мы рассматриваем вещественные числа как точки на линии, эта аксиома кажется очевидной. Если два множества X и Y таковы, что на вещественной прямой $\mathbb{R}$ все элементы одного из них лежат левее всех элементов второго, то существует вещественное число c, разделяющее эти два множества, т.е. лежащее правее всех элементов X (кроме, возможно, c) и слева от всех элементов Y (кроме, возможно, c).

Здесь следует отметить, что несмотря на "очевидность" этого свойства, для рациональных чисел оно не всегда выполняется. Например, рассмотрим два множества:

$$X = \{x{\in}\mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 2\} \quad \text{и} \quad Y = \{x{\in}\mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 > 2\}.$$

Легко видеть, что для любых элементов $x{\in}X$ и $y{\in}Y$ неравенство $x{<}y$ выполнено. Однако рациональных чисел c, разделяющих эти два множества, не существует. Действительно, это число может быть только $\sqrt{2}$, но оно не является рациональным (см. утверждение 3).

Замечание 5. Если на каком-то множестве G действуют две операции, удовлетворяющие всем аксиомам I-III, то G называется *алгебраическим полем* или просто *полем*.

Замечание 6. Множество, между некоторыми элементами которого имеется отношение, удовлетворяющее аксиомам IV называется *линейно упорядоченным*.

Алгебраические свойства действительных чисел

Для всех $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ справедливы следующие свойства.

1. Нуль в $\mathbb{R}$ единственен.
2. Противоположный элемент $(-x)$ к x единственен.
3. Единица в $\mathbb{R}$ единственна.
4. Обратный элемент x^{-1} к x единственен.
5. $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.
6. $-x = (-1) \cdot x$.
7. $(-1) \cdot (-x) = x$.
8. $(-x) \cdot (-x) = x \cdot x$.
9. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ всегда имеет место в точности одно из соотношений $x < y$, $x = y$, $x > y$.
10. $0 < 1$.

Рассмотрим теперь такие понятия как целая и дробная части вещественного числа, абсолютная величина, а также приведём неравенство треугольника.

Определение 13. *Целая часть* x или *антье* от x есть наибольшее целое число, не превосходящее x. Целая часть числа x обозначается $[x]$.

Дробная часть числа x или *мантисса* определяется разностью

$$\{x\} = x - [x].$$

Таким образом, при всех x значение символа $\{x\}$ удовлетворяет условию $0 \leq \{x\} < 1$. Очевидно, что $x = [x] + \{x\}$.

Пример 10. $[1,5] = 1$; $[0,3] = 0$; $[-0,7] = -1$; $[-3,5] = -4$.

Определение 14. Определим *модуль* или *абсолютную величину* числа x равенством

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Число $|x|$ выражает расстояние от нуля до точки x на вещественной оси.

Утверждение 4. Имеет место неравенство

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \tag{16}$$

называемое *неравенством треугольника*.

Доказательство. Докажем это неравенство. Имеем:

1. если $ab \geq 0$, то $|a + b| = |a| + |b|$;
2. если $ab < 0$, то $|a + b| < |a| + |b|$.

Доказательство закончено.

1.7 Ограниченные и неограниченные множества. Супремум и инфимум

В этом подразделе мы рассмотрим ограниченные и неограниченные множества, определения супремума и инфимума, а также некоторые их свойства.

Пусть множество $M \subset \mathbb{R}$ и $M \neq \emptyset$.

Определение 15. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует число $b \in \mathbb{R}$ такое, что для любых $x \in M$

выполняется неравенство $x \leq b$. С помощью кванторов это определение можно записать в виде:

$$\exists\, b \in \mathbb{R} : \forall\, x \in M \Rightarrow x \leq b.$$

Число b называется *верхней гранью* множества M.

Очевидно, что если число b является верхней гранью множества M, то и любое число b', большее числа b, тоже является верхней гранью множества M, откуда следует, что всякое ограниченное сверху множество вещественных чисел имеет бесконечно много верхних граней.

Определение 16. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если существует число $a \in \mathbb{R}$ такое, что для любых $x \in M$ выполняется неравенство $x \geq a$:

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in M \Rightarrow x \geq a.$$

Число a называется *нижней гранью* множества M.

Очевидно, что если число a является нижней гранью множества M, то и любое число a', меньшее числа a, тоже является нижней гранью множества M, откуда следует, что всякое ограниченное снизу множество вещественных чисел имеет бесконечно много нижних граней.

Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется *ограниченным*:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in M \Rightarrow |x| \leq c.$$

Множество, не являющееся ограниченным сверху, называется *неограниченным сверху*. Множество M неограничено сверху тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\forall\, d \in \mathbb{R}\ \ \exists x \in M : x > d.$$

Множество, не являющееся ограниченным снизу, называется *неограниченным снизу*, т.е.

$$\forall\, h \in \mathbb{R} \;\; \exists x \in M : x < h.$$

Множество, не являющееся ограниченным, называется *неограниченным*. Неограниченное множество не ограничено либо сверху, либо снизу, либо и сверху, и снизу.

Если в множестве M есть число b такое, что для всех чисел $x \in M$ выполняется неравенство $x \le b$, то число b называется *наибольшим* или *максимальным числом (элементом)* множества M: $b = \max M$.

Если в множестве M есть число a такое, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $x \ge a$, то число a называется *наименьшим* или *минимальным числом (элементом)* M: $a = \min M$.

Наряду с обозначениями $\max M$ и $\min M$ используются в том же смысле, соответственно, символы $\max\limits_{x \in M} x$ и $\min\limits_{x \in M} x$.

Из аксиомы порядка следует, что если в числовом множестве есть максимальное (минимальное) число, то оно единственно.

Заметим, что не во всяком (даже ограниченном) множестве существует максимальный (минимальный) элемент. Например, множество $M = \{x \in \mathbb{R}: 0 \le x < 1\}$ имеет минимальный элемент $\min M = 0$, но не имеет максимального элемента.

Перечислим ограниченные множества на вещественной прямой.

- Множество M точек x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется *интервалом*:

$$M = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

- Множество M точек x, удовлетворяющих неравенствам

$a<x\leq b$ или $a\leq x<b$ называется *полуинтервалом*:

$$M = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

или

$$M = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

- Множество M точек x, удовлетворяющих неравенствам $a\leq x\leq b$ называется *отрезком* или *сегментом*:

$$M = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

- Каждое из этих множеств называется *промежутком*.

Будем также рассматривать следующие неограниченные множества на вещественной прямой.

- Множество L точек x, определяемое условием $x<a$ или $x>a$, представляет собой *открытый луч*:

$$L = (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

или

$$L = (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}.$$

- Множество L точек x, определяемое условием $x\leq a$ или $x\geq a$, представляет собой *замкнутый луч*:

$$L = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

или

$$L = [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\};$$

a — *вершина* луча.

Здесь символ “$+\infty$” читается *плюс бесконечность*, а символ “$-\infty$” – *минус бесконечность*.

Определение 17. *Окрестностью* (или *ε-окрестностью*) точки x называется всякий интервал вида $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$. Обозначение ε-окрестности точки x следующее:

$$U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Определение 18. *Расширенной вещественной прямой* $\overline{\mathbb{R}}$ называется объединение вещественной прямой $\mathbb{R}$ и двух бесконечных точек: "$-\infty$" и "$+\infty$", причём для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняются следующие свойства:

1. $-\infty < x < +\infty$;
2. $x + (+\infty) = +\infty, \;\; x - (+\infty) = -\infty, \;\; \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$;
3. $x > 0 : \; x \cdot (+\infty) = +\infty, \;\; x \cdot (-\infty) = -\infty$;
4. $x < 0 : \; x \cdot (+\infty) = -\infty, \;\; x \cdot (-\infty) = +\infty$.

Точные грани числовых множеств

Определение 19. Пусть числовое множество M ограничено сверху. Наименьшая из всех верхних граней данного множества называется *точной верхней гранью* или *супремумом* этого множества и обозначается $\sup M$ или $\sup\limits_{x \in M} x$ (от латинского слова "*supremum*" – наибольший).

Итак,

$$s = \sup M \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1.\ \forall x \in M \;\; x \leq s, \\ 2.\ \forall s' < s \;\; \exists x' \in M : \;\; s' < x'. \end{array}$$

Пусть числовое множество M ограничено снизу. Наибольшая из всех нижних граней данного множества называется *точной нижней гранью* или *инфимумом* этого множества и обозначается: $\inf M$, или $\inf\limits_{x \in M} x$ (от латинского "textitinfimum" – наименьший).

Итак,

$$i = \inf M \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 1.\ \forall x \in M \ \ i \le x, \\ 2.\ \forall i' > i \ \ \exists x'' \in M : \ \ i' > x''. \end{array}$$

Пример 11. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.

$$\sup[a, b] = \sup(a, b) = b,$$

$$\inf[a, b] = \inf(a, b) = a.$$

Отсюда видно, что точная верхняя грань и точная нижняя грань могут как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству.

Теорема 4. Всякое ограниченное сверху непустое множество вещественных чисел имеет точную верхнюю грань. Всякое ограниченное снизу непустое множество вещественных чисел имеет точную нижнюю грань.

Доказательство. Пусть A – ограниченное сверху множество, $A \neq \emptyset$, и B — множество всех верхних граней для множества A, $B \neq \emptyset$. Если $a \in A$ и $b \in B$, то по определению верхней грани $a \leqslant b$.

В силу аксиомы полноты множества вещественных чисел найдётся число $\beta \in \mathbb{R}$ такое, что для всех чисел a, принадлежащих множеству A, и для всех чисел $b \in B$, принадлежащих множеству B, выполняется неравенство: $a \leqslant \beta \leqslant b$.

Неравенство $a \leqslant \beta$, имеющее место для всех $a \in A$, означает, что β – верхняя грань A, а неравенство $\beta \leqslant b$, имеющее место для всех $b \in B$, означает, что β – наименьшая из всех верхних граней A. Следовательно, $\beta = \sup A$. Аналогично доказывается, что ограниченное снизу непустое числовое множество имеет нижнюю грань.

Замечание 7. Если числовое множество X неограничено сверху, то точная верхняя грань в смысле определения 19 не существует. В этом случае по определению полагают

$$\sup X = +\infty.$$

При этом условия 1 и 2 перефразированного определения 19 оказываются формально выполненными.

Если $X \subset \mathbb{R}$ неограничено снизу, то полагают

$$\inf X = -\infty.$$

Благодаря этому соглашению и доказанной теореме, любое числовое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань, причём конечную, если оно ограничено сверху (снизу), и бесконечную, если оно неограничено сверху (снизу).

Замечание 8. Если X – множество вещественных чисел и для некоторого числа a и любого числа $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant a$ ($x \geqslant a$), то $\sup X \leqslant a$ ($\inf X \geqslant a$), т.к. $\sup X$ ($\inf X$) является наименьшим (наибольшим) из всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) множество X. Это означает, что в неравенствах можно переходить к точным верхним и к точным нижним граням.

1.8 Теорема о последовательности стягивающихся отрезков

Значение аксиомы непрерывности множества вещественных чисел таково, что без неё невозможно строгое построение математического анализа. В этом подразделе рассмотрим следствие из этой аксиомы, представляющее собой важнейшую теорему математического анализа – теорему о последовательности стягивающихся отрезков. Прежде чем мы получим теорему о стягивающихся отрезках, докажем лемму о вложенных отрезках.

Определение 20. *Системой вложенных отрезков* называется множество M, элементами которого являются отрезки, причём для любых Δ_1, $\Delta_2 \in M$ выполнено одно из условий: $\Delta_1 \subset \Delta_2$ или $\Delta_2 \subset \Delta_1$, т.е. все точки одного отрезка принадлежат другому отрезку.

Лемма 3 ((о системе вложенных отрезков)). Пусть M – система вложенных отрезков. Тогда существует число x такое, что для любого отрезка $\Delta \in M$ имеем $x \in \Delta$. Это значит, что все отрезки Δ из множества M имеют общую точку x.

Доказательство. Пусть A – множество левых концов отрезков, принадлежащих M, B — множество их правых концов. Тогда для всех $a \in A$ и для всех $b \in B$ имеем $a \le b$. Действительно, пусть a – левый конец отрезка $[a, b'] \in M$, а b – правый конец другого отрезка $[a', b] \in M$.

Возможны два случая:

1) $[a', b] \subset [a, b']$;

2) $[a', b] \subset [a, b']$.

В случае 1) имеем: $a \le a' < b \le b'$, а в случае 2) имеем: $a' \le a < b' \le b$. Тогда в силу аксиомы полноты множества вещественных чисел существует число x такое, что для любого отрезка $[a, b] \in M$ справедливо неравенство $a \le x \le b$. Доказательство закончено.

Определение 21. Система M вложенных отрезков называется *последовательностью вложенных отрезков*, если все эти отрезки занумерованы, причём любой отрезок с большим номером содержится в любом отрезке с меньшим номером.

Определение 22. Последовательность вложенных отрезков называется *стягивающейся*, если среди отрезков, в неё входящих, имеются отрезки сколь угодно малой длины. Другими словами, каково бы ни было положительное число ε в последовательности стягивающихся отрезков содержится отрезок, длина которого меньше ε.

Теорема 5. Все отрезки последовательности стягивающихся отрезков содержат общую точку и притом только одну.

Доказательство. Первая часть утверждения доказываемой теоремы следует из леммы 3 о системе вложенных отрезков. Докажем вторую часть. Если бы все отрезки содержали одновременно две различные точки a и b (где $a<b$), то тогда длина каждого отрезка из M была бы больше, чем $(b-a)>0$, но это не так, поскольку по определению в M есть отрезки и меньшей длины. Теорема доказана.

2 Раздел 2. Предел последовательности

Теория пределов и сходимости является базовой для математического анализа. Мы начнём с изучения последовательностей вещественных чисел и их пределов.

2.1 Определение последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Предел последовательности

Определение 23. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n, то говорят, что определена *числовая последовательность* (или просто *последовательность*) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$. Кратко её обозначают символом $\{x_n\}$. Число x_n называется *элементом* (*членом*) последовательности, а n – *номером* элемента.

Примеры последовательностей:

1. $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
2. $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$;
3. $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots\right\}$.

Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$ называются соответственно *суммой*, *разностью*, *произведением* и *частным* последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Для частного $y_n \neq 0$, для любого $n \in \mathbb{N}$, однако, если у последовательности $\{y_n\}$ обращается в нуль лишь конечное число элементов, то частное $\{x_n/y_n\}$ можно определить с того номера, начиная с которого все элементы y_n отличны от нуля.

Определение 24. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует число M такое, что для любого номера n выполняется неравенство $x_n \leq M$ (соответственно неравенство $x_n \geq M$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует число $M > 0$ такое, что для любого номера n выполняется неравенство $|x_n| \leq M$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого числа $M > 0$ существует номер n такой, что $|x_n| > M$.

С геометрической точки зрения ограниченность последовательности означает, что все члены последовательности находятся в некоторой окрестности (M-окрестности) точки $x = 0$.

Пример 12. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ограничена.

Доказательство. Следуя определению 24, мы должны подобрать такое число $M > 0$, чтобы для любого номера n выполнялось неравенство $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq M$. Очевидно, что для любого $n \in \mathbb{N}$

выполнено $\frac{1}{n} \leq 1$. Следовательно, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ограничена $M=1$. Доказательство закончено.

Пример 13. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \left\{2^{(-1)^n n}\right\}$ не ограничена.

Доказательство. В силу определения 24 неограниченной последовательности нужно показать, что для любого $M>0$ найдётся номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $|x_n|>M$. Рассмотрим произвольное $M>0$ и возьмём чётное число $n=2k$, $k \in \mathbb{N}$, тогда будем иметь

$$|x_n| = |2^{(-1)^n n}| = 2^{(-1)^{2k} 2k} = 2^{2k} = 2^n.$$

Поэтому, для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была неограниченной, нужно чтобы

$$|x_n| = 2^n > M. \tag{17}$$

Заметим, что $M=2^{\log_2 M}$. Поэтому для выполнения неравенства (17) необходимо, чтобы $n> \log_2 M$. Таким образом, мы подобрали такое число $n> \log_2 M$ и чётное, при котором $|x_n|>M$ для любого $M>0$, т.е. доказали, что данная последовательность не ограничена.

Определение 25. Число x называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такой номер $N=N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство $|x_n - x|<\varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

С помощью логических символов определение 25 можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n > N : |x_n - x| < \varepsilon.$$

С геометрической точки зрения определение 25 означает, что в любой ε-окрестности точки x находятся все члены последовательности, начиная с некоторого номера (зависящего, вообще говоря, от ε), или, что то же самое, вне любой окрестности точки x находится лишь конечное число членов последовательности.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая конечного предела, — *расходящейся*.

Сформулируем определение расходящейся последовательности.

Определение 26. Последовательность $\{x_n\}$ называется *расходящейся*, если для любого числа a существует такое $\varepsilon>0$, что для всякого натурального N существует такое натуральное $n(N)=n > N$, что $|x_n-a|\geq\varepsilon$.

В логических символах определение 26 имеет вид:
$\{x_n\}$ расходится $\Leftrightarrow \forall a\ \exists\ \varepsilon>0\ \forall\ N\in\mathbb{N}\ \exists\ n(N)=n>N\colon\ |x_n-a|\geq\varepsilon$.

Докажем теорему о том, что если последовательность сходится, то она имеет единственный предел.

Теорема 6. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Доказательство. Предположим противное, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=y$ и $x\neq y$. Пусть $\varepsilon = |y - x|/3>0$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, то существует такой номер $N_1=N_1(\varepsilon)$, что при $n>N_1$ выполняется неравенство $|x_n-x|<\varepsilon$.

Аналогично, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=y$, то существует такой номер $N_2=N_2(\varepsilon)$, что при $n>N_2$ выполняется неравенство $|x_n-y|<\varepsilon$.

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда, если $n > N$, то два неравенства $|x_n - x| < \varepsilon$ и $|x_n - y| < \varepsilon$ выполняются одновременно. Применяя неравенство треугольника (16)

$$|y - x| \le |x_n - y| + |x_n - x| < \frac{2}{3}|y - x|,$$

получаем противоречие, а следовательно, $x = y$. Доказательство закончено.

Пример 14. Пользуясь определением 25 предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n} = 2$.

Доказательство. Следуя определению 25, для произвольного ε укажем число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{2n+5}{n} - 2\right| < \varepsilon. \tag{18}$$

Неравенство (18) запишем в виде

$$\left|\frac{2n+5}{n} - 2\right| = \left|\frac{2n+5-2n}{n}\right| = \frac{5}{n} < \varepsilon. \tag{19}$$

Выразив из (19) n, получим $n > \frac{5}{\varepsilon}$.

Следовательно, если $N = N(\varepsilon) > \frac{5}{\varepsilon}$, например, $N = \left[\frac{5}{\varepsilon}\right] + 1$, то при $n > N = \left[\frac{5}{\varepsilon}\right] + 1$ неравенство $\left|\frac{2n+5}{n} - 2\right| < \varepsilon$ выполняется для любого ε, а это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{n} = 2.$$

Доказательство закончено.

Отметим, что пример 14 показывает, как следует доказывать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, пользуясь определением предела последовательности. Для этого нужно составить выражение $|x_n - x|$ и подобрать (если это целесообразно) последовательность $\{y_n\}$ такую, что, во-первых, для любого n выполняется неравенство $|x_n - x| \leq y_n$, и, во-вторых, доказать неравенство $y_n < \varepsilon$ при произвольном ε.

Пусть решение неравенства $y_n < \varepsilon$ имеет вид $n > f(\varepsilon)$, где $f(\varepsilon) > 0$. Тогда в качестве $N = N(\varepsilon)$ можно взять $[f(\varepsilon)] + 1$. Таким образом, для любых $n > N = [f(\varepsilon)] + 1$ будет выполнено неравенство $|x_n - x| < \varepsilon$, а это и означает по определению предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Докажем теорему об ограниченности сходящейся последовательности.

Теорема 7. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – сходящаяся последовательность и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Положим $\varepsilon = 1$, тогда найдётся такой номер $N = N(1)$, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - x| < 1.$$

Из неравенства треугольника (16) получаем

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|.$$

Введём обозначение

$$M = \max\{1 + |x|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}.$$

Тогда имеем $|x_n| \leq M$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что и означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$. Доказательство закончено.

Из теоремы 7 следует, что неограниченная последовательность расходится. Так последовательность из примера 13 вида $\left\{2^{(-1)^n n}\right\}$ является расходящейся. Однако, не всякая ограниченная последовательность является сходящейся. Проиллюстрируем это следующим примером.

Пример 15. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$ расходится.

Доказательство. Следуя определению 26, нужно доказать, что для любого числа a существует число $\varepsilon>0$ такое, что для любого натурального N найдётся $n=n(N) > N$, такое, что $\left|\sin\frac{\pi n}{2} - a\right| \geq \varepsilon$. Выпишем несколько элементов заданной последовательности:

$$n = 1, \qquad x_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$n = 2, \qquad x_2 = \sin\pi = 0;$$

$$n = 3, \qquad x_3 = \sin\frac{3\pi}{2} = -1;$$

$$n = 4, \qquad x_4 = \sin 2\pi = 0.$$

Очевидно, что

$$x_{2k}= \sin\pi k=0, \quad x_{4k-3}= \sin\frac{\pi(4k-3)}{2}=1,$$

$$x_{4k-1}= \sin\frac{\pi(4k-1)}{2}=-1, \quad k = 1,2,3,\ldots,$$

а это означает, что расстояние между двумя соседними членами последовательности равно единице. Докажем это. Из двух соседних членов один имеет чётный номер $2k$, а другой — нечётный. Рассмотрим расстояние между ними

$$|x_n-x_{n+1}| = |x_{2k}-x_{2k-1}| = |0-x_{2k-1}| = |x_{2k-1}| = 1, \ k = 1,2,3,\ldots,$$

поскольку x_{2k-1} равно либо 1, либо -1, и в любом случае $|x_{2k-1}|=1$.

Для произвольного числа a выберем окрестность длины меньшей, чем расстояние между двумя соседними элементами последовательности, т.е. меньше 1, например, длины $1/2$. Эта окрестность является интервалом $(a-1/4, a+1/4)$. Любые два соседних члена x_n и x_{n+1} вместе не могут находится в этой окрестности, так как расстояние между ними равно 1. Хотя бы один элемент последовательности будет лежать вне окрестности, а это означает, что расстояние между числом a и элементом, лежащим вне окрестности $(a-1/4, a+1/4)$, больше, чем $1/4$: $|x_n - a|>1/4$.

Таким образом, для любого числа a существует $\varepsilon=1/4$ такое, что для любого натурального N найдется n, равное либо N, либо $N+1$ (номеру одного из двух соседних элементов) такое, что $|x_n - a|>1/4=\varepsilon$. Это и означает, что последовательность $\left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$ расходится.

2.2 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

В этом подразделе мы рассмотрим последовательности, члены которых становятся сколь угодно близкими к нулю при достаточно больших их номерах, а также последовательности, модули членов которых растут неограниченно, когда их номера становятся достаточно большими.

Определение 27. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если её предел равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

или

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \;\; \forall n > N : \quad |x_n| < \varepsilon.$$

Другими словами, последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если для всякого $\varepsilon > 0$ множество членов последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющих неравенству $|x_n|\geq\varepsilon$, конечно.

Утверждение 5. Всякая бесконечно малая последовательность ограничена, так как является сходящейся (см. теорему 7).

Пример 16. Длины отрезков из последовательности стягивающихся отрезков образуют бесконечно малую последовательность (см. определение 22).

Пример 17. Доказать, что $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ — бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Чтобы это доказать, нужно для всякого $\varepsilon>0$ найти хотя бы одно натуральное число $N=N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n>N$ выполнялось $|x_n|<\varepsilon$. В качестве такого $N=N(\varepsilon)$ возьмём число $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Тогда для каждого n с условием

$$n > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

имеем $\frac{1}{n}<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Если нужно доказать, что $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то, по существу, нужно найти хотя бы одно $N(\varepsilon)$ с нужными свойствами, т.е. такое, что если $n>N(\varepsilon)$, то выполняется неравенство $|x_n|<\varepsilon$, или хотя бы каким-либо образом доказать его существование.

Определение 28. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого $E>0$ найдется число $N=N(E)$ такое, что для всякого номера $n>N$ выполняется неравенство $|x_n|>E$:

$$\forall E > 0 \ \exists\, N \ \ \forall n > N : \ \ |x_n| > E.$$

С геометрической точки зрения это означает, что в любой (сколь угодно большой) окрестности нуля находится лишь конечное число членов последовательности, а вне её – бесконечно много членов.

Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$. Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены бесконечно большой последовательности положительны, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, а если отрицательны, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$. Отметим, что бесконечно большая последовательность не является сходящейся и символическая запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\pm\infty$ означает только то, что последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, но не означает, что она имеет предел.

Таким образом, бесконечность без знака “∞” – это предел, к которому стремится любая бесконечно большая последовательность. Бесконечно удаленная точка “$+\infty$” – это предел, к которому стремится любая бесконечно большая последовательность с положительными членами. Бесконечно удаленная точка “$-\infty$” – это предел, к которому стремится любая бесконечно большая последовательность с отрицательными членами.

Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной, поскольку вне любой окрестности нуля имеется член последовательности (даже все члены, начиная с некоторого номера), больший некоторого числа M. Обратное неверно: неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой.

Пример 18. Доказать, что последовательность $\{n^{(-1)^n}\}$ неограничена, однако не является бесконечно большой.

Доказательство. Для общего члена последовательности

$x_n = n^{(-1)^n}$ имеем

$$x_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2k-1}, & \text{если } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}; \\ 2k, & \text{если } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Последовательность неограничена, так как для любого числа M найдется номер $n=2k$ такой, что $x_n=2k>M$, но не является бесконечно большой, так как для любого $E>1$ неравенство $|x_n|>E$ не имеет места для элементов x_n со сколь угодно большими нечётными номерами $n=2k-1$.

Рассмотрим теперь свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

Теорема 8. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность и $x_n \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность, и наоборот, если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $x_n \neq 0$, то $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно большая последовательность.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением только прямого утверждения. В этом случае при любом $\varepsilon>0$ неравенство $\left|\frac{1}{x_n}\right| \geq \varepsilon$ равносильно неравенству $|x_n| \leq c = \frac{1}{\varepsilon}$, которому, в свою очередь, удовлетворяет лишь конечное множество членов, поскольку $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность. Это значит, что $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность. Доказательство закончено.

Теорема 9.

1. Если $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то $\{|x_n|\}$ – бесконечно малая последовательность, и наоборот.

2. Сумма (разность) двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из определения бесконечно малой последовательности. Докажем второе утверждение.

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существуют номера $N_1=N_1(\varepsilon)$ и $N_2=N_2(\varepsilon)$ такие, что

$$\forall n > N_1 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_2 \Rightarrow |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, полагая $N = \max\{N_1, N_2\}$, будем иметь

$$\forall\, n > N \Rightarrow |x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\{x_n \pm y_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Теорема доказана.

Следствие 1. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 10. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность, а последовательность $\{y_n\}$ ограничена. Тогда при некотором $c>0$ имеем $|y_n|<c$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Далее, так как $\{x_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то для всякого $\varepsilon>0$ найдётся номер $N=N(\varepsilon)$ с условием, что $|x_n|<\frac{\varepsilon}{c}$ для всех $n>N$. Поэтому будем иметь

$$\forall\, n > N \Rightarrow |x_n \cdot y_n| \leq |x_n| \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon.$$

Другими словами, $\{x_n y_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Доказательство закончено.

Следствие 2. Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Согласно утверждению 5 одну из двух бесконечно малых последовательностей мы можем рассматривать как ограниченную последовательность. Тогда их произведение будет бесконечно малой последовательностью в силу теоремы 10. Следствие доказано.

Следствие 3. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 11. Если $\{x_n\}$ – постоянная и бесконечно малая последовательность, то $x_n=0$.

Доказательство. Если $x_n=c\neq 0$, то в $\frac{|c|}{2}$-окрестности нуля нет ни одной точки нашей последовательности, и это значит, что $\{x_n\}$ не является бесконечно малой последовательностью.

Пример 19. Доказать, что последовательность $\{q^n\}$ является

а) бесконечно малой при $|q|<1$;

б) бесконечно большой при $|q|>1$.

Доказательство.

а) Пусть $|q|<1$. Если $q=0$, то $q^n=0$ для любого n и, следовательно, $\{q^n\}$ – бесконечно малая. Рассмотрим $|q^n|=|q|^n$. Если $|q|<1$ и $q\neq 0$, то найдётся такое $h>0$, что $|q|=\frac{1}{1+h}$. В силу неравенства (6) имеем

$$(1+h)^n > 1+nh, \quad n \geq 2.$$

Тогда

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh} < \varepsilon, \quad n \geq 2.$$

Последнее неравенство справедливо для любого $\varepsilon > 0$, как только $n > \frac{1}{h\varepsilon}$. Т.е. нам нужно выбрать, например, $N = N(\varepsilon) = \max\left\{\left[\frac{1}{h\varepsilon}\right] + 1, 2\right\}$. Следовательно, $\{q^n\}$ – бесконечно малая последовательность.

б) Пусть $|q| > 1$. Докажем, что последовательность $\{q^n\}$ удовлетворяет определению бесконечно большой, т.е. для любого $E > 0$ найдётся N такое, что как только $n > N$ выполняется неравенство

$$|q^n| = |q|^n > E. \tag{20}$$

Зададим произвольное $E > 0$. Для отыскания номера N решим неравенство (20) относительно n. Получим

$$n > \log_{|q|} E. \tag{21}$$

Положим $N = [\log_{|q|} E] + 1$. Тогда для любого $n > N$ выполняется неравенство (21), а значит, и (20). Что и требовалось доказать.

Из примера 19 следует, что для последовательности $\{s_n\}$ сумм членов строго убывающей геометрической прогрессии

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}$$

при $|q| < 1$ можно найти $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Действительно, имеем

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1},$$

$$qs_n = aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Тогда, вычитая qs_n из s_n, получим

$$s_n - qs_n = a - aq^n,$$

следовательно,

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Так как при $|q|<1$ $\{q^n\}$ – бесконечно малая последовательность, то

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Пример 20. Доказать, что $\{nq^n\}$ – бесконечно малая последовательность при $0<q<1$.

Доказательство. При $0<q<1$ можно записать $q=\frac{1}{1+h}$, где $h>0$. Из формулы бинома Ньютона (4) получим

$$(1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2 \quad \text{при} \quad n \geq 2.$$

Тогда

$$nq^n = \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{2}{(n-1)h^2} < \varepsilon, \quad \text{откуда} \qquad n > \frac{2}{\varepsilon h^2} + 1.$$

Положим $N=N(\varepsilon)=\left[\frac{2}{\varepsilon h^2}\right]+2$. Тогда для всех $n>N$ будем иметь

$$|nq^n| = nq^n < \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

2.3 Свойства пределов последовательности. Нахождение предела последовательности

В предыдущем подразделе мы подробно рассмотрели бесконечно малые последовательности и их свойства. Здесь мы изучим свойства сходящихся последовательностей. Доказательства будут основаны на следующем наблюдении. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число $x\in\mathbb{R}$, то последовательность $\{\alpha_n\}=\{x_n - x\}$ является бесконечно малой, и наоборот, если последовательность $\{x_n-x\}$ – бесконечно малая, то число x является пределом $\{x_n\}$.

Теорема 12. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $x_n \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, то существует число $N \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > N$ имеем $|x_n| > \frac{|x|}{2}$, или, что то же самое, $\frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|x|}$.

Это означает, что последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, составленная из обратных величин, ограничена.

Доказательство. В силу условия теоремы последовательность $\{\alpha_n\} = \{x_n - x\}$ – бесконечно малая. Тогда вне $\frac{|x|}{2}$-окрестности нуля лежит только конечное число членов последовательности $\{\alpha_n\}$. Пусть N – самое большое значение номера таких членов, тогда при всех $n > N$ имеем $|\alpha_n| < \frac{|x|}{2}$. Отсюда, так как $x = x_n - \alpha_n$, при этих $n > N$ получим

$$|x| = |x_n - \alpha_n| \leq |x_n| + |-\alpha_n| = |x_n| + |\alpha_n|.$$

Следовательно,

$$|x_n| \geq |x| - |\alpha_n| > |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 13. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $x, y \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y.$$

Другими словами, для сходящихся последовательностей предел их суммы равен сумме их пределов.

Доказательство. Из условия теоремы $\alpha_n = x_n - x$, $\beta_n = y_n - y$ – бесконечно малые последовательности. Следовательно, для $z_n = x_n \pm y_n$ получим

$$z_n - (x \pm y) = (x_n \pm y_n) - (x \pm y) = \alpha_n \pm \beta_n = \gamma_n$$

– бесконечно малая последовательность и

$$\lim_{n\to\infty} z_n = x \pm y,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 9. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}{+}\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n{=}{+}\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n)$ называют *неопределенностью вида* $\{\infty{-}\infty\}$ и для таких пределов теорема 14 неприменима. Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}{+}\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n{=}{-}\infty$.

Теорема 14. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n{=}y$, $x, y{\in}\mathbb{R}$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy.$$

Другими словами, предел произведения последовательностей равен произведению их пределов.

Доказательство. Имеем $x_n{=}x{+}\alpha_n$, $y_n{=}y{+}\beta_n$, где α_n и β_n – бесконечно малые последовательности. Тогда для $z_n{=}x_n y_n$ получим

$$z_n = x_n y_n = (x + \alpha_n)(y + \beta_n) = xy + y\alpha_n + x\beta_n + \alpha_n\beta_n = xy + \gamma_n.$$

Но $\gamma_n{=}y\alpha_n{+}x\beta_n{+}\alpha_n\beta_n$ – бесконечно малая последовательность, так как она является суммой трёх последовательностей, каждая из которых – бесконечно малая последовательность. Отсюда имеем

$$\lim_{n\to\infty} z_n = xy.$$

Доказательство закончено.

Замечание 10. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n{=}\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$ называют *неопределенностью вида* $\{0 \cdot \infty\}$ и для таких пределов теорема 14 неприменима.

Теорема 15. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n{=}y$, $x, y{\in}\mathbb{R}$ и $y{\neq}0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{x}{y},$$

т.е., если предел знаменателя не равен нулю, то предел частного равен частному пределов.

Доказательство. Пусть $z_n{=}\frac{x_n}{y_n}$, $\alpha_n{=}x_n-x$, $\beta_n{=}y_n-y$. Последовательности α_n и β_n – бесконечно малые. Рассмотрим последовательность

$$\gamma_n=z_n-\frac{x}{y}=\frac{x_n}{y_n}-\frac{x}{y}=\frac{yx_n-xy_n}{yy_n}.$$

Нам достаточно доказать, что γ_n является бесконечно малой последовательностью. Для этого запишем γ_n в виде

$$\gamma_n=\frac{y(x+\alpha_n)-x(y+\beta_n)}{yy_n}=\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n-\frac{x}{y}\beta_n\right).$$

Теперь заметим, что последовательность $\left\{\alpha_n-\frac{x}{y}\beta_n\right\}$ является бесконечно малой в силу теорем 10 и 9, а последовательность $\frac{1}{y_n}$ ограничена в силу теоремы 12. Но тогда по теореме 10 последовательность γ_n является бесконечно малой. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\frac{x}{y},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 11. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}\lim\limits_{n\to\infty} y_n{=}0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ называют *неопределенностью вида* $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Аналогично определяется неопределенность вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Для таких пределов теорема 15 неприменима.

Отметим, что возможны действия и с бесконечно большими последовательностями, бесконечно малыми последовательностями и числами. Так, если $a>0$ – вещественное число, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} a \cdot x_n = a \cdot (+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} (-a) \cdot x_n = -a \cdot (+\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

Аналогично,

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \qquad (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) - (+\infty) = -\infty, \qquad \infty \cdot \infty = \infty,$$

$$\infty \cdot (+\infty) = \infty, \qquad \infty \cdot (-\infty) = \infty,$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \qquad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \qquad (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,$$

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{+\infty} = 0, \qquad \frac{1}{-\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty,$$

$$\pm a + \infty = \infty, \qquad \pm a - \infty = \infty,$$

$$\pm a + (+\infty) = +\infty, \qquad \pm a - (+\infty) = -\infty,$$

$$\pm a + (-\infty) = -\infty, \qquad \pm a - (-\infty) = +\infty,$$

$$\pm a \cdot \infty = \infty, \qquad a \cdot (-\infty) = -\infty,$$

$$-a \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$\infty^{\infty} = \infty, \qquad (+\infty)^{a} = +\infty, \qquad (+\infty)^{-a} = 0.$$

Неопределённые операции

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \infty - \infty, \qquad 0^0, \qquad 1^{\infty}, \qquad \infty^0$$

будут рассмотрены в подразделе 2.6.

2.4 Предельный переход в неравенствах

В этом подразделе мы рассмотрим переход к пределу в неравенствах и обсудим мощный инструмент для вычисления пределов, называемый “теоремой о двух полицейских”.

Теорема 16. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}x$. Тогда, если для всякого n имеет место неравенство $x_n{>}c$ (или $x_n{\geq}c$), то $x{\geq}c$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}x$. Тогда, если для всякого n имеет место неравенство $x_n{<}c$ (или $x_n{\leq}c$), то $x{\leq}c$.

Доказательство. 1) Из условия имеем, что $\{\alpha_n\}{=}\{x_n - x\}$ – бесконечно малая последовательность, причём

$$\alpha_n = x_n - x > c - x.$$

Если допустить, что $c - x{>}0$, то тогда при $\varepsilon{=}\frac{c-x}{2}$ получим, что ε-окрестность нуля вообще не содержит ни одной точки последовательности $\{\alpha_n\}$. Это противоречит тому, что $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Значит, $c - x{\leq}0$, откуда следует $x{\geq}c$, что и требовалось доказать.

2) Если $y_n{=}{-}x_n$, то $y_n{\to}{-}x$ при $n{\to}\infty$, $y_n{>}{-}c$ (или $y_n{\geq}{-}c$). Тогда из утверждения 1) имеем, что $-x{\geq}{-}c$, т.е. $x{\leq}c$, что и требовалось доказать.

Теорема 17. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n{=}y$. Тогда

1. для $x_n{<}y_n$ имеем $x{\leq}y$;
2. для $x_n{\leq}y_n$ имеем $x{\leq}y$.

Доказательство. Рассмотрим следующую последовательность $\{z_n\}{=}\{y_n - x_n\}$. По условию $z_n{>}0$ (или $z_n{\geq}0$) при всех $n{\in}\mathbb{N}$ и $z_n{\to}\gamma{=}y - x$ при $n{\to}\infty$. Согласно теореме 16 в обоих случаях имеем $\gamma{\geq}0$, т.е. $x{\leq}y$, что и требовалось доказать.

Приведём пример, где $x_n<y_n$, но пределы равны: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Пример 21. Рассмотрим последовательности $x_n=\frac{1}{n^2+2}$ и $y_n=\frac{1}{2n}$. Имеем $x_n=\frac{1}{n^2+2}<\frac{1}{2n}=y_n$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Действительно,

$$\frac{1}{n^2+2}<\frac{1}{2n} \Leftrightarrow 2n<n^2+2 \Leftrightarrow 0<n^2-2n+2=(n-1)^2+1.$$

Для пределов этих последовательностей получим

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+2} = 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 18. Если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность и при всех натуральных n $|\beta_n|\le\alpha_n$, то $\{\beta_n\}$ – тоже бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Из условия следует, что любая ε-окрестность нуля вместе с точкой α_n содержит и точку β_n, так что вне этой ε-окрестности могут находиться β_n только с такими номерами, для которых $|\alpha_n|\ge\varepsilon$. Но так как $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то их число конечно, и поэтому $\{\beta_n\}$ – тоже бесконечно малая последовательность. Доказательство закончено.

Теорема 19 (Теорема о двух полицейских). Пусть

$$x_n \le y_n \le z_n$$

для всех $n\in\mathbb{N}$ и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=x$. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ существует и равен

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x.$$

Доказательство. Из условия следует, что $0\le y_n-x_n\le z_n-x_n$. И справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}(z_n-x_n) = x-x = 0,$$

т.е. $\{z_n - x_n\}$ является бесконечно малой последовательностью. Но тогда по теореме 18 $\{y_n - x_n\}$ — тоже бесконечно малая последовательность: $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n)=0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}[(y_n - x_n) + x_n] = 0 + x = x,$$

что и требовалось доказать.

Пример 22. Доказать, что при $a>0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$.

Доказательство. При $a=1$ равенство очевидно. Пусть теперь $a>1$. Действительно, пусть $\sqrt[n]{a}=1+\gamma_n$, $\gamma_n>0$. Тогда, в силу неравенства (6), получим

$$a = (1 + \gamma_n)^n > 1 + n\gamma_n, \quad 0 < \gamma_n < \frac{a-1}{n}.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0,$$

то по теореме 19 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n=0$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$.

При $0<a<1$ достаточно рассмотреть $b=\frac{1}{a}>1$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}=1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

Пример 23. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(5^n + 4^n)^{1/n}=5$.

Доказательство. Поскольку $5^n < 5^n + 4^n$, то $5<(5^n+4^n)^{1/n}$. Так как $5^n+4^n<5^n+5^n=2 \cdot 5^n$, то $(5^n+4^n)^{1/n}<2^{1/n}5$. Получим

$$5 < (5^n + 4^n)^{1/n} < 2^{1/n}5.$$

Из того, что в силу примера 22 мы имеем

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1,$$

то по теореме 19 получим требуемое.

Пример 24. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\gamma}{a^n}=0$ при $\gamma>0$, $|a|>1$.

Доказательство. Из определения предела последовательности следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|=0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ (так как $x_n\le|x_n|$ для всех n). Поэтому достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\gamma}{|a|^n}=0$. Представим $\frac{n^\gamma}{|a|^n}$ в виде

$$\frac{n^\gamma}{|a|^n} = \left(\frac{n}{|a|^{n/\gamma}}\right)^\gamma .$$

Рассмотрим последовательность $y_n=\frac{n}{|a|^{n/\gamma}}$ и докажем, что она является бесконечно малой. Так как $\gamma>0$, $|a|>1$, то существует $\beta>0$ такое, что $|a|^{1/\gamma}=1+\beta$. Выражение $(1+\beta)^n$ можно оценить снизу выражением $\frac{n(n-1)}{2}\beta^2$ для всех $n\ge2$, используя формулу бинома Ньютона (4):

$$|a|^{n/\gamma} = \left(|a|^{1/\gamma}\right)^n = (1+\beta)^n > \frac{n(n-1)}{2}\beta^2, \quad n\ge 2.$$

Отсюда следует, что

$$y_n = \frac{n}{|a|^{n/\gamma}} < \frac{2}{\beta^2(n-1)}, \quad n\ge 2.$$

Положим $x_n=0$ для всех n и $z_n=\frac{2}{\beta^2(n-1)}$ для всех $n\ge2$. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ удовлетворяют условиям теоремы 19, поскольку $x_n\le y_n\le z_n$ и, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{|a|^{n/\gamma}} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Вспомним, что нам нужно доказать, что $\left\{\frac{n^\gamma}{|a|^n}\right\}$ является бесконечно малой последовательностью. Имеем $\frac{n^\gamma}{|a|^n}=(y_n)^\gamma$. Нетрудно показать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n)^\gamma=0$ при $\gamma>0$.

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$, то найдётся $N=N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n>N$ справедливо неравенство $|y_n|<\varepsilon^{1/\gamma}$. Тогда при всех $n>N$ справедливо неравенство $|(y_n)^\gamma|=|y_n|^\gamma<(\varepsilon^{1/\gamma})^\gamma=\varepsilon$, следовательно, доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n)^\gamma=0$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\gamma}{|a|^n}=0$. Доказательство закончено.

2.5 Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число e

Как мы выяснили, не все ограниченные последовательности сходятся, но если ограниченная последовательность является ещё и монотонной (т.е. либо не возрастающей, либо не убывающей), то она сходится. Тот факт, что любая ограниченная монотонная последовательность сходится, называется теоремой о монотонной сходимости или теоремой Вейерштрасса.

Точная верхняя (нижняя) грань множества значений элементов последовательности $\{x_n\}$ называется *точной верхней* (*точной нижней*) *гранью* данной последовательности и обозначается $\sup\{x_n\}$ (соответственно, $\inf\{x_n\}$).

Например, $\sup\left\{\frac{1}{n}\right\}=1$, $\inf\left\{\frac{1}{n}\right\}=0$; $\sup\{n\}=+\infty$, $\inf\{n\}=1$; $n\in\mathbb{N}$.

Определение 29. Последовательность называется

не возрастающей, если $x_{n+1}\leq x_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$ (обозначение: $x_n\searrow$);

не убывающей, если $x_{n+1}\geq x_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$ (обозначение: $x_n\nearrow$);

(строго) убывающей, если $x_{n+1}<x_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$ (обозначение: $x_n\downarrow$);

(строго) возрастающей, если $x_{n+1}>x_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$ (обозначение: $x_n\uparrow$).

Не возрастающие и не убывающие последовательности называются *монотонными*.

Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

Например, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ строго убывает, последовательность $\{n\}$ строго возрастает, а последовательность $\{\cos(\pi n)\}$ не является монотонной.

Теорема 20 (Вейерштрасса). Пусть $\{x_n\}$ – не убывающая и ограниченная сверху последовательность. Тогда $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$.

Доказательство. Так как $\{x_n\}$ ограничена сверху, то существует конечный $\sup\{x_n\}$. Пусть $\sup\{x_n\}=x$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$.

Другими словами, требуется доказать, что $\{\alpha_n\}=\{x_n - x\}$ – бесконечно малая последовательность, т.е., что для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что при для всех $n>N$ выполняется $|\alpha_n|<\varepsilon$.

То, что $\sup\{\alpha_n\} = \sup\{x_n\} - x=0$, означает:

1) $\alpha_n\leq 0$ для любого $n\in\mathbb{N}$;

2) для любого $\varepsilon>0$ найдётся число $k\in\mathbb{N}$ такое, что $\alpha_k>0-\varepsilon$, т.е. $-\varepsilon<\alpha_k \leq 0$.

Поскольку $\{x_n\}$ не убывает, при всех $n>k$ имеем

$$-\varepsilon < \alpha_k \leq \alpha_n \leq 0, \quad |\alpha_n| \leq |\alpha_k| < \varepsilon.$$

Таким образом, в качестве $N=N(\varepsilon)$ можно взять указанное выше число k и $|\alpha_n|<\varepsilon$ будет выполняться при всех $n>N$, что и означает, что $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. Доказательство закончено.

Теорема 21. Не возрастающая, ограниченная снизу последовательность имеет предел, равный $\inf\{x_n\}$.

Доказательство. Вместо $\{x_n\}$ рассмотрим последовательность $\{y_n\}$, $y_n{=}-x_n$. Тогда $\inf\{x_n\}{=}-\sup\{y_n\}$ и теорема 21 следует из теоремы 20.

Применим теорему 20 на практике.

Пример 25. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$

Доказательство. Обозначим $x_n{=}\frac{n}{2^n}$. Заметим, что

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < 1,$$

т.е. $x_{n+1}{<}x_n$ при $n{>}1$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ не возрастает при $n{\geq}2$ и, поскольку она ограничена снизу нулём, то имеет предел.

Из соотношения $\frac{x_{n+1}}{x_n}{=}\frac{n+1}{2n}$ следует $x_{n+1}{=}\frac{n+1}{2n}x_n$. Обозначим $x{=}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и перейдём к пределу в равенстве $x_{n+1}{=}\frac{n+1}{2n}x_n$, получим

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} x_n.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}{=}\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}x$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}{=}\frac{1}{2}$, то $x{=}\frac{1}{2}x$, а это возможно только тогда, когда $x{=}0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n{=}\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}{=}0$.

Пример 26. Доказать сходимость последовательности $\{x_n\}$, если $x_1{=}\sqrt{a}$, $x_2{=}\sqrt{a+\sqrt{a}}$, . . ., $x_n{=}\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n}$, $a{>}0$.

Доказательство. Для доказательства сходимости последовательности $\{x_n\}$ воспользуемся теоремой 20. Последовательность $\{x_n\}$ при $a{>}0$, очевидно, является не убывающей

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n} < \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}}_{n+1} = x_{n+1}.$$

Поскольку для всех $a>0$ справедливо неравенство (13):

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n} \leq \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

то последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной сверху. Таким образом, $\{x_n\}$ – не убывающая ограниченная сверху последовательность, и она является сходящейся по теореме 20.

Теорема 20 позволяет доказать сходимость важнейшей последовательности математического анализа вида $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$.

Теорема 22. Последовательность $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ имеет предел.

Доказательство. Покажем, что $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ монотонна. Имеем

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

и

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n}=\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Применив неравенство Бернулли (6) к $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$, получим

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\geq\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$= \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n^2+n+1)(n+2)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

Следовательно, $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ или $x_{n+1} > x_n$ для всех n, что означает, что $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ строго возрастает.

Покажем, что последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ограничена сверху. Сначала заметим, что при $k \geq 1$

$$k! = k(k-1)\ldots 2 \cdot 1 \geq 2^{k-1}.$$

По формуле бинома Ньютона получим

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}C_n^1 + \frac{1}{n^2}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n^n}C_n^n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n^k}C_n^k = \sigma,$$

$$\sigma = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\ldots\frac{n-k+1}{n} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Но тогда $x_n < 3$. Поскольку $\{x_n\}$ возрастает и $\{x_n\}$ ограничена, то по теореме Вейерштрасса 20 последовательность $\{x_n\}$ сходится. Теорема доказана.

Следуя Эйлеру, предел последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ обозначают через e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (22)$$

Известно, что число e иррациональное и

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

Постоянную e называют *неперовым числом* или *числом Д. Непера* (1550–1617 гг.). Логарифм числа a по основанию e называется натуральным логарифмом числа a и обозначается символом $\ln a$.

Утверждение 6. Если $\{n_k\}$ – бесконечно большая последовательность:

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty,$$

то формула (22) обобщается:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{23}$$

Доказательство. В самом деле, пусть задано $\varepsilon>0$. Из $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ вытекает, что существует такое n_ε, что при $n\geq N$

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon, \tag{24}$$

а из условия $\lim\limits_{k\to\infty} n_k=+\infty$ следует, что существует такое K, что $n_k\geq N$ при $k\geq K$, поэтому в силу (24)

$$\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e\right| < \varepsilon$$

при $k\geq K$, что и означает выполнение равенства

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

Доказательство закончено.

Пределы (22) и (23) раскрывают неопределённость $\{1^\infty\}$.

В следующем утверждении мы докажем важное неравенство.

Утверждение 7. Покажем, что при любом $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < -\frac{1}{n}. \tag{25}$$

Доказательство. Действительно, неравенство (25) равносильно неравенствам

$$-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)>1,\qquad \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}>1,\qquad \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n}>1,$$

$$\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}>1,\qquad \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}>1,\qquad \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}>e.$$

Последнее неравенство верно, поскольку последовательность $\{y_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\right\}$ не возрастает и её предел равен e. Покажем, что $\{y_n\}$ не возрастает:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}=\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}=$$

$$=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}=$$

$$=\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Поскольку $\frac{1}{n^2-1}>0$ при $n>1$, можно воспользоваться неравенством Бернулли (6):

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{n}{n^2-1}.$$

Получим

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}>\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1}>1.$$

Это означает, что $\{y_n\}$ является не возрастающей.

Покажем, что предел $\{y_n\}$ равен e:

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Таким образом, доказано неравенство $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > e$, а следовательно, и (25).

Аналогично можно показать справедливость неравенства

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \tag{26}$$

2.6 Неопределённости пределов и их раскрытие

В математическом анализе при нахождении пределов может возникнуть выражение, которое не даёт достаточной информации для определения исходного предела. Такое выражение называется "неопределённостью".

В теории пределов рассматриваются семь видов неопределённостей:

$$\frac{0}{0},\qquad \frac{\infty}{\infty},\qquad 0\cdot\infty,\qquad \infty-\infty,\qquad 0^0,\qquad 1^\infty,\qquad \infty^0.$$

Все другие выражения, получающиеся при нахождении предела последовательности, неопределённостями не являются и принимают вполне конкретное конечное или бесконечное значение.

Если существуют преобразования дающего неопределённость выражения, такие, что искомый предел приводится к определённому конечному или бесконечному значению, то такие действия называют "раскрытием неопределенности".

Рассмотрим на примерах, как раскрываются неопределённости каждого вида при нахождении предела последовательности.

Неопределённость вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ возникает, когда мы имеем дело с частным $\frac{x_n}{y_n}$, и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$. Предел соотношения $\frac{x_n}{y_n}$ в этом случае может иметь разные значения или даже не существовать.

Пусть, например, $x_n=\frac{1}{n^2}$, $y_n=\frac{1}{n}$. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Пусть теперь $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n^2}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

Если же $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $y_n=\frac{1}{n}$, то предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{\frac{1}{n}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$$

не существует.

Когда одновременно $x_n\to\pm\infty$ и $y_n\to\pm\infty$, то мы получаем неопределённость вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Пусть $x_n=n$, $y_n=n^2$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Теперь, если $x_n=n^2$, $y_n=n$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}n=\infty.$$

В случае, когда $x_n=an$, $y_n=n$, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{n}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}a=a.$$

Если $x_n\to 0$, а $y_n\to\pm\infty$, или наоборот, то произведение x_ny_n дает неопределённость вида $\{0\cdot\infty\}$. В этом случае, записав

$x_n y_n = \frac{x_n}{\frac{1}{y_n}}$ или $x_n y_n = \frac{y_n}{\frac{1}{x_n}}$, мы придём к одной из уже рассмотренных неопределённостей вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Неопределённость вида $\{\infty - \infty\}$ появляется при рассмотрении разности $\{x_n - y_n\}$ в случае, когда $x_n \to +\infty$ и $y_n \to +\infty$ или $x_n \to -\infty$ и $y_n \to -\infty$. Например, $\{x_n - y_n\}$ при $x_n = \sqrt{n+1}$ и $y_n = \sqrt{n}$ даёт

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \{\infty - \infty\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = 0.$$

Неопределённости вида $\{0^0\}$, $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$ логарифмированием сводятся к неопределённости $\{0 \cdot \infty\}$:

$$\ln(0^0) = 0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot \infty, \qquad \ln(1^\infty) = \ln(1) \cdot \infty = 0 \cdot \infty,$$

$$\ln(\infty^0) = 0 \cdot \ln(\infty) = 0 \cdot \infty.$$

Для раскрытия неопределённости $\{1^\infty\}$ используются пределы (22) и (23).

Итак, мы рассмотрели семь типов неопределённостей. Чтобы избавиться от неопределённости, часто бывает полезно произвести алгебраические манипуляции. Теперь давайте рассмотрим несколько примеров.

Пример 27. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Решение. Непосредственный переход к пределу даёт неопределённость вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Преобразуем выражение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 2,$$

поскольку $\frac{1}{n^2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 28. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+10n+2}{8n^3+2n+3}$.

Решение. Последовательности в числителе и знаменателе дроби являются бесконечно большими, следовательно, мы имеем дело с неопределённостью вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для раскрытия этой неопределённости и использования теоремы о пределе отношения двух последовательностей выделим в числителе и в знаменателе n в старшей для числителя и знаменателя степени в качестве сомножителя и сократим дробь:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+10n+2}{8n^3+2n+3} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{4}{n}+\frac{10}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(8+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n}+\frac{10}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{8+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}} = \frac{0}{8} = 0,$$

поскольку $\frac{4}{n}\to 0$, $\frac{10}{n^2}\to 0$, $\frac{2}{n^3}\to 0$, $\frac{2}{n^2}\to 0$ и $\frac{3}{n^3}\to 0$ при $n\to\infty$.

Замечание 12. Предел отношения двух многочленов переменной n можно находить по правилу

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{P}_k(n)}{\mathrm{P}_m(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0n^k+\ldots+a_k}{b_0n^m+\ldots+b_m} = \begin{cases} \infty & \textit{при} \quad k>m, \\ \frac{a_0}{b_0} & \textit{при} \quad k=m, \\ 0 & \textit{при} \quad k<m. \end{cases}$$

Пример 29. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[7]{n}+\sqrt[4]{9n^8+5}}{\left(n^2+\sqrt[3]{n}\right)\sqrt[3]{8n^6+n^5}}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{n\sqrt[7]{n}+\sqrt[4]{9n^8+5}}{\left(n^2+\sqrt[3]{n}\right)\sqrt[3]{8n^6+n^5}}$ на n^2 – старшую степень числителя и знаменателя. Получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[7]{n} + \sqrt[4]{9n^8+5}}{\left(n^2+\sqrt[3]{n}\right)\sqrt[3]{8n^6+n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{6/7}} + \sqrt[4]{9+\frac{5}{n^8}}}{\left(1+\frac{1}{n^{5/3}}\right)\sqrt[3]{8+\frac{1}{n}}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}=0$ при $\alpha>0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{6/7}} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{9+\frac{5}{n^8}} = \sqrt[4]{9},$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^{5/3}}\right)=1, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{8+\frac{1}{n}}=\sqrt[3]{8}=2$$

и по свойствам предела получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[7]{n} + \sqrt[4]{9n^8+5}}{\left(n^2+\sqrt[3]{n}\right)\sqrt[3]{8n^6+n^5}} = \frac{0+\sqrt[4]{9}}{1\cdot 2} = \frac{\sqrt[4]{9}}{2}.$$

Замечание 13. При вычислении пределов, содержащих иррациональные выражения, часто используют приём перевода иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот с помощью формул сокращённого умножения

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \tag{27}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right),$$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right),$$

$$n \geq 2$$

(первая и вторая из них получаются из третьей при n=2 и n=3, соответственно).

Так, например, если выражение содержит множитель $\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)}$, где $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n)=+\infty$ и их старшие степени и коэффициенты при них совпадают, или эта разность стремится к нулю, полезно умножить числитель и знаменатель исходной дроби на $\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)})$, т.е. на выражение, сопряжённое к $\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)}$.

Пример 30. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt{n^4-2}}{\sqrt{2n+n^4}}$.

Решение. Имеем неопределённость $\left\{\frac{\infty-\infty}{\infty}\right\}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое к числителю и воспользуемся формулой (27), получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt{n^4-2}}{\sqrt{2n+n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt{n^4-2})(\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-2})}{\sqrt{2n+n^4}(\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-2})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+3n^2-n^4+2}{\sqrt{2n+n^4}(\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-2})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{\sqrt{2n+n^4}(\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-2})}.$$

Разделим теперь числитель и знаменатель на n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt{n^4-2}}{\sqrt{2n+n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}}{\sqrt{\frac{2}{n^3}+1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1-\frac{2}{n^4}}\right)}.$$

Воспользуемся арифметическими свойствами предела и тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}=0$ при $\alpha > 0$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt{n^4-2}}{\sqrt{2n+n^4}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n^3}+1}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1-\frac{2}{n^4}}\right)} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Пример 31. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}\right)$.

Решение. Применив формулу (9), получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2} = 1.$$

Пример 32. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$.

Решение. Для раскрытия неопределённости $\{1^\infty\}$ нужно выделить $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ и применить формулу (23). Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \{1^\infty\} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{n-1}{n+1}-1\right)\right]^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{-2}{n+1}\right]^n =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right]^{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{n+1}n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+1}} = e^{-2}.$$

Пример 33. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+7n+1}{5n^2+3n+6}\right)^{n-3}$.

Решение. Найдем пределы основания и показателя степени выражения $\left(\frac{5n^2+7n+1}{5n^2+3n+6}\right)^{n-3}$, получим неопределённость вида $\{1^\infty\}$. Выделим в исходном выражении формулу $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$, $x_n\to\infty$, и вычислим предел, используя (23):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+7n+1}{5n^2+3n+6}\right)^{n-3} = \{1^\infty\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(5n^2+3n+6)+4n-5}{5n^2+3n+6} \right)^{n-3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{4n-5}{5n^2+3n+6} \right)^{n-3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{4n-5}{5n^2+3n+6} \right)^{\frac{5n^2+3n+6}{4n-5}\cdot\frac{4n-5}{5n^2+3n+6}\cdot(n-3)}.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{4n-5}{5n^2+3n+6} \right)^{\frac{5n^2+3n+6}{4n-5}} = e,$$

а

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-5}{5n^2+3n+6} \cdot (n-3) = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n-5)(n-3)}{5n^2+3n+6} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-17n+15}{5n^2+3n+6} = \frac{4}{5},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+7n+1}{5n^2+3n+6} \right)^{n-3} = e^{\frac{4}{5}}.$$

2.7 Теорема Больцано–Вейерштрасса о существовании частичного предела у ограниченной последовательности

В математическом анализе теорема Больцано–Вейерштрасса, названная в честь Бернара Больцано и Карла Вейерштрасса, является фундаментальным результатом о сходимости в пространстве $\mathbb{R}$.

Определение 30. Пусть $\{x_n\}$ – некоторая последовательность и пусть $\{n_k\}$ – некоторая строго возрастающая последовательность, состоящая из натуральных чисел. Тогда последовательность $y_k = x_{n_k}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$.

Определение 31. Если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} y_k{=}y$, то y называется *частичным пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 23 (Больцано–Вейерштрасса). Из всякой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. По условию имеем, что найдется $c{>}0$ такое, что $|x_n|{<}c$ для всех n. Разделим отрезок $I_0{=}[-c, c]$ пополам. Один из получившихся отрезков содержит бесконечное число членов последовательности. Назовем его I_1 и в качестве первого члена в искомой подпоследовательности возьмём какой-либо элемент $x_{n_1}{\in}I_1$, т.е. положим $y_1{=}x_{n_1}$. Затем отрезок I_1 снова разобьём на два равных отрезка и обозначим через I_2 тот отрезок, который содержит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Среди них выберем такой член x_{n_2}, номер которого n_2 превосходит число n_1, и положим $y_2{=}x_{n_2}$. Повторяя описанную процедуру применительно к отрезку I_2, получим отрезок $I_3{\subset}I_2$ и член подпоследовательности $y_3{=}x_{n_3}$ с условием $n_3{>}n_2$. Далее таким же образом найдём $y_4{=}x_{n_4}{\in}I_4{\subset}I_3$, $y_5{=}x_{n_5}{\in}I_5{\subset}I_4$ и т.д. В результате мы получим числовую последовательность $\{y_k\}$ и систему вложенных отрезков $\{I_k\}$, причём $y_k{\in}I_k$, $y_k{=}x_{n_k}$, $n_k{<}n_{k+1}$ при всех $k{\in}\mathbb{N}$. Другими словами, $\{y_k\}$ будет подпоследовательностью для $\{x_n\}$.

Осталось показать, что $\{y_k\}$ сходится. Для этого заметим, что длина δ_k отрезка I_k равна $\frac{c}{2^{k-1}}$, откуда $\delta_k{\to}0$ при $k{\to}\infty$. Это значит, что последовательность вложенных отрезков $\{I_k\}$ стягивается и по теореме 5 все отрезки I_k имеют единственную общую точку y. Именно это число y и будет пределом для $\{y_k\}$. Действительно, если $I_k{=}[s_k, t_k]$, то $s_k{\le}y{\le}t_k$, $t_k - s_k{=}\delta_k$, $0{\le}\alpha_k{=}y - s_k{\le}\delta_k$, $0{\le}\beta_k{=}t_k - y{\le}\delta_k$. Но так как $\delta_k{\to}0$ при $k{\to}\infty$, то $\alpha_k{\to}0$ и $\beta_k{\to}0$, откуда $s_k{=}y + \alpha_k{\to}y$, $t_k{=}y + \beta_k{\to}y$. И так как

$y_k = x_{n_k}$, $s_k \le x_{n_k} \le t_k$, то $y_k = x_{n_k} \to y$ при $k \to \infty$, что и требовалось доказать.

2.8 Критерий Коши сходимости последовательности

В этом подразделе приведём теорему, с помощью которой можно узнать, сходится ли данная последовательность или нет, не имея заранее информации о её пределе. Эта теорема носит название *критерий Коши* и утверждает, что последовательность сходится тогда и только тогда, когда при любом заданном малом положительном расстоянии все элементы последовательности, кроме конечного числа, находятся друг от друга на расстоянии, меньше заданного.

Определение 32. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если выполнено условие:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon):\ \ \forall n > N \text{ и } \forall\, m > N\ \ \Rightarrow,\ |x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{28}$$

Условие (28) можно сформулировать и таким образом. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \ge N$ и всех целых неотрицательных p выполняется неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Теорема 24 (критерий Коши). Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство. Необходимость. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ имеем $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Следовательно, для любых $n, m > N$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) - (x_m - x)| \le |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поэтому $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность.

Достаточность. По условию последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной.

1. Докажем, что $\{x_n\}$ ограничена. В самом деле, возьмём $\varepsilon = 1$. Тогда найдётся $N = N(1)$ такое, что для всех $n, m > N$ имеем $|x_n - x_m| < 1$. В частности, если $n > N$, $m = N + 1$. Но тогда

   $$|x_n| \le |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}| = h.$$

   Отсюда $|x_n| \le \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N+1}|, h) = c$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это значит, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Поэтому в силу теоремы Больцано–Вейерштрасса 23 существует её сходящаяся подпоследовательность.

2. В силу теоремы Больцано–Вейерштрасса 23 существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Покажем, что вся данная последовательность $\{x_n\}$ также сходится и имеет пределом число x.

   Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Тогда, во-первых, по определению предела последовательности существует такое K, что для всех номеров $k > K$ или, что то же самое согласно определению подпоследовательности, для всех $n_k > N_K$ выполняется неравенство $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Во-вторых, так как последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши, то существует такое N_0, что для всех $n > N_0$ и всех $m > N_0$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Положим $N = \max\{N_0, N_K\}$ и зафиксируем некоторое $n_k > N$. Тогда для всех $n > N$ получим

   $$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это и доказывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Важно отметить, что теорема 24 допускает следующую переформулировку, полезную для доказательства расходимости конкретных последовательностей.

Теорема 25. Для расходимости последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы она не была фундаментальной, т.е. чтобы существовало число $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого $N \in \mathbb{N}$ нашлись бы номера $m > N$ и $n > N$, для которых выполнялось бы неравенство $|x_m - x_n| \geq \varepsilon$.

Пример 34. Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n}{3^n}$$

сходится.

Доказательство. Действительно, по теореме 24

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|\frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}}\right| + \left|\frac{\cos(n+2)}{3^{n+2}}\right| + \ldots + \left|\frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^p}\right).$$

Заметим, что $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^p}$ есть сумма первых p членов геометрической прогрессии, первый член которой $a = \frac{1}{3}$ и знаменатель $q = \frac{1}{3}$. Тогда

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^p} = s_p = \frac{a - aq^p}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{p+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^p}\right).$$

Следовательно,

$$\left|x_{n+p}-x_n\right| \le \frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^p}\right) < \frac{1}{2\cdot 3^n} < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства выразим n:

$$n > \log_3 \frac{1}{2\varepsilon},$$

значит, можно взять n больше числа $N{=}N(\varepsilon){=}\left[\log_3 \frac{1}{2\varepsilon}\right]+1$.

Пример 35. Доказать, что последовательность

$$\{x_n\} = \left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right\}$$

расходится.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 25. Возьмём $\varepsilon{=}\frac{1}{2}$, $k{\in}\mathbb{N}$ и положим $n{=}2k$, $m{=}k$, тогда получим

$$|x_n-x_m| = |x_{2k}-x_k| =$$
$$= \frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k} > \underbrace{\frac{1}{2k}+\ldots+\frac{1}{2k}}_{k} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\{x_n\}$ расходится и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = +\infty. \qquad (29)$$

Приведём пример, решение которого опирается на (29).

Пример 36. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=0$.

Доказательство. Прологарифмировав выражение $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$, получим

$$\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right) = \ln\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{4}+\ldots+\ln\frac{2n-1}{2n} =$$

$$= \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right).$$

Применив неравенство (25), запишем

$$\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) <$$

$$< -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2n} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Так как в силу (29) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)=-\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right) = 0.$$

2.9 Верхний и нижний пределы последовательности

В подразделе 2.7 было показано, что любая числовая последовательность всегда имеет по крайней мере один частичный предел, конечный или бесконечный. Наибольший и наименьший из них (ниже будет доказано, что они всегда существуют) играют особую роль в теории последовательностей. Здесь понятия “наибольший” и “наименьший” понимаются в смысле расширенного множества действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}$, т.е., в частности, наибольшим (наименьшим) частичным пределом рассматриваемой последовательности может оказаться $+\infty$ (соответственно $-\infty$).

Определение 33. Наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называется её *верхним пределом* и обозначается $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, а наименьший частичный предел называется *нижним пределом* и обозначается $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема 26. У любой последовательности $\{x_n\}$ существует как наибольший, так и наименьший частичный предел.

Доказательство. Докажем существование наибольшего частичного предела. Для заданной последовательности $\{x_n\}$ возможны два случая: либо она ограничена сверху, либо нет.

Если она не ограничена сверху, то $+\infty$ является её частичным пределом и, очевидно, наибольшим, т.е. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Если же последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то снова возможны два случая: либо множество её конечных пределов, которое мы обозначим через A, не пусто, либо оно пусто.

Рассмотрим сначала первый случай. Из ограниченности сверху данной последовательности $\{x_n\}$ следует и ограниченность сверху непустого множества A её конечных частичных пределов. В силу этого множество A имеет конечную точную верхнюю грань. Покажем, что $b=\sup A$ является частичным пределом, т.е. что $b\in A$. Действительно, если бы $b\notin A$, то существовало бы такое $\varepsilon>0$, что в интервале $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ содержалось лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$ (в частности, ни одного), и поэтому в этом интервале не было бы ни одного элемента A, что противоречит условию $b=\sup A$.

Таким образом, $b\in A$ и, следовательно, является наибольшим элементом множества A, поэтому $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=b$.

В оставшемся случае, т.е. когда последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху и множество её конечных частичных пределов A пусто, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ (докажите это), т.е. в этом случае множество её частичных пределов состоит из одного элемента «$-\infty$», который тем самым является и наибольшим в этом множестве, т.е. здесь

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Аналогично для любой последовательности доказывается существование и наименьшего (конечного или бесконечного) частичного предела.

Теорема 27. Для того чтобы число b было верхним пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно выполнение для любого числа $\varepsilon>0$ совокупности следующих двух условий.

1. Существует номер N_ε такой, что для всех номеров $n>N_\varepsilon$ справедливо неравенство $x_n<b+\varepsilon$.

2. Для любого номера N_0 существует номер $N'=N'(N_0,\varepsilon)$ (зависящий от ε и от N_0) такой, что $N'>N_0$ и $x_{N'}>b-\varepsilon$.

Условие 1 означает, что при любом фиксированном $\varepsilon>0$ в последовательности $\{x_n\}$ существует лишь *конечное число* членов x_n таких, что $x_n\geq b+\varepsilon$, (их номера меньше N_ε).

Условие же 2 означает, что при любом фиксированном $\varepsilon>0$ в последовательности $\{x_n\}$ существует *бесконечно много* членов x_n таких, что $x_n>b-\varepsilon$.

Доказательство. Необходимость условия 1. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=a$ и пусть $\varepsilon>0$ фиксировано. Нам нужно показать, что для всех $\varepsilon>0$ существует только конечное число членов $x_n\in[b+\varepsilon,+\infty)$.

Предположим противное. На луче $[b+\varepsilon,+\infty)$ оказалось бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Тогда найдётся подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, элементы которой принадлежат этому полуинтервалу, и которая имеет конечный или бесконечный предел. Обозначим его через x. Очевидно, $x\geq b+\varepsilon>b$, что противоречит тому, что b — наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$. Необходимость условия 1 доказана.

Необходимость условия 2. Поскольку верхний предел является и частичным пределом, то существует подпоследовательность x_{n_k} такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=b$. Лишь конечное число членов подпоследовательности x_{n_k} меньше $b-\varepsilon$, следовательно, существует бесконечно много членов данной последовательности $\{x_n\}$, больших, чем $b-\varepsilon$. Необходимость условия 2 доказана.

Достаточность. Пусть число b удовлетворяет условиям 1 и 2. Покажем, что тогда b является частичным пределом. Возьмём $\varepsilon=\frac{1}{k}$, $k=1,2,\ldots$. Для каждого натурального k существует номер N_k такой, что $x_{N_k}>b-\frac{1}{k}$ (согласно условию 2) и $x_{N_k}<b+\frac{1}{k}$ (согласно условию 1). Поскольку для любого k множество элементов x_n данной последовательности, для которых выполняются неравенства $b-\frac{1}{k}<x_{N_k}<b+\frac{1}{k}$, бесконечно, то номера N_k можно последовательно ($k=1,2,\ldots$) выбрать так, чтобы $N_{k_1}<N_{k_2}$ при $k_1<k_2$. В результате мы получим подпоследовательность x_{N_k} данной последовательности $\{x_n\}$. Из неравенства $|x_{N_k}-b|<\frac{1}{k}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{N_k}=b$, т.е., что b является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

Покажем теперь, что число b является наибольшим частичным пределом. Действительно, если бы нашёлся частичный предел c последовательности $\{x_n\}$ такой, что $c>b$, то выбрав $\varepsilon>0$ так, что $b+\varepsilon<c$, мы получим, что на промежутке $(b+\varepsilon,+\infty)$ будет находиться бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ (а именно почти все члены подпоследовательности, сходящейся к c). Это противоречит условию 1.

Аналогично, для того чтобы число a было нижним пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно выполнение для любого числа $\varepsilon>0$ совокупности следующих двух условий.

1. Существует номер N_ε такой, что для всех номеров $n>N_\varepsilon$ справедливо неравенство $x_n>a-\varepsilon$.

2. Для любого номера N_0 существует номер $N'=N'(N_0,\varepsilon)$ (зависящий от ε и от N_0) такой, что $N'>N_0$ и $x_{N'}<a+\varepsilon$.

Из теоремы Больцано–Вейерштрасса 23 следует, что верхний $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=b$ предел ограниченной последовательности $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon>0$ интервал $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ содержит в себе бесконечное число элементов x_n, при этом справа (слева) от этого интервала имеется не более, чем конечное число элементов x_n. Аналогичное утверждение справедливо и для нижнего предела $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=a$.

Теорема 28. Для того чтобы существовал предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

(где x – конечное число, $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = x. \tag{30}$$

Доказательство. Необходимость. Если существует предел x_n, то все подпоследовательности $\{x_n\}$ сходятся к нему, следовательно имеет место (30).

Достаточность. Наоборот, пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=x$. Если x – конечное число, то из (30) следует, что для любого $\varepsilon>0$ неравенства

$$x-\varepsilon < x_n < x+\varepsilon$$

имеют место для всех индексов n, за исключением конечного их числа, а это значит, что $x_n\to x$.

Если теперь $x=+\infty$, то неравенству $x_n\leq M$ может при любом конечном M удовлетворять только конечное число элементов x_n, но тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$. Аналогично рассматривается случай $x=-\infty$.

Справедливо равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)$$

и неравенства (если правые части конечны)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \ge \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

Вычисление верхнего и нижнего пределов последовательности сводится к тому, что выделяют сходящиеся подпоследовательности и сравнивают их пределы – частичные пределы исходной последовательности.

Пример 37. Найти верхний и нижний пределы последовательности $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ и выяснить, сходится ли она.

Решение. Так как $x_n=(-1)^n$ принимает только два значения, а именно $x_{2k}=1$ при $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$; $x_{2k-1}=-1$ при $n=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$, то из последовательности $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ можно выделить только две подпоследовательности $\{x_{2k}\}=\{1\}$ и $\{x_{2k-1}\}=\{-1\}$, $k\in\mathbb{N}$. Причём

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1$$

и

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -1.$$

Поскольку $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \ne \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$, то последовательность $x_n=(-1)^n$ не имеет предела, т.е. расходится.

Пример 38. Для последовательности $\{x_n\} = \left\{\frac{(3\cos(\pi n/2)-1)n+1}{n}\right\}$ найти верхний и нижний пределы и выяснить, сходится ли она.

Решение. Заметим, что $\cos(\pi n/2)$ принимает различные значения при различных значениях n. Именно

при $n = 4k$ $\quad\cos(\pi n/2) = \cos(2k\pi) = 1$;

при $n = 4k + 1$ $\quad\cos(\pi n/2) = \cos(2k\pi + \pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$;

при $n = 4k + 2$ $\quad\cos(\pi n/2) = \cos(2k\pi + \pi) = \cos(\pi) = -1$;

при $n = 4k+3$ $\quad\cos(\pi n/2) = \cos(2k\pi+3\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$.

Поэтому имеем

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty} \left\{\frac{2n+1}{n}\right\} = 2;$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim_{k\to\infty} x_{4k+3} = \lim_{k\to\infty} \left\{\frac{-n+1}{n}\right\} = -1;$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+2} = \lim_{k\to\infty} \left\{\frac{-4n+1}{n}\right\} = -4.$$

Таким образом, числа 2, -1, -4 являются частичными пределами последовательности $\left\{\frac{(3\cos(\pi n/2)-1)n+1}{n}\right\}$. Рассмотренные четыре подпоследовательности $\{x_{4k}\}$, $\{x_{4k+1}\}$, $\{x_{4k+2}\}$, $\{x_{4k+3}\}$ составляют вместе всю данную последовательность. Следовательно, других частичных пределов данная последовательность не имеет.

Очевидно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 2,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -4.$$

3 Раздел 3. Предел функции

3.1 Числовые функции. Элементарные функции

Функция – это правило или закон, определяющий связь между одной переменной (независимой переменной) и другой переменной (зависимой переменной). Функции широко распространены в математике и необходимы для формулирования физических взаимосвязей в естественных науках. Современное определение функции впервые было дано в 1837 году немецким математиком Петером Густавом Лежёном Дирихле. Функции являются центральными объектами математического анализа. В этом разделе определяются пределы и непрерывность функций одной действительной переменной, а также представлены некоторые следствия непрерывности.

В курсе математического анализа сначала изучаются *действительные функции одного действительного аргумента*, т.е. функции $f: E \to \mathbb{R}$, где $E \subset \mathbb{R}$. Независимые и зависимые переменные являются в этом случае действительными (вещественными) переменными.

Понятие функции, которое мы будем использовать, дано в определении 6. Над *числовыми функциями*, т.е. функциями, принимающими числовые значения, можно производить различные арифметические операции. А именно, функции с перекрывающимися областями определения можно складывать, вычитать, умножать и делить. Если $f(x)$ и $g(x)$ – две функции, определённые на одном и том же множестве X, то для всех $x \in X$ сумма, разность, произведение и частное определяются следующим образом:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$,
3. $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$ для любых $x \in X$.

Кроме того, если c – некоторая постоянная, то функция $c \cdot f$ определяется как функция, принимающая в каждой точке $x \in X$

значение $c \cdot f(x)$.

Другой способ объединения двух функций для создания новой функции называется суперпозицией функций. В композиции функций мы заменяем аргумент функции на другую функцию (см. определение 8).

Для простоты изложения теории выделим основные элементарные функции, к которым относятся, в частности, логарифм, показательная функция, степенная функция и тригонометрические функции.

Определение 34. Функции: постоянная $y=c$, c – константа, степенная $y = x^a$, показательная $y=a^x$ $(a>0)$, логарифмическая $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, тригонометрические $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$ и $y=\operatorname{arcctg} x$ – называются *основными элементарными функциями*.

Функции, состоящие из конечной комбинации операций сложения, умножения, деления, возведения в степень и взятия суперпозиции основных элементарных функций будем относить к элементарным функциям.

Определение 35. Всякая функция, которая может быть явным образом задана с помощью формулы, содержащей лишь конечное число арифметических операций $(+, -, \times, \div)$ и суперпозиций основных элементарных функций, называется просто *элементарной функцией*.

Под областью существования (определения) элементарной функции обычно понимают множество всех действительных чисел x, для которых, во-первых, формула, задающая рассматриваемую элементарную функцию, имеет смысл, и, во-вторых, в процессе проведения всех необходимых вычислений по этой формуле получаются только действительные числа.

Элементарные функции обычно делят на следующие классы.

1. **Многочлены (полиномы)**. К многочленам относятся функции, которые могут быть заданы формулами вида

$$y = P_n(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

   Если $a_n \neq 0$, то число n называется *степенью* данного многочлена. Многочлены первой степени называются также *линейными функциями*.

2. **Рациональные функции**. К этому классу функций относятся функции, которые могут быть заданы в виде

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

   где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены. Заметим, что класс многочленов содержится в классе рациональных функций.

3. **Иррациональные функции**. Иррациональной функцией называется функция, которая может быть задана с помощью суперпозиций конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырёх арифметических действий. Например, функция

$$y = \frac{\sqrt[5]{x-1}}{x - \sqrt{x^2+1}}$$

   является иррациональной функцией.

4. **Трансцендентные функции**. Элементарные функции, не являющиеся ни рациональными, ни иррациональными, на-

зываются *трансцендентными элементарными функциями*. Можно показать, что все прямые и обратные тригонометрические функции, а также показательная и логарифмическая функции являются трансцендентными функциями.

3.2 Определение предела функции в точке по Гейне

Дадим определение предела функции в точке в терминах пределов последовательностей по Гейне (Генрих Эдуард Гейне (1821–1881 гг.) – немецкий математик). Но сначала введём определение “проколотой окрестности”.

Определение 36. *Проколотой ε-окрестностью* точки x_0 называется ε-окрестность точки x_0, из которой удалена точка x_0.

Проколотая ε-окрестность точки x_0 обозначается $\overset{\circ}{U}_\varepsilon (x_0)$:

$$\overset{\circ}{U}_\varepsilon (x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Отметим, что выражение “функция f определена на множестве E” не означает, что указанное множество является множеством определения функции f, а лишь, что это множество принадлежит области X определения функции f и что в данном вопросе функция f рассматривается только на указанном множестве E.

Определение 37 (предела функции по Гейне). Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\varepsilon (x_0)$ точки x_0. Число A называется *предeлом функции f в точке* x_0 (или при x, стремящемся к x_0), если для любой последовательности $x_n \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon (x_0)$, $n=1,2,\ldots$, сходящейся к точке x_0: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A, т.е, верно равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Если число A является пределом функции f в точке x_0, то пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x-x_0\to 0} f(x) = A,$$

а также $f(x)\to A$ при $x\to x_0$.

Из этого определения следует, что:

- функция не может иметь двух разных пределов в одной точке;
- значения функции f в точках x, лежащих вне любой фиксированной окрестности точки x_0, и значение функции f в точке x_0 не влияют ни на существование, ни на величину предела функции f в точке x_0.

Вопрос: существует или нет предел функции в данной точке x_0, а если существует, то каково его значение, полностью определяется значениями функции в сколь угодной малой проколотой ε-окрестности $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$ точки x_0.

Действительно, какова бы ни была проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$ и какова бы ни была последовательность $x_n \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$, $n=1,2,\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, найдётся такой номер $N\in\mathbb{N}$, что при $n\geq N$ будет иметь место $x_n \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$, а конечное число оставшихся членов последовательности $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{N-1})$ не влияет ни на существование, ни на величину предела всей последовательности $\{f(x_n)\}$. В этом смысле говорят, что свойство функции иметь предел в данной точке является *локальным свойством функции*.

Пример 39. Выясним, существует или нет предел функции $f(x)=\frac{2x^2+x-1}{x-1}$ при $x\to 0$. Возьмём какую-либо последовательность x_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, $n=1,2,\ldots$, тогда на основании теорем о пределе последовательности имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n^2+x_n-1}{x_n-1}=\frac{2(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^2+\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n-1}=1.$$

Таким образом, существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$, и так как он не зависит от выбора последовательности $x_n\to 0$, то существует и $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Пример 40. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. Выясним, существует или нет $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Возьмём две последовательности:

$$x_n'=\frac{1}{\pi n},\quad x_n''=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n},\quad n=1,2,\ldots$$

Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n'=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi n}=0,\quad \lim_{n\to\infty} x_n''=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi/2+2\pi n}=0.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n')=\lim_{n\to\infty}\sin(\pi n)=\lim_{n\to\infty} 0=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n'')=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\lim_{n\to\infty} 1=1,$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$, а это значит, что предела $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

Определение 38. Пусть функция f определена на интервале (a,x_0). Число B называется *пределом слева функции f в точке x_0*, если какова бы ни была такая последовательность $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0,\quad a<x_n<x_0,\quad n=1,2,\ldots,$$

последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу B, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B.$$

Если такое число B существует, то пишут

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = B \quad \text{или} \quad B = f(x_0 - 0).$$

Число C называется *пределом справа функции f в точке x_0*, если для любой такой последовательности точек $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad x_0 < x_n < b, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу C, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = C.$$

Если такое число C существует, то пишут

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = C \quad \text{или} \quad C = f(x_0 + 0).$$

Можно записать

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0, x<x_0} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0, x>x_0} f(x).$$

В случае x_0=0 вместо $\to 0+0$ (соответственно, вместо $\to 0-0$) пишут просто $\to +0$ (соответственно $\to -0$).

Пределы слева и справа функции называются *односторонними* , в отличие от предела функции в определении 37, который называется *двусторонним* пределом.

Пример 41. Рассмотрим функцию y=sgn(x). Она имеет в точке x=0 предел справа и предел слева: $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{sgn}(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{sgn}(x)=-1$. В самом деле, если x_n – любая сходящаяся к нулю последовательность значений аргумента этой функции, элементы x_n которой больше нуля ($x_n>0$), то $\operatorname{sgn}(x_n)=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(x_n)=1$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{sgn} n(x)=1$. Аналогично устанавливается, что $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{sgn}(x)=-1$.

3.3 Определение предела функции в точке по Коши

Существует другое определение предела функции, не использующее понятия предела последовательности и называемое определением предела по Коши.

Определение 39 (предела функции по Коши). Число A называется *пределом функции* f *в точке* x_0, если для любого $\varepsilon{>}0$ существует такое $\delta{=}\delta(\varepsilon){>}0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0|{<}\delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A|{<}\varepsilon$.

Предел функции в смысле определения Коши также обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n){=}A$. Используя логические символы, определение 39 можно записать в виде:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x){=}A \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x:\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Множество точек x, удовлетворяющих условию $x{\neq}x_0$, $|x{-}x_0|{<}\delta$, называется *проколотой окрестностью* $\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$ точки x_0, а множество точек y, удовлетворяющих неравенству $|y - A|{<}\varepsilon$, называется просто *окрестностью* $U_\varepsilon(A)$ точки A, определение можно перефразировать следующим образом.

Число A называется *пределом функции* f *в точке* x_0, если для любой окрестности $U_\varepsilon(A)$ точки A существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$ точки x_0, что

$$f(\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)) \subset U(A,\varepsilon).$$

Теорема 29. Определения по Коши и по Гейне предела функции в данной точке равносильны.

Доказательство. 1. Пусть $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в смысле определения по Гейне. Тогда функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$ точки x_0 и для любой последовательности $x_n \in\ \overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$, $n=1,2,\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Покажем, что выполняется

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x:\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Допустим, это не так, т.е. что

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x_\delta:\ 0 < |x_\delta - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_\delta) - A| \ge \varepsilon.$$

Иначе говоря, найдётся такое $\varepsilon>0$, что для любого $\delta>0$, а значит, в частности, и для любого δ, $0<\delta<\delta_0$, существует такое x_δ (индекс δ у x подчёркивает зависимость x от выбора δ; ничего, конечно, не изменится, если индекс δ не писать), что для него $|x_\delta - x_0| < \delta$ и выполняется неравенство

$$|f(x_\delta) - A| \ge \varepsilon.$$

Будем последовательно выбирать $\delta = \frac{\delta_0}{n}$ $n=1,2,\ldots$, а соответствующие x_δ обозначать просто через x_n:

$$|x_n - x_0| < \frac{\delta_0}{n},\ \ x_n \ne x_0,\ \ n = 1,2,\ldots,$$

тогда

$$|f(x_n) - A| \ge \varepsilon.$$

Очевидно, это означает, что $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, однако число A не может быть пределом последовательности $\{f(x_n)\}$. Это противоречит определению по Гейне предела функции. Полученное противоречие доказывает сделанное утверждение

2. Пусть теперь $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в смысле определения Коши предела функции. Покажем, что тогда функция f прежде всего

определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. В самом деле, возьмём, например, ε=1. Для него, согласно определению по Коши, существует такое $\delta_0>0$, что для всех $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_0$, выполняется условие $|f(x) - A| < 1$ и, следовательно, в частности, для всех таких значений x определена функция f. Таким образом, функция f заведомо определена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$.

Возьмём

$$x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Покажем, что если функция f удовлетворяет условиям определения по Коши, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Проверим это. Зададим произвольно $\varepsilon>0$ и выберем для него $\delta>0$, которое удовлетворяет условиям

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для этого δ, в силу условия $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N$ будет выполняться неравенство $|x_n - x_0| < \delta$. Из условия же $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$ следует, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $x_n \neq x_0$.

Поэтому в силу $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$ справедливо неравенство

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Это и означает выполнение условия $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Для односторонних пределов функции в точке также можно дать новое определение.

Определение 40. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, x_0) (соответственно на интервале (x_0, b)). Число B называется *пределом слева (справа) функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех точек x, удовлетворяющих условию $x_0-\delta<x<x_0$ (соответственно условию $x_0<x<x_0+\delta$), выполняется неравенство

$$|f(x) - B|<\varepsilon.$$

Предел справа обозначается $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0 + 0)$, предел слева – $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0 - 0)$.

Связь между односторонними пределами и двусторонним пределом устанавливает следующая

Теорема 30. Функция f имеет предел в точке тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы как справа, так и слева, и они равны. В этом случае их общее значение и является двусторонним пределом функции f в точке x_0.

Доказательство. В самом деле, пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Тогда, согласно определению предела функции в точке x_0, это означает, что для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех точек x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A|<\varepsilon$. Тем самым, как для точек x, таких, что $x_0 - \delta<x<x_0$, так и для таких, что $x_0<x<x_0+\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. А это, согласно определению 40 и означает, что число A является как пределом функции f слева, так и её пределом справа в точке x_0:

$$A = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x). \tag{31}$$

Обратно, пусть выполнены условия (31). Согласно определению предела функции слева и справа отсюда следует, что для всякого $\varepsilon>0$ существуют такие $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ и $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0-\delta_1<x<x_0$, и для всех x, удовлетворяющих условию $x_0<x<x_0+\delta_2$, справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Если обозначить через δ наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, то очевидно, что для всех x, удовлетворяющих условиям $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$, будет справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Это и означает, что $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Общее понятие предела функции

Понятие предела функции можно обобщить на случай, когда аргумент функции или её значения стремятся к бесконечности.

Например, будем говорить, что $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, если для любого $E>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех x таких, что $x_0<x<x_0+\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>E$.

Приведём ещё один пример. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A+0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех $x<-\delta$ выполняется неравенство $A\leq f(x)<A+\varepsilon$.

Формулировка определения предела функции для каждого отдельного случая, хотя часто и удобна в конкретных ситуациях, мало приспособлена к рассмотрению общих вопросов, так как требует проведения специальных доказательств, соответствующих данным определениям. Поэтому целесообразно ввести одно единое определение предела функции, конечного или бесконечного, в данной “точке”.

По аналогии с определением 36 определим проколотые окрестности для x_0+0, x_0-0, ∞, $+\infty$, $-\infty$:

$$\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0+0)=(x_0,x_0+\delta),\qquad \delta>0;$$

$$\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0-0)=(x_0,x_0-\delta),\qquad \delta>0;$$

$$\overset{\circ}{U}_\delta\,(\infty)=\{x\in\mathbb{R}:|x|>\delta\},\qquad \delta>0;$$

$$\overset{\circ}{U}_\delta\,(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > \delta\}, \qquad \delta > 0;$$
$$\overset{\circ}{U}_\delta\,(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < -\delta\}, \qquad \delta > 0.$$

Теперь под “точкой” понимается либо действительное число x_0, либо один из символов $x_0{+}0$, $x_0{-}0$, ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Сформулируем общее определение предела функции.

Определение 41. Точка A называется *пределом функции f в точке* x_0, если для любой окрестности $U_\varepsilon(A)$ точки A существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$ точки x_0, что $f(\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)){\subset}U_\varepsilon(A)$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x){=}A$.

3.4 Свойства пределов функций

Все функции, рассматриваемые в этом подразделе, определены в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$ заданной точки x_0. Под “точкой” понимается либо число x_0, либо один из символов $x_0{+}0$, $x_0{-}0$, ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Свойство 1. Если у функции в заданной точке существует конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки функция ограничена.

Доказательство. Пусть у функции f существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x){=}A$. Тогда согласно определению 41 для любого $\varepsilon{>}0$, в частности, для $\varepsilon{=}1$, существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$ точки x_0, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$ имеет место $f(x){\in}U_1(A)$, т.е. выполняется неравенство $A{-}1{<}f(x){<}A{+}1$. Это и означает ограниченность функции f в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$.

Свойство 2. Если у функции в заданной точке существует конечный, не равный нулю предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки функция имеет тот же знак, что и указанный предел (в частности, она не равна нулю).

Доказательство. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ и пусть для определенности $A>0$. Тогда согласно определению 41 для любого $\varepsilon>0$, в частности, для $\varepsilon=A$ (в случае $A<0$ нужно взять $\varepsilon=-A$) существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$, что для всех $x\in\ \overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$ имеет место $f(x)\in U_A(A)$, т.е. выполняется неравенство $A-A<f(x)<A+A$. В частности, $f(x)>0$.

Следующие свойства вытекают из соответствующих свойств предела последовательности и определения предела функции по Гейне.

Свойство 3. Если $f(x)$ – постоянная функция в некоторой проколотой окрестности точки x_0, т.е. $f(x)=c$ (c – const) при $x\ \in\overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x)=c$.

Свойство 4. Если $f(x)\geq A$ при $x\in\ \overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$ и в точке x_0 существует конечный или определённого знака бесконечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\geq A$.

Свойство 5. Если

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

при всех $x\in\ \overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$ и существуют конечные или бесконечные определённого знака пределы

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = A,$$

то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Свойство 6. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то существуют и конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$, а если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, то и предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причём

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Доказательство. Докажем, например, формулу

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$. Тогда, согласно определению 37 предела функции по Гейне, для любой последовательности $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, $n=1,2,\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \qquad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = B.$$

Поэтому, вспоминая, что предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению их пределов, получаем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\cdot g(x_n) = A\cdot B$, причём этот предел не зависит от выбора указанной последовательности $\{x_n\}$. Это согласно тому же определению 37 и означает, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Следствие 4. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то для любого числа $c\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x).$$

3.5 Критерий Коши существования предела функции в точке

Как и в случае предела последовательности получим необходимое и достаточное условие того, что функция имеет предел в точке x_0, не используя самого значения предела, а в терминах лишь значений самой функции в проколотой окрестности точки x_0.

Теорема 31 (критерий Коши). Для того чтобы функция f имела в точке x_0 конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовала такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$ точки x_0, что для любых $x'\in \overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$ и $x''\in \overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$ выполнялось бы неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$ точки x_0 такая, что для каждого $x\in\overset{\circ}{U}_\delta\,(x_0)$ справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $x'\in\overset{\circ}{U}_\delta\,(a)$ и $x''\in \overset{\circ}{U}_\delta\,(a)$, тогда получим

$$|f(x'') - f(x')| = |[f(x'') - A] + [A - f(x')]| \le$$
$$\le |f(x'') - A| + |A - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть функция f такова, что для любого $\varepsilon>0$ существует такая проколотая окрестность и $\overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$, что для всех

$$x' \in \overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0), \quad x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0) \tag{32}$$

выполняется неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon. \tag{33}$$

Прежде всего из этого условия следует, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$ точки x_0.

Покажем, что функция f имеет в точке x_0 предел. Возьмём какую-либо последовательность $x_n \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, $n=1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, и произвольно зададим $\varepsilon>0$. (Здесь $\overset{\circ}{U}(x_0)$ — произвольная окрестность.) Для этого ε существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, удовлетворяющая условиям (32)–(33). В силу условия $x_n \to x_0$, $n\to\infty$, для соответствующей обычной окрестности $U_\delta(x_0)$ существует такое $N\in\mathbb{N}$, что при всех $n\geq N$, $n \in \mathbb{N}$, имеет место $x \in U_\delta(x_0)$. Но $x_n \in \overset{\circ}{U}\ (x_0)$, следовательно, $x_n \neq x_0$, $n\in\mathbb{N}$. Поэтому x_n принадлежат не только обычной окрестности $U(x_0)$, но и соответствующей проколотой: $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta\ (x_0)$, $n\geq N$. Отсюда в силу условий (32)–(33) для всех $n\geq N$ и $m\geq N$ получим

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет условиям критерия Коши для последовательностей и, следовательно, сходится.

Таким образом, для каждой последовательности $x_n \in \overset{\circ}{U}\ (x_0)$, $n=1, 2, \ldots$, удовлетворяющей условию $x_n \to x_0$, $n\to\infty$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Из произвольности выбора последовательности $\{x_n\}$ и определения предела функции по Гейне 37 следует существование конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

В случае, если x_0 является числом, то условие Коши можно перефразировать следующим образом.

Критерий Коши (формулировка для $x_0 \in \mathbb{R}$). *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых x' и x'', удовлетворяющих условиям $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$, $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$, выполняется неравенство*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

3.6 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Все функции, рассматриваемые в этом подразделе, определены на некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0.

Определение 42. Функция $\varphi = \varphi(x)$ называется *бесконечно малой (бесконечно большой)* при стремлении аргумента к точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0 \qquad \left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty \right).$$

Лемма 4. Предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует и равен A тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – бесконечно малая при стремлении аргумента к точке x_0.

Доказательство. Действительно, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то полагая $\varphi(x) = f(x) - A$, получаем $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - A = A - A = 0$.

Наоборот, если $f(x) = A + \varphi(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A + \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$.

Теорема 32. Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при стремлении аргумента к точке x_0, а также произведение бесконечно малой при стремлении аргумента к точке x_0 на ограниченную функцию являются бесконечно малыми при стремлении аргумента к той же точке x_0.

То, что сумма и произведение конечного числа бесконечно малых является бесконечно малой, непосредственно следует из свойства пределов.

Доказательство же того, что произведение бесконечно малой на ограниченную функцию является бесконечно малой, очевидным образом проводится на основе определения предела функции с использованием соответствующего свойства бесконечно малых последовательностей.

Функция, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой и наоборот:

$$\forall b > 0: \qquad \frac{b}{+0} = +\infty, \qquad \frac{b}{-0} = -\infty, \qquad \frac{b}{0} = \infty,$$

$$\frac{b}{+\infty} = +0, \qquad \frac{b}{-\infty} = -0, \qquad \frac{b}{\infty} = 0.$$

Также, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, то и

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Однако о существовании какого-либо предела $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)]$ здесь уже ничего утверждать нельзя.

4 Раздел 4. Непрерывность функции и замечательные пределы

4.1 Непрерывность функции в точке. Функции, разрывные в точке. Классификация точек разрыва

Приведём определение непрерывной в точке функции, которое дополним различными формами записи.

Определение 43. Функция f, определённая в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, называется *непрерывной в этой точке* (или, что то же самое, при $x{=}x_0$), если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Заметим, что если функция f непрерывна в некоторой точке, то согласно данному определению она определена в некоторой окрестности этой точки (обычной, а не проколотой, как это было в случае определения предела функции).

Определение 43 предела функции в точке на языке ε и δ (по Коши), равносильно условию: для любого $\varepsilon{>}0$ существует такое $\delta{=}\delta(\varepsilon){>}0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|{<}\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|{<}\varepsilon$.

Согласно определению предела функции в точке в терминах последовательностей (по Гейне) определение непрерывности функции в точке x_0 равносильно следующему.

Определение 44. Функция f, определённая в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, называется *непрерывной в точке* x_0, если для любой последовательности $x_n{\in}U(x_0)$, $n{=}1,2,\ldots$, такой, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Как и в случае определения предела, определение непрерывности функции в точке можно дать на языке окрестностей.

Определение 45. *Функция f непрерывна в точке* x_0, если для любого $\varepsilon{>}0$ найдётся такое $\delta{>}0$, что для всех $x{\in}U_\delta(x_0)$ имеем $f(x){\in}U_\varepsilon(f(x_0))$.

Наконец, перенося $f(x_0)$ в определении 45 в левую часть, внося $f(x_0)$ под знак предела и замечая, что обозначение $x \to x_0$ при пределе функции равносильно обозначению $x - x_0 \to 0$, получаем

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \tag{34}$$

Разность $x - x_0$ называется *приращением аргумента* и обозначается $\Delta x = x - x_0$, а разность $f(x) - f(x_0)$ – *приращением функции*, соответствующим данному приращению аргумента Δx, и обозначается $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. В этих обозначениях равенство (34) перепишется в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

т.е. непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пример 42. Функция $f(x) = c$, где c – постоянная, непрерывна на всей числовой прямой. В самом деле, для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ имеет место

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c = f(x_0).$$

Пример 43. Покажем, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке $x \neq 0$. В самом деле,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)},$$

откуда при $x \neq 0$ имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{0}{x_0^2} = 0,$$

что и означает непрерывность функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке x_0.

Пример 44. Покажем, что функция $f(x)=|\operatorname{sgn} x|$ не является непрерывной в точке $x_0=0$. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x|=1$. И этот предел не совпадает со значением $|\operatorname{sgn}(0)|=0$.

Определение 46. Пусть теперь функция f определена на интервале (a,b), кроме, быть может, точки $x_0\in(a,b)$. Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* f, если функция f не определена в точке x_0 или если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.

Определение 47. Если x_0 – точка разрыва функции f и существуют конечные пределы

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x), \quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

то точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода*. Величина $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется *скачком функции f в точке x_0*. Если $f(x_0+0)=f(x_0-0)$, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.

Последнее объясняется тем, что если в этом случае видоизменить или доопределить (если функция f была не определена в точке x_0) функцию f, положив

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

то получится непрерывная в точке x_0 функция.

Определение 48. Точка разрыва функции f, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется *точкой разрыва второго рода*.

То есть в точках разрыва второго рода по крайней мере один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ не существует. (Здесь под пределом, как обычно, понимается лишь конечный предел.)

Функция $f(x)=\operatorname{sgn} x$ имеет в точке $x_0=0$ разрыв первого рода, а функции $f(x)=\frac{1}{x}$ и $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ в точке $x_0=0$ имеют разрывы второго рода.

Определение 49. Пусть функция f определена на левосторонней окрестности точки x_0, т.е. на полуинтервале вида $(a, x_0]$. Функция f называется *непрерывной слева в точке* x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$.

Пусть функция f определена на правосторонней окрестности точки x_0, т.е. на полуинтервале вида $[x_0, b)$. Функция f называется *непрерывной справа в точке* x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Пример 45. Рассмотрим функцию $y=[x]$, где $[x]$ – целая часть числа x. Функция $[x]$ в точках $x=n$, $n\in\mathbb{Z}$, непрерывна справа и разрывна слева; во всех же других точках она непрерывна как справа, так и слева, таким образом, в частности, $[x]$ непрерывна справа во всех точках.

4.2 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 33. Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то функции $c\cdot f$ (c — постоянная), $f+g$, $f\cdot g$, а если, кроме того, $g(x_0)\neq 0$, то и функция $\frac{f}{g}$ также непрерывны в точке x_0.

Эта теорема вытекает непосредственно из определения непрерывности и свойств пределов функций.

Теорема 34. Пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$, тогда сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Пусть $z_0=f(y_0)$ и фиксирована произвольным образом окрестность $U(z_0)$ точки z_0. Тогда в силу непрерывности функции f в точке y_0 существует такая окрестность $V(y_0)$

точки y_0, что если $y \in V(y_0)$, то функция f определена в этой точке y и $f(y) \in U(z_0)$. Далее, для полученной окрестности $V(y_0)$ в силу непрерывности функции φ в точке x_0 существует такая окрестность $W(x_0)$, что если $x \in W(x_0)$, то функция φ определена в этой точке x и $\varphi(x) \in V(y_0)$.

Следовательно, для этой точки определена и функция $f[\varphi(x)]$, причём выполняется включение $y \in V(y_0)$, где $y=\varphi(x)$, а значит, и $f(y) \in U(z_0)$, которое для рассматриваемого случая имеет вид $f[\varphi(x)] \in U(z_0)$. Это и означает непрерывность сложной функции $f \circ g$ в точке x_0.

Утверждение теоремы 34 можно записать в виде формулы

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)],$$

которая означает, что *операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия непрерывной функции*.

Из утверждения теоремы 34 следует *правило замены переменной для пределов непрерывных функций*: пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$, тогда

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{y \to y_0} f(y), \quad y = \varphi(x). \tag{35}$$

Определение 50. Функция, определённая на отрезке $[a,b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется *непрерывной на этом отрезке*.

При этом под непрерывностью в точке a понимается непрерывность справа, а под непрерывностью в точке b – непрерывность слева.

Аналогично определяется и непрерывность функции на промежутке любого другого вида.

4.3 Ограниченные функции. Монотонные функции

Рассмотрим некоторое множество $X \subset \mathbb{R}$.

Определение 51. Числовая функция f, определённая на множестве X, называется *ограниченной сверху (ограниченной снизу)*, если множество её значений ограничено сверху (снизу). Иначе говоря, функция f ограничена сверху (снизу), если существует такая постоянная M, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$ (соответственно $f(x) \geq M$).

Определение 52. Функция f, ограниченная на множестве X как сверху, так и снизу, называется просто *ограниченной* на этом множестве. Очевидно, что функция f ограничена на множестве X в том и только том случае, если существует такое число $M > 0$, что $|f| \leq M$ для каждого $x \in X$.

Определение 53. Точная верхняя (нижняя) грань множества значений Y числовой функции $y = f(x)$, определённой на множестве X, называется *точной верхней (нижней) гранью функции* f или *супремумом (инфимумом) функции* f и обозначается

$$\sup f, \ \sup_X f, \ \sup_{x \in X} f(x) \quad (\inf f, \ \inf_X f, \ \inf_{x \in X} f(x))$$

В определении 53 точная верхняя и точная нижняя грани функции могут быть как конечными, так и бесконечными.

Если точная верхняя и точная нижняя грани функции конечны, то более подробно это означает, что

$$\lambda = \sup f \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1. \ \forall x \in X \ \ f(x) \leq \lambda, \\ 2. \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x' \in X : \ \ f(x') > \lambda - \varepsilon; \end{array}$$

и

$$\mu = \inf f \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1. \ \forall x \in X \ \ f(x) \geq \mu, \\ 2. \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x'' \in X : \ \ f(x'') < \mu + \varepsilon. \end{array}$$

Функция f ограничена сверху (снизу) на множестве X тогда и только тогда, когда она имеет на этом множестве конечную точную верхнюю (нижнюю) грань.

Определение 54. Функция f, определённая на числовом множестве X, называется *не убывающей (не возрастающей)* на X, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно, неравенство $f(x_1 \geq f(x_2))$.

Если функция f не убывает на множестве E, то функция $-f$, получающаяся из f изменением знака у всех ее значений, т.е. $(-f)(x) = -f(x)$, $x \in E$, является не возрастающей на E функцией.

Не возрастающие и не убывающие на множестве E функции называются *монотонными* на этом множестве.

Если в определении 54 при $x_1 < x_2$ выполняется на E строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$), то функция f называется *(строго) возрастающей ((строго) убывающей)* на числовом множестве E.

Функция, строго возрастающая или строго убывающая, называется *строго монотонной*.

Очевидно, что строго монотонная (строго возрастающая, строго убывающая) функция является и просто монотонной (соответственно не убывающей, не возрастающей) функцией в смысле определения 54.

Для монотонной функции имеет место теорема, аналогичная теореме о монотонной последовательности.

Теорема 35. Пусть функция $f(x)$ не убывает на интервале (a, b), где, в частности, может быть $a = -\infty$, $b = +\infty$. Тогда в точке $x = b$ существует предел слева

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x),$$

а в точке $x=a$ – предел справа

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x).$$

Если $f(x)$ ограничена сверху числом M: $f(x)\le M$, то существует конечный предел слева в точке $x=b$, если же $f(x)$ не ограничена сверху, то $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty$.

Если $f(x)$ ограничена снизу числом N: $f(x)\le N$, то существует конечный предел справа в точке $x=a$, если же $f(x)$ не ограничена снизу, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$.

Аналогичные утверждения справедливы и для не возрастающих функций, их можно получить переходом от функции f к функции $-f$.

Доказательство. Пусть $\beta=\sup\limits_{(a,b)} f(x)$. Возьмём какое-либо $\eta<\beta$. Тогда в силу определения супремума существует точка $\xi\in(a,b)$ такая, что $f(\xi)>\eta$ (это следует из определения супремума, при конечном β: $\eta=\beta-\varepsilon$, где ε – произвольное число). Положим, что $\overset{\circ}{U}(b)=(\xi,b)$, т.е. $\overset{\circ}{U}(b)$ является односторонней проколотой окрестностью точки b. Тогда для любого $x\in\overset{\circ}{U}(b)$, т.е. для любого такого x, что $\xi<x<b$, в силу не убывания функции f, определения верхней грани и неравенства $f(\xi)>\eta$ получим:

$$\eta < f(\xi) \le f(x) \le \beta.$$

Итак, если $x\in\overset{\circ}{U}(b)$, то $\eta<f(x)\le\beta$. Задание произвольного числа $\eta<\beta$ равносильно в данном случае заданию произвольной окрестности $U(\beta)$ точки β в следующем смысле. Именно, если β конечно, то, полагая ε, получаем, что условие $\eta<f(\xi)\le f(x)\le\beta$ равносильно условию $f(x)\in U_\varepsilon(\beta)$, так как $f(x)\le\beta$. Если же $\beta=+\infty$, то условие $\eta<f(\xi)\le f(x)\le\beta$ равносильно условию $f(x)\in U_\eta(+\infty)$.

Таким образом, для любой окрестности $U(\beta)$ существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(b)$, что для любой точки $x\in \overset{\circ}{U}(b)$ имеет место $f(x)\in U(\beta)$. Это и означает, что

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x).$$

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{(a,b)} f(x)$.

Следствие 5. Если функция f монотонна на интервале (a,b) и $x_0\in(a,b)$, то в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы

$$f(x_0-0), \quad f(x_0+0).$$

Доказательство. Пусть для определённости функция f не убывает на интервале (a,b). Тогда какова бы ни была точка $x_0\in(a,b)$, для всех $x'\in(a,x_0)$ и всех $x''\in(x_0,b)$ будет справедливо неравенство $f(x')\leq f(x_0)\leq f(x'')$, т.е. функция f ограничена сверху на интервале (a,x_0) и снизу на интервале (x_0,b) числом $f(x_0)$. Следовательно,

$$\sup_{(a,x_0)} f(x) \leq f(x_0) \leq \inf_{(x_0,b)} f(x).$$

В частности, указанные верхняя и нижняя грани конечны. Этим следствие доказано, так как согласно теореме 35

$$f(x_0-0) = \sup_{(a,x_0)} f(x), \quad f(x_0+0) = \inf_{(x_0,b)} f(x).$$

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая при изменении x в промежутке $X\in\mathbb{R}$ не убывает (не возрастает). По отношению к таким функциям имеет место следующая

Теорема 36. Не убывающая (не возрастающая) на множестве $X\in\mathbb{R}$ функция $f(x)$ может иметь в X разве лишь разрывы первого рода, т.е. скачки.

Доказательство. Возьмём любую точку $x_0 \in X$, и пусть она не является левым концом этого промежутка. Рассматривая ту часть промежутка, которая лежит влево от x_0, применим к ней теорему о пределе монотонной функции; поскольку для $x < x_0$: $f(x) \leq f(x_0)$, то существует конечный предел

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0).$$

Если он совпадает со значением $f(x_0)$, то слева в точке x_0 функция непрерывна, в противном случае получаем скачок. Аналогично убеждаемся в том, что в каждой точке x_0 промежутка X (не служащей правым его концом) справа тоже либо имеет место непрерывность, либо скачок.

С помощью доказанной теоремы 36 легко установить критерий непрерывности монотонной функции, удобный для применения на практике.

Теорема 37. Если значения не убывающей (не возрастающей) в промежутке $X \in \mathbb{R}$ функции $f(x)$ содержатся в промежутке Y и сплошь заполняют его (так что каждое значение y из Y принимается функцией хоть раз), то эта функция непрерывна в X.

Доказательство.

Попробуем допустить, что в какой-нибудь точке x_0 из X функция $f(x)$ имеет разрыв, например, слева; как мы видели, этот разрыв может быть только скачком. В этом случае существует предел $f(x_0 - 0)$, но он меньше значения $f(x_0)$. Так как для $x < x_0$ будет $f(x) \leq f(x_0 - 0)$, а для $x > x_0$, очевидно, $f(x) \geq f(x_0)$, то функция не может принимать значений y, лежащих между числами $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0)$, принадлежащими промежутку Y. Это противоречит условию теоремы, а значит, функция $f(x)$ разрывов не имеет.

4.4 Ограниченность непрерывных функций и достижение точных граней. Теорема Вейерштрасса

Будем говорить, что функция f, определённая на множестве $X\subset\mathbb{R}$, достигает на нём своей точной верхней (точной нижней) грани $M=\sup\limits_X f$ $(m=\inf\limits_X f)$, если существует такая точка $x_0\in X$, что $f(x_0)=M$ $(f(x_0)=m)$.

Теорема 38 (Вейерштрасса). Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нём своей точной верхней грани и своей точной нижней грани.

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и пусть $M=\sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Число M, как и всякая точная верхняя грань непустого множества чисел, может быть либо конечным, либо бесконечным, равным $+\infty$. Покажем, что $M<+\infty$, и что существует такая точка $x_0\in[a,b]$: $f(x_0)=M$.

Выберем какую-либо последовательность таких чисел a_n, $n=1,2,\ldots$, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = M, \;\; a_n < M, \;\; n = 1,2,\ldots \tag{36}$$

Согласно определению точной верхней грани функции, для каждого a_n, $n=1,2,\ldots$, существует такая точка $x_n\in[a,b]$, что

$$f(x_n) > a_n, \;\; n = 1,2,\ldots \tag{37}$$

С другой стороны, поскольку M – верхняя грань функции f, то для всех точек $x\in[a,b]$ справедливо неравенство

$$f(x) \le M. \tag{38}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена: $a\le x_n\le b$, $n=1,2,\ldots$, поэтому по теореме Больцано–Вейерштрасса 23 из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0. \qquad (39)$$

Поскольку $a \leq x_{n_k} \leq b$, $k=1,2,\ldots$, то и $a \leq x_0 \leq b$. Из неравенств (37) и (38) следует, что для всех $k=1,2,\ldots$ справедливы неравенства $a_{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$. Предел всякой подпоследовательности последовательности, имеющей конечный или бесконечный предел, равен пределу всей последовательности, поэтому из (36) имеем $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = M$. Переходя в $a_{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$ к пределу при $k\to\infty$, получаем $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$.

С другой стороны, в силу непрерывности функции f на отрезке $[a,b]$, она непрерывна в точке x_0 этого отрезка и, следовательно, из (39) вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Из $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ получаем $f(x_0) = M$.

Таким образом, доказано, что верхняя грань M функции f совпадает со значением функции в точке x_0 и, следовательно, конечна. Тем самым функция f ограничена сверху и её точная верхняя грань достигается в точке $x_0 \in [a,b]$.

Аналогично доказывается, что непрерывная на отрезке функция ограничена снизу и достигает на нём своей точной нижней грани.

Теорема, аналогичная теореме Вейерштрасса, *несправедлива для промежутков, не являющихся отрезками*. Например, функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке интервала $(0,1)$ и вместе с тем неограничена на нём; функция $y = x$ непрерывна на всей вещественной оси и неограничена на ней.

4.5 Промежуточные значения непрерывных функций. Теорема Больцано–Коши и следствия из неё

Теорема 39 (Больцано–Коши). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, то для любого C, заключённого между A и B, существует такая точка $\xi\in[a,b]$, что $f(\xi)=C$.

Иначе говоря, непрерывная на отрезке функция, принимая какие-либо два значения, принимает и любое лежащее между ними значение.

Доказательство. Пусть для определённости мы имеем неравенства $f(a)=A<C<B=f(b)$. Разделим отрезок $[a,b]$ точкой x_0 на два равных по длине отрезка, тогда либо $f(x_0)=C$ и, значит, искомая точка $\xi=x_0$ найдена, либо $f(x_0)\neq C$, и тогда на концах одного из полученных отрезков функция f принимает значения, лежащие по разные стороны от числа C, точнее – на левом конце значение, меньшее C, на правом – большее.

Обозначим этот отрезок $[a_1,b_1]$ и разделим его снова на два равных по длине отрезка и т.д. В результате либо через конечное число шагов придём к искомой точке ξ, в которой $f(\xi)=C$, либо получим систему вложенных отрезков $[a_n,b_n]$, таких, что

$$f(a_n) < C < f(b_n).$$

Длина отрезков этой системы стремится к нулю, следовательно, отрезки образуют последовательность стягивающихся отрезков и имеют единственную общую точку. Пусть ξ – общая точка всех отрезков $[a_n,b_n]$, $n = 1,2,\ldots$. Как известно, $\xi=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Поэтому в силу непрерывности функции f

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Из $f(a_n)<C<f(b_n)$ получим

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \le C \le \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Из $f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ и $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \le C \le \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ следует, что $f(\xi) = C$.

Следствие 6. Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разного знака, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в нуль.

Это следствие – частный случай теоремы 39.

Пример 46. Покажем, что уравнение

$$x^{17} + 100x^2 + 107 = 0$$

имеет решение.

Пусть $f(x) = x^{17} + 100x^2 + 107$. Легко видеть, что $f(-2) = -130565 < 0$, а $f(0) = 107 > 0$, поэтому, в силу следствия 6, на промежутке $(-2, 0)$ уравнение $x^{17} + 100x^2 + 107 = 0$ имеет корень.

Следствие 7. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $M = \sup f$, $m = \inf f$. Тогда функция f принимает все значения из отрезка $[m, M]$ и только эти значения.

Доказательство. Для доказательства заметим, что если $M = \sup_{[a,b]} f$, $m = \inf_{[a,b]} f$, то $m \le f(x) \le M$ и, согласно теореме Вейерштрасса 38, существуют такие точки $\alpha \in [a, b]$ и $\beta \in [a, b]$, что $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Теперь рассматриваемое следствие непосредственно вытекает из теоремы Больцано–Коши 39, применённой к отрезку $[\alpha, \beta]$, если $\alpha < \beta$, или соответственно к отрезку $[\beta, \alpha]$, если $\beta < \alpha$.

Таким образом, *множество всех значений функции, заданной и непрерывной на некотором отрезке, представляет собой также отрезок.*

Отметим, что свойство непрерывных функций принимать все промежуточные значения справедливо для любого промежутка (конечного или бесконечного).

4.6 Теорема существования, монотонности и непрерывности обратной функции у монотонной непрерывной функции

Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}$ имеется некоторая функция $y=f(x)$, причём x играет роль аргумента. Функция, которая определяется той же функциональной зависимостью $y=f(x)$, если в ней рассматривать y как аргумент, а x как функцию: $x=g(y)$ называется *обратной* по отношению к данной функции $f(x)$.

Лемма 5. Пусть функция f строго возрастает (строго убывает) на некотором множестве $X\subset\mathbb{R}$ и пусть Y – множество её значений. Тогда обратная функция f^{-1} является однозначной строго возрастающей (строго убывающей) функцией на множестве Y.

Доказательство. Пусть для определённости функция f строго возрастает на множестве X. Докажем, что обратная функция однозначна.

Допустим противное. Пусть существует такая точка $y\in Y$, что множество $f^{-1}(y)$ содержит по крайней мере две различных точки x_1 и x_2:

$$x_1 \in f^{-1}(y), \;\; x_2 \in f^{-1}(y), \;\; x_1 \neq x_2,$$

и следовательно, $f(x_1)=f(x_2)$.

Для двух чисел x_1 и x_2, $x_1\neq x_2$, справедливо одно из двух неравенств: $x_1<x_2$ или $x_1>x_2$; в первом случае в силу строгого возрастания функции f имеем $f(x_1)<f(x_2)$, а во втором

$f(x_1)>f(x_2)$, т.е. в обоих случаях равенство $f(x_1)=f(x_2)$ не выполняется. Таким образом, для каждого $y\in Y$ множество $f^{-1}(y)$ состоит в точности из одной точки, т.е. функция f^{-1} однозначна.

Докажем теперь, что функция f^{-1} строго возрастает на множестве Y. Пусть

$$y_1 < y_2, \quad y_1 \in Y, \quad y_2 \in Y,$$

и пусть $x_1=f^{-1}(y_1)$, $x_2=f^{-1}(y_2)$. Следовательно, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$. Для любых двух чисел x_1 и x_2 справедливо одно из трёх соотношений: либо $x_1>x_2$, либо $x_1=x_2$, либо $x_1<x_2$. Если $x_1>x_2$ или $x_1=x_2$, то соответственно было бы $y_1>y_2$ (в силу строго возрастания функции f) или $y_1=y_2$ (в силу однозначности), что противоречило бы неравенству $y_1<y_2$. Таким образом, из неравенства $y_1<y_2$ следует, что $x_1<x_2$, а это и означает строгое возрастание функции f^{-1} на множестве Y.

В случае строго убывающей на множестве функции f доказательство можно либо провести аналогичным образом, либо свести к уже рассмотренному случаю рассмотрением функции $-f$.

Теорема 40. Пусть функция f определена, строго возрастает (строго убывает) и непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда обратная функция f^{-1} определена, однозначна, строго возрастает (строго убывает) и непрерывна на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство. Проведем доказательство теоремы для строго возрастающих функций. Пусть $c=f(a)$, $d=f(b)$.

Покажем, что областью определения обратной функции f^{-1} является сегмент $[c,d]$, или, что то же, $[c,d]$ является множеством значений функции f. В самом деле, из строгого возрастания функции f следует, что $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$, т.е. что $f(x)\in[c,d]$

для любого $x\in[a,b]$. С другой стороны, каково бы ни было $y\in[c,d]$, т.е. $f(a)\le y\le f(b)$, согласно теореме 39 Больцано–Коши существует такая точка $x\in[a,b]$, что $f(x)=y$. Таким образом, все значения заданной функции f лежат на отрезке $[c,d]$, и каждая точка этого отрезка является значением функции f в некоторой точке. Это и означает, что отрезок $[c,d]$ является множеством значений функции f.

В силу леммы 5 функция f^{-1} однозначна и строго возрастает на отрезке $[c,d]$.

Покажем, наконец, что функция f^{-1} непрерывна на $[c,d]$. Пусть $y_0\in[c,d]$ и $x_0=f^{-1}(y_0)$. Пусть $c<y_0<d$, т.е. y_0 – внутренняя точка отрезка $[c,d]$, тогда в силу строгого возрастания функции f^{-1} и $a<x_0<b$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon>0$. Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, можно считать, что ε таково, что $a\le x_0-\varepsilon<x_0<x_0+\varepsilon\le b$.

Пусть $y_1=f(x_0-\varepsilon)$, $y_2=f(x_0+\varepsilon)$. Тогда из условия $a\le x_0-\varepsilon<x_0<x_0+\varepsilon\le b$ в силу строгого возрастания функции f следует, что

$$c \le y_1 < y_0 < y_2 \le d.$$

Возьмём $\delta>0$ так, чтобы $y_1\le y_0-\delta<y_0+\delta\le y_2$. Если теперь выбрать y так, что $y_0-\delta<y<y_0+\delta$, то тем более $y_1<y<y_2$, и, следовательно, в силу строгого возрастания функции f^{-1} справедливо неравенство $x_0-\varepsilon=f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_2)=x_0+\varepsilon$.

Таким образом, для $\varepsilon>0$ указано такое $\delta>0$, что для всех $y\in(y_0-\delta,y_0+\delta)$ выполняется неравенство $|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$, т.е. функция f^{-1} непрерывна в точке y_0. Если теперь $y_0=c$ или $y_0=d$, то аналогичными рассуждениями доказывается, что функция f^{-1} непрерывна справа в точке c и непрерывна слева в точке d.

Теорема для строго возрастающих функций доказана.

Напомним, что функция f строго убывает тогда и только тогда, когда функция $-f$ строго возрастает, поэтому справедливость теоремы для строго убывающих функций следует из рассмотренного случая.

Теорема 41. Пусть функция f определена, строго возрастает (строго убывает) и непрерывна на интервале (a,b) (конечном или бесконечном) и пусть

$$c = \lim_{x\to a+0} f(x), \quad d = \lim_{x\to b-0} f(x).$$

Тогда обратная функция f^{-1} определена, однозначна, строго возрастает (строго убывает) и непрерывна на интервале (конечном или бесконечном) с концами c и d.

При этом, в случае, когда $a{=}-\infty$, под $\lim\limits_{x\to-\infty+0} f(x)$ понимается предел $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, а в случае $b{=}+\infty$ под пределом $\lim\limits_{x\to+\infty-0} f(x)$ понимается предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Теорема 41 доказывается аналогично теореме 40.

Замечание 14. Если функция строго возрастает и непрерывна на полуинтервале $[a,b)$, $-\infty{<}a{<}b{\le}+\infty$, или на $(a,b]$, $-\infty{\le}a{<}b{<}+\infty$, то обратная функция определена, строго возрастает и непрерывна на полуинтервале $[c,d)$, где $c{=}f(a)$, $d{=}\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, соответственно на $(c,d]$, где $c{=}\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $d{=}f(b)$.

4.7 Непрерывность элементарных функций

Многочлены и дробно-рациональные функции

Покажем сначала непрерывность степенной функции $y{=}x^n$, $n{\in}\mathbb{N}$.

Действительно, если $0{\le}x_1{<}x_2$, то, перемножая n раз эти неравенства, получим $x_1^n{<}x_2^n$, т.е. функция $y{=}x^n$ строго возрастает.

Для доказательства непрерывности $y=x^n$ заметим, что функция $y=x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Действительно, в этом случае $y_0=x_0$, поэтому

$$\Delta y = y - y_0 = x - x_0 = \Delta x.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$, полагая $\delta=\varepsilon$, получим, что из условия $|\Delta x|<\delta$ следует $|\Delta y|=|\Delta x|<\delta=\varepsilon$. Это и означает непрерывность функции $y = x$ в точке x_0. Функция же $y=x^n$ является произведением n одинаковых функций $y=x$ и потому также непрерывна во всех точках $x \in \mathbb{R}$.

Из $\lim\limits_{x \to +\infty} x=+\infty$ следует, что $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n=+\infty$, $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, в нуле функция $y=x^n$ обращается в нуль. Поэтому, согласно замечанию к теореме 41, множеством значений степенной функции $y=x^n$ при $x \geq 0$ является неотрицательная полуось $y \geq 0$.

Обратной функцией для функции $y=x^n$ является корень n-й степени $\sqrt[n]{y}$, $n \in \mathbb{N}$. Согласно теореме 41 и в силу доказанных свойств степенной функции $y=x^n$ корень n-й степени $\sqrt[n]{y}$, $n \in \mathbb{N}$, определён для любого неотрицательного y.

Отсюда следует существование и единственность положительного корня n-й степени из любого положительного числа.

Теорема 42. Любой многочлен

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

непрерывен в каждой точке.

Доказательство. В самом деле, функция y=const, где const – постоянная, непрерывна, что показано в примере 42.

Функции вида $y=x^n$ также непрерывны для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ в любой точке x. Всякий же многочлен получается из функций вида $y=a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $y=x^k$, $k=0, 1, \ldots, n$ с помощью сложения и умножения, и поэтому является непрерывной функцией в каждой точке.

Теорема 43. Всякая рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$, ($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывна во всех точках, в которых её знаменатель не обращается в нуль.

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из того, что многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны в каждой точке и частное непрерывных функций также непрерывно во всех точках, где делитель не обращается в нуль.

Эту теорему удобно использовать при нахождении пределов рациональных функций. Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$. Для этого нужно сначала произвести (если, конечно, это возможно) сокращение дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на множитель $(x - x_0)^n$ с наибольшим возможным показателем $n \geq 1$.

Пример 47. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$.

Показательная, логарифмическая и степенная функции

Нам известна показательная функция a^r, где $a{>}0$, $r{\in}\mathbb{Q}$. А именно, если $r{=}\frac{m}{n}{\in}\mathbb{Q}$, $m{\in}\mathbb{Z}$, $n{\in}\mathbb{N}$, то a^r определяется по следующим правилам.

1. Если $r > 0$, то $a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

2. Если $r = 0$ и $a \neq 0$, то $a^r = 1$.

3. Значение 0^0 не определено. Это выражение может быть интерпретировано посредством предельного перехода.

4. Если $r < 0$ и $a > 0$, то $a^r = \frac{1}{a^{|r|}}{=}\frac{1}{\sqrt[n]{a^{|m|}}}$.

Для произвольного вещественного показателя $x{\in}\mathbb{R}$ значение a^x можно определить как предел последовательности a^{r_n} при $\lim\limits_{n\to\infty} r_n{=}x$, $r_n{\in}\mathbb{R}$.

Определение 55. Пусть задано некоторое число $a>0$ и для произвольного $x\in\mathbb{R}$ взята последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=x$, $r_n\in\mathbb{R}$. Функция $y=a^x$, определённая для всех $x\in\mathbb{R}$ как предел $a^x=\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n}$, называется *показательной функцией с основанием a*.

Согласно определению $1^x=1$ для всех действительных x. Поэтому случай $a=1$ не представляет интереса для изучения и в дальнейшем мы не будем его рассматривать.

Показательная функция a^x $(a>0)$ обладает следующими свойствами.

1. При $a>1$ она строго возрастает, а при $a<1$ – строго убывает на всей числовой оси.

2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

3. $(a^x)^y = a^{xy}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

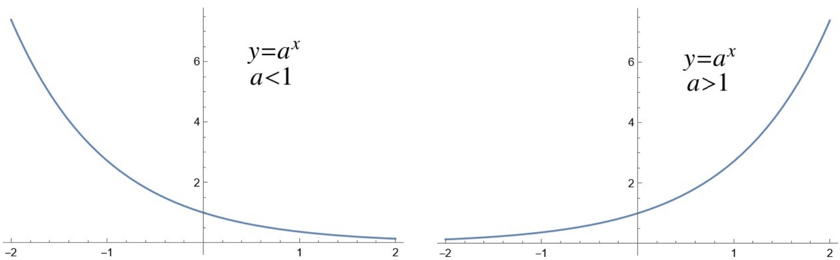


Рис. 6: Показательная функция

Теорема 44. Показательная функция a^x непрерывна в каждой точке числовой оси.

Доказательство. Докажем непрерывность показательной функции a^x при любом значении $x=x_0$, т.е. установим, что

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

Покажем сначала,что

$$\lim_{x\to 0} a^x=1.$$

В силу примера 22 имеем

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1.$$

Пусть $a>1$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $N\in\mathbb{N}$, что

$$1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon.$$

Если теперь $|x|<\frac{1}{N}$ или $-\frac{1}{N}<x<\frac{1}{N}$, то

$$a^{-\frac{1}{N}} < a^x < a^{\frac{1}{N}},$$

следовательно

$$1-\varepsilon < a^x < 1+\varepsilon$$

или

$$|a^x-1| < \varepsilon.$$

Случай $a<1$ доказывается аналогично.

Так как $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$ и 1 как раз есть значение a^0 нашей функции, то это равенство выражает непрерывность показательной функции в точке $x=0$. Отсюда перейдём к любой точке, действительно

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0}-1),$$

но при $x\to x_0$, очевидно, $x-x_0\to 0$, так что

$$a^{x-x_0}\to 1 \Rightarrow a^x \to a^{x_0}.$$

Что и требовалось доказать.

Пусть a — положительное число, $a\neq 1$. Из элементарной математики известно, что операция, обратная возведению в степень и ставящая в соответствие данному числу $x>0$ такое число

y, что $a^y=x$ (если, конечно, указанное y существует), называется логарифмированием по основанию a. Число y называется логарифмом числа x по основанию a и обозначается $\log_a x$. Таким образом, по определению

$$a^{\log_a x} = x, \quad a > 0, a \neq 1.$$

При $a=e$ логарифм числа x обозначается $\ln x$ и называется натуральным логарифмом числа x.

Определение 56. Функция, ставящая в соответствие каждому числу x его логарифм $\log_a x$ по основанию a ($a>0$, $a\neq 1$), если этот логарифм существует, называется *логарифмической функцией*.

Она имеет следующие свойства:

1. $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad x_1 > 0, x_2 > 0.$
2. $\log_a x^b = b \log_a x, \quad x > 0, b \in \mathbb{R}.$

Теорема 45. Функция $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, определена для всех $x>0$ и является на этом множестве строго монотонной (строго возрастающей при $a>1$ и строго убывающей при $a<1$) непрерывной функцией (см. рис. 7).

Утверждение этой теоремы следует из теоремы 41.

Определение 57. Пусть задано действительное число α. Функция x^α, определённая для всех $x>0$, называется *степенной функцией с показателем* α.

Теорема 46. Степенная функция x^α непрерывна при всех $x>0$.

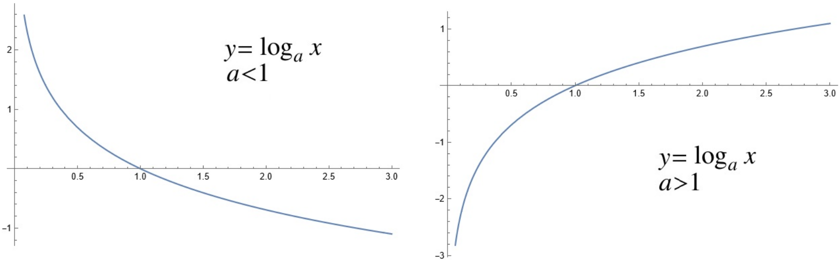


Рис. 7: Логарифмическая функция

Доказательство. Действительно, из определения логарифма имеем $x = e^{\ln x}$, а поэтому $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, т.е. x^α – есть суперпозиция показательной функции e^u и логарифмической функции, умноженной на постоянную: $u = \alpha \ln x$. Показательная и логарифмическая функции непрерывны, поэтому в силу теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций функция x^α также непрерывна.

При рассмотрении функции x^α предполагалось, что $x > 0$, так как при $x \leq 0$ выражение x^α имеет смысл не для всех α в области действительных чисел. Однако если α рационально и x^α имеет смысл при $x < 0$ (например, x^2, $\frac{1}{x^3}$, $\sqrt[5]{x}$), то функция x^α будет при $\alpha > 0$ непрерывной на всей действительной оси, а при $\alpha < 0$ – на всей действительной оси, кроме точки $x = 0$.

Мы будем использовать геометрические определения тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратных тригонометрических функций $\operatorname{arctg} x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, известные из элементарной математики.

Слово “sinus” переводится с латинского как “изгиб”, “кривая”. Из словосочетания “complementi sinus” (“дополнение синуса”) произошло слово “косинус”. Слово тангенс происходит от латинского “tangens” – “касающийся”, что объясняется определением тангенса. Котангенс – “дополнение тангенса”.

Лемма 6. При любом действительном x справедливо неравенство
$$|\sin x| \leq |x|.$$

Доказательство. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в точке O. Пусть радиус OA образует угол x, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, с осью Ox, а радиус OC симметричен радиусу OA относительно оси Ox (см. рис. 8).

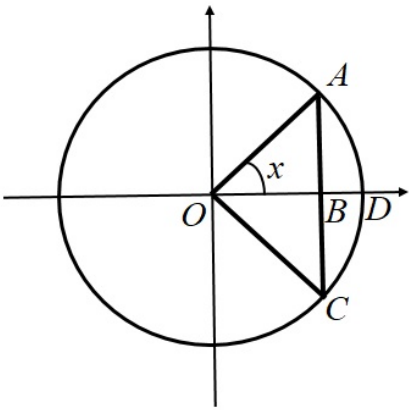


Рис. 8: Круг.

Проведём из точки A перпендикуляр к оси Ox в точку C. Точку пересечения этого перпендикуляра с осью Ox обозначим B. Тогда $AB = R\sin x$, и так как $AB = BC$, будем иметь $AC = 2R\sin x$. Как известно, длина дуги ADC равна $2Rx$. Длина отрезка, соединяющего две точки, не превышает длины дуги окружности, соединяющей те же точки, значит, $2R\sin x \leq 2Rx$, т.е. $\sin x \leq x$.

Если теперь $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$, то $0 < -x \leq \frac{\pi}{2}$, и поэтому, в силу доказанного, $\sin(-x) \leq -x$. Следовательно, $|\sin x| \leq |x|$, если $|x| \leq \frac{\pi}{2}$. Если же $|x| > \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} < |x|$.

Теорема 47. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ непрерывны на всей действительной оси.

Доказательство. Так как $|\sin\alpha|\leq 1$, $|\cos\alpha|\leq 1$ при любом α, в силу леммы $\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\leq\frac{1}{2}|\Delta x|$, то

$$|\sin(x+\Delta x)-\sin x| = 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq |\Delta x|,$$

$$|\cos(x+\Delta x)-\cos x| = 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq |\Delta x|.$$

Отсюда следует, что при $\Delta x\to 0$ левые части неравенства также стремятся к нулю. Это и означает непрерывность функций $y=\sin x$, $y=\cos x$.

Следствие 8. Функции $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ непрерывны при всех x, при которых $\cos x$, соответственно $\sin x$, не обращаются в нуль.

Доказательство. Непрерывность $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ в точках, в которых знаменатели не обращаются в нуль, следует из непрерывности $\sin x$ и $\cos x$ и теоремы о частном непрерывных функций.

Теорема 48. Обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны в области их определения.

Доказательство. Это сразу следует из теоремы 41 и из непрерывности и строгой монотонности функций: $\sin x$ на отрезке $[-\pi/2,\pi/2]$; $\cos x$ на отрезке $[0,\pi]$; $\operatorname{tg} x$ на интервале $(-\pi/2,\pi/2)$ и $\operatorname{ctg} x$ на интервале $(0,\pi)$.

В математике, механике, электротехнике и других областях активно применяются гиперболические функции. К этим функциям относят *гиперболический синус*

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (40)$$

и *гиперболический косинус*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{41}$$

Эти функции определены на всей вещественной оси и обладают некоторыми свойствами, похожими на свойства обычных (круговых) синусов и косинусов, например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x, \qquad \operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

Гиперболический тангенс имеет вид

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \tag{42}$$

а *гиперболический котангенс* выражается формулой

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}. \tag{43}$$

4.8 Первый и второй замечательные пределы

Теорема 49. Справедливо равенство

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

которое называется *первым замечательным пределом.*

Доказательство. Рассмотрим круг радиуса R с центром в точке O. Пусть радиус OB образует угол x, $0<x<\frac{\pi}{2}$, с радиусом OA. Соединим точки A и B отрезком и проведём из точки A перпендикуляр к радиусу OA до пересечения в точке C с продолжением радиуса OB (рис. 9).

Тогда площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2}R^2 \sin x$, площадь сектора AOB равна $\frac{1}{2}R^2 x$, а площадь треугольника AOC равна $\frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$. Треугольник AOB является частью сектора AOB,

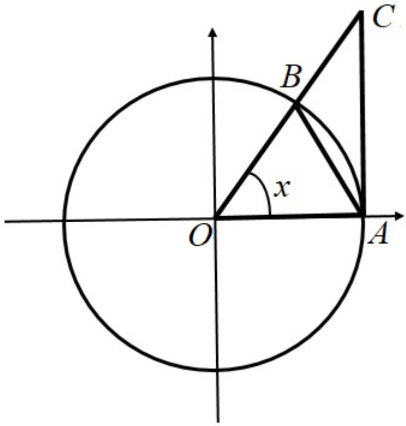


Рис. 9: Первый замечательный предел.

который в свою очередь является частью треугольника AOC, поэтому

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x,$$

откуда

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

следовательно,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или, заменяя величины им обратными, имеем

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

причём в силу чётности $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ это неравенство справедливо и при $-\frac{\pi}{2}<x<0$.

Так как функция $\cos x$ непрерывна и $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, то по свойству пределов функции 5 получаем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Следствие 9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$.

Доказательство. Применив свойство пределов 6, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

Следствие 10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}{=}1.$

Доказательство. Произведем замену $\arcsin x{=}y$, тогда $x{=}\sin x$ и при $x{\to}0$ имеем, что $y{\to}0$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1.$$

Следствие 11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}{=}1.$

Теорема 50. Справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

которое называется *вторым замечательным пределом.*

Доказательство. Известен предел последовательности (см. теорему 22 и формулу (22))

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

В силу утверждения 6 для бесконечно большой последовательности с $\{n_k\}$, такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$$

Возьмём последовательность $\{x_k\}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k{=}{+}0$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0, \quad x_k > 0. \tag{44}$$

Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=e$. При этом без ограничения общности можно считать, что $x_k<1$, $k=1,2,\ldots$. Для всякого x_k найдётся такое натуральное n_k, что

$$n_k+1>\frac{1}{x_k}\geq n_k$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{n_k+1}<x_k\leq\frac{1}{n_k},$$

причём в силу (44) $\lim\limits_{k\to\infty}n_k=+\infty$. Поэтому имеем

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}<(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \tag{45}$$

Замечая, что в силу того, что $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)}=e$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)=e$$

и переходя к пределу в неравенстве (45) при $k\to\infty$, получим

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=e.$$

Поскольку $\{x_k\}$ – произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям (44), то тем самым доказано, что

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Пусть теперь последовательность $\{x_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k{=}-0$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0, \qquad x_k < 0. \tag{46}$$

Положим $y_k{=}-x_k$, тогда $y_k{>}0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} y_k{=}0$, причём без ограничения общности можно считать, что $y_k{<}1$, $k{=}1,2,\ldots$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{k\to\infty}(1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} = \lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{\frac{1}{z_k}+1},$$

где $z_k{=}\frac{y_k}{1-y_k}{>}0$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k{=}0$ и в силу уже доказанного

$$\lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{\frac{1}{z_k}+1} = \lim_{k\to\infty} 1+z_k)^{\frac{1}{z_k}} \lim_{k\to\infty}(1+z_k) = e.$$

Но $\{x_k\}$ была произвольной последовательностью, удовлетворяющей условиям (46), поэтому

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Таким образом, функция $(1{+}x)^{\frac{1}{x}}$, $x{\neq}0$, имеет в точке 0 пределы слева и справа, равные одному и тому же числу e. Поэтому существует и её двусторонний предел при $x{\to}0$, также равный числу e.

Следствие 12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

Доказательство. В самом деле, используя непрерывность логарифмической функции, непрерывность суперпозиции функций и второй замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \log_a \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{47}$$

Следствие 13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad a > 0,\ a \neq 1.$

Доказательство. Функция $y{=}a^x{-}1$ строго монотонна и непрерывна на всей вещественной оси, поэтому обратная функция $x{=}\log_a(1+y)$ также строго монотонна и непрерывна при $y{>}{-}1$. Поскольку при $x{=}0$ имеем также и $y{=}0$, то обозначения $x{\to}0$ и $y{\to}0$ эквивалентны. Применим для вычисления предела правило замены переменного (35). Положив $y{=}a^x{-}1$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}} = \ln a.$$

В частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \tag{48}$$

Следствие 14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu.$

Доказательство. Используя (47) и (48), имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\cdot\frac{\mu\ln(1+x)}{x} =$$

$$= \mu\lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \mu.$$

4.9 Сравнение функций. Символы Ландау: O и o

Все рассматриваемые в этом пункте функции определены на некоторой фиксированной проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 расширенной числовой прямой: $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, причём эта окрестность может быть и односторонней. Поэтому каждый раз не будем оговариваться, что $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$.

“O” большое и “o” малое – математические обозначения для сравнения асимптотического поведения функций. Используются в различных разделах математики, но больше всего – в математическом анализе, в теории чисел и комбинаторике, а также при оценке сложности алгоритмов.

Определение 58. Если для двух функций f и g существуют такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0)$ и постоянная $c>0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{V}(x_0)$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq c|g(x)|,$$

то функция f называется *ограниченной по сравнению с функцией g* в $\overset{\circ}{V}(x_0)$ и пишется

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0$$

(читается: $f(x)$ есть O большое от $g(x)$ при x, стремящемся к x_0).

Подчеркнём, что запись $x \to x_0$ имеет здесь другой, чем обычно, смысл: она только указывает на то, что рассматриваемое свойство имеет место лишь в некоторой окрестности точки x_0; ни о каком пределе здесь речи нет.

Лемма 7. Если $f(x)=\varphi(x)g(x)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)=k$, то $f(x)=O(g(x))$, $x \to x_0$.

Доказательство. Из существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=k$, согласно свойству пределов функции 1, следует существование такой проколотой окрестности $\overset{\circ}{V}(x_0)$ точки x_0, что функция φ на ней ограничена, т.е. имеется такая постоянная $c>0$, что для всех $x\in\overset{\circ}{V}(x_0)$ выполняется неравенство $|\varphi(x)|\le c$, а следовательно, и неравенство

$$|f(x)| = |\varphi(x)||g(x)| \le c|g(x)|.$$

Это и означает, что $f(x)=O(g(x))$, $x\to x_0$.

Пример 48. Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x}$. Для этой функции имеем $\frac{1}{x}=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x\to 0$, т.к. $\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{1}{x^2}$ при $|x|\le 1$.

Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x^2}$. Для этой функции имеем $\frac{1}{x^2}=O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to\infty$, т.к. $\frac{1}{x^2}<\left|\frac{1}{x}\right|$ при $|x|\ge 1$.

Запись $f(x)=O(1)$ при $x\to x_0$ означает, что функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0, например, $\frac{\operatorname{tg}2x}{x}=O(1)$ при $x\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{x}=2$, и значит, функция $\frac{\operatorname{tg}2x}{x}$ ограничена в окрестности точки $x=0$.

Определение 59. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f=O(g)$ и $g=O(f)$ при $x\to x_0$, то они называются функциями *одного порядка при* $x\to x_0$; это записывается в виде

$$f(x)\asymp g(x),\quad x\to x_0$$

или

$$f(x)=O^*(g(x)),\quad x\to x_0.$$

Это понятие наиболее содержательно в том случае, когда функции f и g являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x\to x_0$.

Лемма 8. Если $g(x)\neq 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$, то $f(x)=O^*(g(x))$, $x\to x_0$.

Доказательство. Обозначим $\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. Тогда $f(x)=\varphi(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=k$, следовательно, по лемме 7 $f(x)=O(g(x))$, $x\to x_0$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\neq 0$, существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(x_0)$ точки x_0, что для всех $x\in\overset{\circ}{V}(x_0)$ имеем $\frac{f(x)}{g(x)}\neq 0$ (см. свойство пределов 2), а следовательно, и $f(x)\neq 0$.

Для $x\in\overset{\circ}{V}(x_0)$ положим $\psi(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$, тогда $g(x)=\psi(x)f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}=\frac{1}{k}$. Поэтому, согласно лемме 7, $g(x)=O(f(x))$, $x\to x_0$.

Пример 49. Рассмотрим функцию $f(x)=x$. Эта функция бесконечно малая при $x\to 0$ и одного порядка с ней при $x\to 0$ будет бесконечно малая $\sqrt[m]{1+x}-1$, поскольку по следствию 14 имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{m},$$

следовательно, $x\asymp\sqrt[m]{1+x}-1$, $x\to 0$ или $\sqrt[m]{1+x}-1=O^*(x)$, $x\to 0$.

Определение 60. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными при* $x\to x_0$, если в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 определена такая функция $\varphi(x)$, что

$$f(x)=\varphi(x)g(x)$$

и

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1.$$

Обозначение $f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$.

Эквивалентность двух функций обладает свойством симметричности:

$$f(x)\sim g(x),\quad x\to x_0\Leftrightarrow g(x)\sim f(x),\quad x\to x_0.$$

Пример 50. При $x \to 0$ справедлива следующая эквивалентность бесконечно малых:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

Пример 51. Если функция $u(x)$ такова, что $\lim\limits_{x \to x_0} u(x)=0$, то при $x \to x_0$

$$u(x) \sim \sin u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \arcsin u(x) \sim$$
$$\sim \operatorname{arctg} u(x) \sim \ln(1+u(x)) \sim e^{u(x)} - 1.$$

Определение 61. Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполнено

$$\alpha(x) = \varepsilon(x) f(x),$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x)=0$, то функция α называется *бесконечно малой по сравнению с функцией f при $x \to x_0$* и пишется $\alpha=o(f)$, $x \to x_0$ (читается “α есть o малое от f при x, стремящемся к x_0”).

Пусть f и g – бесконечно малые при $x \to x_0$. Если $f \neq 0$ и отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ оказывается бесконечно малым при $x \to x_0$, то бесконечно малая $f(x)$ является *бесконечно малой более высокого порядка*, чем бесконечно малая $g(x)$ при $x \to x_0$.

Если

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^p} = k \neq 0, \quad p>0,$$

то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой порядка p относительно бесконечно малой x*.

Теорема 51. Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентными при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы при $x \to x_0$ выполнялось условие

$$f(x) = g(x) + o(g(x)).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \sim g$ при $x \to x_0$, т.е. $f(x) = \varphi(x) g(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$. Тогда

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) = [\varphi(x) - 1]g(x) = \varepsilon(x)g(x),$$

где $\varepsilon(x) = \varphi(x) - 1 \to 0$ при $x \to x_0$, имеем $f(x) = g(x) + o(g(x))$.

Достаточность. Пусть выполняется $f(x) = g(x) + o(g(x))$, т.е. $f(x) = g(x) + \varepsilon(x) g(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Тогда

$$f(x) = [1 + \varepsilon(x)]g(x) = \varphi(x)g(x),$$

где $\varphi(x) = 1 + \varepsilon(x) \to 1$ при $x \to x_0$ т.е. $f \sim g$ при $x \to x_0$.

Теорема 52. Пусть $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$. Тогда если существует

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Доказательство. Условие $f \sim f_1$ при $x \to x_0$ означает, что $f(x) = \varphi(x) f_1(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$, а условие $g \sim g_1$ при $x \to x_0$ — что $g(x) = \psi(x) g_1(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = 1$. Кроме того, поскольку существует при $x \to x_0$ предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, функция $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и, следовательно, всюду в этой окрестности выполняется условие $g_1(x) \neq 0$. Поскольку $g(x) = \psi(x) g(x_1)$ и $\psi(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то и функция $g(x)$ обладает тем же свойством. Поэтому функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Теперь имеем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) f_1(x)}{\psi(x) g_1(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Определение 62. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – функции, определённые в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Если функция $\beta(x)$ представима в виде

$$\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x)), \quad x \to x_0,$$

то функция $\alpha(x)$ называется *главной частью функции* $\beta(x)$ *при* x *стремящемся к* $x_0 \in \mathbb{R}$.

5 Раздел 5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Дифференцируемость функции и её производная представляют собой основные понятия математического анализа. Производная характеризует скорость изменения функции по отношению к переменной. Производные имеют основополагающее значение для дифференциальных уравнений. Как правило, наблюдая за изменяющимися системами (динамическими системами), получают скорость изменения некоторой величины и, используя эту информацию, составляют дифференциальное уравнение или систему. Решение полученной задачи можно использовать для прогнозирования поведения исходной переменной. Геометрически производную функции можно интерпретировать как наклон касательной к графику данной функции в точке.

5.1 Производная функции в точке. Определение односторонних производных

Определение 63. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть x – произвольная точка этой окрестности. Если отношение

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

имеет предел при $x \to x_0$, то этот предел называется *производной функции f в точке* x_0 (или, что то же, при $x = x_0$) и обозначается $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{49}$$

Если ввести обозначение $\Delta x = x - x_0$, то определение (49) запишется в виде

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Полагая $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, опуская обозначения аргумента и обозначая производную просто через y', получим еще одну запись определения производной:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если для некоторого значения x_0 существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что при $x = x_0$ существует *бесконечная производная*, равная, соответственно, $+\infty$ или $-\infty$. Подчеркнём, что под бесконечной производной понимается только бесконечность определённого знака.

В дальнейшем под выражением “функция имеет производную” мы будем понимать всегда наличие конечной производной, если не оговорено противное.

Определение 64. Если функция f определена в некоторой правосторонней (левосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный (определённого знака) предел

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \left(\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right),$$

то он называется, соответственно, конечной или бесконечной *правой (левой) производной функции* f *в точке* x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$ (или $f'_-(x_0)$).

Правая и левая производные называются *односторонними производными*.

Из теоремы об односторонних пределах следует, что функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ существуют и $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$. В этом случае $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

Если функция $f(x)$ определена на некотором промежутке и в каждой его точке существует производная (причём под производной в его конце, который принадлежит промежутку, естественно понимается соответствующая односторонняя производная), то она, очевидно, также является функцией, определённой на данном промежутке; её обозначают через $f'(x)$. Если $y = f(x)$, то вместо $f'(x_0)$ пишут также $y'|_{x=x_0}$.

Вычисление производной от функции называется *дифференцированием*.

Пример 52. 1. Найдём производную от константы $y=c=\text{const}$. Имеем

$$\Delta y = c - c = 0, \qquad y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \qquad c' = 0.$$

2. Найдём производную от синуса и косинуса. Для $y=\sin x$ имеем

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x,$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Для $y = \cos x$ получим

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

3. Для показательной функции $y=a^x$ запишем

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0}\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

В частности,

$$(e^x)' = e^x.$$

4. Для степенной функции с натуральным показателем $y=x^n$, $n \in \mathbb{N}$, используем формулу бинома Ньютона

$$\Delta y = (x - \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n,$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x) + \ldots + (\Delta x)^{n-1}\right) = nx^{n-1},$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

5.2 Определение функции, дифференцируемой в точке. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью в точке

Определение 65. Функция $y=f(x)$, определённая в некоторой окрестности точки x_0, называется *дифференцируемой при* $x=x_0$, если её приращение в этой точке

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \ \ \Delta x = x - x_0,$$

представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где A – постоянная и $\alpha(\Delta x)=o(\Delta x)$ при $\Delta x\to 0$.

Линейная функция $A\Delta x$ (от Δx) называется *дифференциалом функции* f *в точке* x_0 и обозначается $df(x_0)$ или dy.

Таким образом,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

$$dy = A\Delta x.$$

Если $A\neq 0$, то при $\Delta x\to 0$ приращение Δy и дифференциал dy – эквивалентные бесконечно малые.

Если $A=0$, то $\Delta y=o(\Delta x)$ при $\Delta x\to 0$. Таким образом, при $A=0$ приращение Δy является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx, когда $\Delta x\to 0$.

Для большей симметрии записи дифференциала приращение Δx обозначают dx и называют его *дифференциалом независимого переменного*. Таким образом, дифференциал можно записать в виде

$$dy = A dx.$$

Если функция f дифференцируема в каждой точке некоторого интервала, то её дифференциал является функцией двух переменных – точки x и переменной dx:

$$dy = A(x)dx.$$

Выясним теперь связь между дифференцируемостью в точке и существованием производной в той же точке.

Теорема 53. Для того чтобы функция f была дифференцируемой в некоторой точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела е этой точке производную, при этом

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, т.е. при $\Delta x \to 0$

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Поэтому производная $f'(x_0)$ существует и равна A. Отсюда $dy = f'(x_0)dx$.

Достаточность. Пусть существует производная $f'(x_0)$, т.е. существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$, и для $\Delta x \neq 0$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x. \tag{50}$$

Так как $\varepsilon(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то выполнение равенства (50) и означает дифференцируемость функции f в точке x_0.

В теореме 53 речь идёт о конечной производной.

Таким образом, дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0 равносильна существованию в этой точке конечной производной $f'(x_0)=A$.

Из формулы $dy=f'(x_0)dx$ находим $y'=\frac{dy}{dx}$. Правая часть представляет собой дробь, числитель которой – дифференциал функции, а знаменатель – дифференциал аргумента.

Формула $dy=f'(x_0)dx$ позволяет находить дифференциалы функций, если известны их производные:

$$dc = 0,\ c = const, \quad d(\sin x) = \cos x dx, \quad d(\cos x) = -\sin x dx,$$

$$da^x = a^x \ln a dx, \quad de^x = e^x dx, \quad dx^n = nx^{n-1}dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 54. Если функция f дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, т.е. в этой точке $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0,$$

что и означает непрерывность функции f при $x=x_0$.

Следствие 15. Если функция в некоторой точке имеет производную, то она непрерывна в этой точке.

Если функция имеет в точке бесконечную производную, то она может быть разрывной в этой точке.

Утверждение, обратное теореме 54, неверно, т.е. из непрерывности функции f в данной точке не следует её дифференцируемость.

Пример 53. Функция $f(x)=|x|$, очевидно, непрерывна в точке $x=0$ (как и во всех других), но не имеет в этой точке производной.

В самом деле, при $x \geq 0$ имеем $y=|x|=x$, поэтому для точки $x_0=0$ получим $\Delta y=\Delta x$. Следовательно,

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Аналогично, при $x \leq 0$ имеем $y=|x|=-x$, поэтому для точки $x_0=0$ в этом случае получим $\Delta y=-\Delta x$. Следовательно,

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Тем самым доказано, что функция $f(x)=|x|$ не имеет при $x=0$ производной, однако в этой точке существуют как левая, так и правая производные. Для любого $x \neq 0$ имеем $|x|'=\operatorname{sgn} x$.

Если функция f имеет производную в каждой точке некоторого промежутка (дифференцируема в каждой точке этого промежутка), то говорят, что функция f *имеет производную*, или что она *дифференцируема* на указанном промежутке.

5.3 Геометрический смысл производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале (a, b) и непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$. Положим $y_0=f(x_0)$, $M_0=(x_0, y_0)$, $x_0+\Delta x \in (a, b)$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, $M=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

Проведём секущую M_0M (рис. 10). Она имеет уравнение $y=k(\Delta x)(x-x_0)+y_0$, где $k(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

При $\Delta x \to 0$ расстояние $|M_0M|$ от точки M_0 до точки M стремится к нулю (в этом случае говорят, что точка M стремится к точке M_0 и пишут $M \to M_0$). Действительно, в силу непрерывности функции f при $x=x_0$ имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y=0$. Следовательно, при $\Delta x \to 0$

$$|M_0M| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0.$$

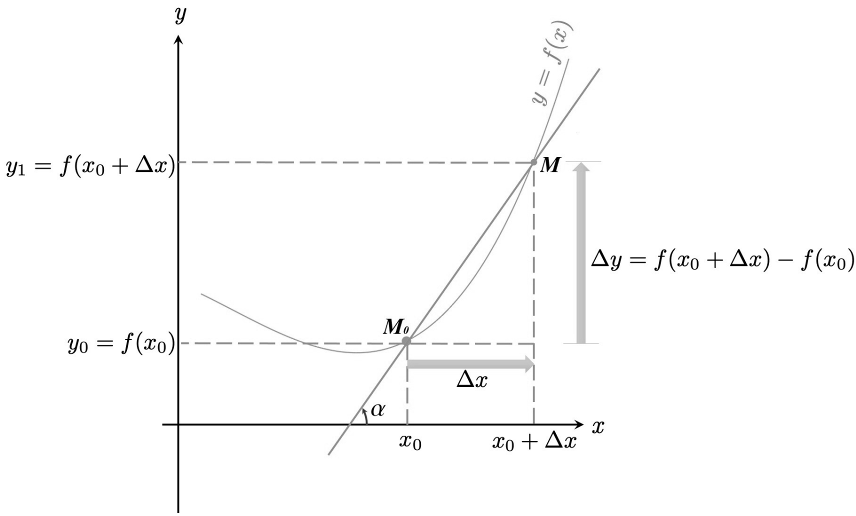


Рис. 10: Наклонная касательная.

Определение 66. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = k_0$, то прямая, уравнение которой

$$y = k_0(x - x_0) + y_0$$

получается из уравнения $y = k(\Delta x)(x - x_0) + y_0$ при $\Delta x \to 0$ (рис. 10), называется *(наклонной) касательной к графику функции f в точке* (x_0, y_0).

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \infty$, то прямая (рис. 11), уравнение которой

$$x = x_0$$

получается при $\Delta x \to 0$ из уравнения секущей, записанного в виде

$$\frac{y}{k(\Delta x)} = x - x_0 + \frac{y_0}{k(\Delta x)},$$

называется *вертикальной касательной графику функции f в точке* (x_0, y_0).

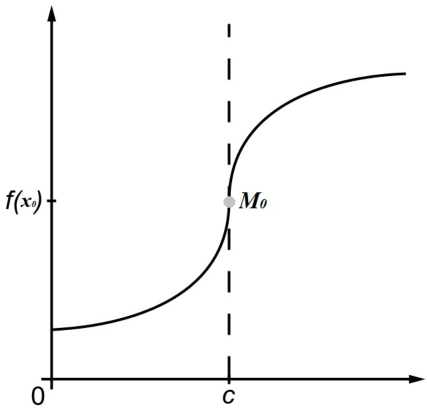


Рис. 11: Вертикальная касательная.

Существование конечного предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ означает существование конечной производной $f'(x_0) = k$. Следовательно, если у функции f в точке x_0 существует производная, то уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0,$$

где $y_0 = f(x_0)$.

Как известно из аналитической геометрии, коэффициент $f'(x_0)$ в уравнении $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ равен тангенсу угла, который рассматриваемая прямая образует с положительным направлением оси Ox:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

т.е. производная функции в некоторой точке равна тангенсу угла между касательной в соответствующей точке графика функции и осью абсцисс.

5.4 Физический смысл производной

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\Delta x{=}x{-}x_0$. Пусть для определённости $\Delta x{>}0$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть *величина средней скорости изменения y на отрезке $[x_0, x_0+\Delta x]$ относительно x*. При стремлении Δx к нулю, т.е. при стягивании отрезка $[x_0, x_0{+}\Delta x]$ к точке x_0, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ даёт величину средней скорости изменения y относительно x во все меньшем и меньшем отрезке, содержащем точку x_0.

Все сказанное справедливо и при $\Delta x{<}0$ для отрезка $[x_0{-}\Delta x, x_0]$.

Предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует, т.е. производную $f'(x_0)$ естественно поэтому назвать *величиной скорости изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0*.

Величина средней скорости изменения переменной y относительно x на отрезке $[x_0{-}\Delta x, x_0{+}\Delta x]$ равна

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\right]=f'(x_0).$$

Заметим, что разностное отношение $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ в известном смысле лучше приближает значение производной $f'(x)$, чем $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Применение дифференциала основано на том, что замена приращения функции её дифференциалом позволяет заменить любую дифференцируемую в точке x_0 функцию линейной функцией в достаточно малой окрестности точки x_0, т.е. считать, что процесс изменения зависимой переменной “в малом” происходит линейно относительно аргумента. При такой замене получающаяся погрешность оказывается бесконечно малой более высокого порядка, чем приращение аргумента.

Пусть $s=s(t)$ – закон движения материальной точки, s – длина пути, отсчитываемая вдоль траектории от некоторой начальной точки M_0, t – время, M – положение точки в момент времени t, а M' – в момент $t+\Delta t$, и $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$ – длина пути от M до M'.

Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется в механике *величиной средней скорости движения на участке от M до M'*, а

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

– *величиной мгновенной скорости в момент времени t*.

Замена Δs на ds означает, что мы считаем движение на рассматриваемом участке равномерным по скорости.

Пусть $q=q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника, t – время, Δt – некоторый промежуток времени, $\Delta q=q(t+\Delta t)-q(t)$ – количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$.

Тогда $I_{cp}=\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называется *средней силой тока за промежуток времени Δt*, а предел

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

называется *мгновенным током*.

Дифференциал $dq=I\Delta t$ равен количеству электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за момент времени Δt, если сила тока была бы постоянной и равной силе тока в момент t. Кроме того, $\Delta q-dq=o(\Delta t)$.

Пусть дан неоднородный стержень длины ℓ и пусть $m(x)$ – масса части стержня длины x, $0\leq x\leq l$, отмеряемой от одного фиксированного конца. Тогда $\Delta m=m(x+\Delta x)-m(x)$ – масса части стержня от x до $x+\Delta x$.

Величина $\rho_{cp}=\frac{\Delta m}{\Delta x}$ называется *средней линейной плотностью стержня* на указанном участке. Предел

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

называется *линейной плотностью* стержня в данной точке.

Если плотность ρ постоянна, то стержень будет однородным.

Для произвольного, вообще говоря, неоднородного стержня дифференциал $dm=\rho\Delta x$ равен массе однородного стержня длины Δx с постоянной плотностью ρ, равной плотности рассматриваемого стержня в данной точке.

5.5 Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями. Дифференцирование обратной функции

Все функции, рассматриваемые в этом подразделе, предполагаются определёнными в некоторой окрестности точки x_0.

Теорема 55. Пусть функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ имеют производные в точке x_0. Тогда их сумма также имеет в точке x_0 производную и

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'.$$

Таким образом, производная суммы функций равна сумме их производных.

Доказательство. Действительно, пусть

$$y = f_1(x) + f_2(x), \quad \Delta y_1 = f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0),$$

$$\Delta y_2 = f_2(x_0 + \Delta x) - f_2(x_0).$$

Тогда

$$\Delta y = [f_1(x_0 + \Delta x) + f_2(x_0 + \Delta x)] - [f_1(x_0) + f_2(x_0)] = \Delta y_1 + \Delta y_2,$$

поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0.$$

Пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x}$, согласно предположению, существуют и равны соответственно производным $f_1'(x_0)$ и $f_2'(x_0)$ в точке x_0, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x} \right) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0).$$

Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, поэтому y' в точке x_0 существует и $y' = f_1'(x_0) + f_2'(x_0)$.

Аналогично,

$$(f_1 - f_2)' = f_1' - f_2'.$$

Теорема 56. Пусть функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ имеют производные в точке x_0. Тогда их произведение $y_1 y_2 = f_1(x) f_2(x)$ также имеет в точке x_0 производную и

$$(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'.$$

Доказательство. Пусть $y(x) = f_1(x) f_2(x)$. Тогда

$$\Delta y_1 = f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0),$$

$$\Delta y_2 = f_2(x_0 + \Delta x) - f_2(x_0),$$

$$\Delta y = f_1(x_0 + \Delta x) f_2(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0) f_2(x_0).$$

Вычитая и прибавляя $f_1(x_0 + \Delta x) f_2(x_0)$, получим

$$\Delta y = [f_1(x_0 + \Delta x) f_2(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0 + \Delta x) f_2(x_0)] +$$

$$+ [f_1(x_0 + \Delta x) f_2(x_0) - f_1(x_0) f_2(x_0)] =$$

$$= f_1(x_0 + \Delta x) \Delta f_2 + f_1(x_0) \Delta f_2.$$

Так как функция $f_1(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f_1(x_0+\Delta x)=f_1(x_0)$. Следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_1(x_0+\Delta x)\,\Delta f_2 + f_2(x_0)\,\Delta f_1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} f_1(x_0+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_2}{\Delta x} + f_2(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f_1}{\Delta x} =$$

$$= f_1(x_0)f_2'(x_0) + f_1'(x_0)f_2(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 16. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0, а $c\in\mathbb{R}$ – константа, тогда функция $cf(x)$ также имеет в точке x_0 производную и

$$(cf(x))'_{x=x_0} = cf'(x_0).$$

Теорема 57. Пусть функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ имеют производные в точке x_0 и $f_2(x_0)\neq 0$. Тогда их частное $\frac{y_1}{y_2}=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ также имеет в точке x_0 производную и

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_2^2}.$$

Доказательство. Пусть $y(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$. Так как $f_2(x_0)\neq 0$, то существует такое $h>0$, что $f_2(x_0+\Delta x)\neq 0$ для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x|<h$. Выберем $|\Delta x|<h$, тогда

$$\Delta y_1 = f_1(x_0+\Delta x) - f_1(x_0),\quad \Delta y_2 = f_2(x_0+\Delta x) - f_2(x_0),$$

$$\Delta y = \frac{f_1(x_0+\Delta x)}{f_2(x_0+\Delta x)} - \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} =$$

$$= \frac{f_1(x_0+\Delta x)\,f_2(x_0) - f_1(x_0)\,f_2(x_0+\Delta x)}{f_2(x_0+\Delta x)\,f_2(x_0)} =$$

$$= \frac{f_1(x_0+\Delta x) f_2(x_0) - f_1(x_0) f_2(x_0) -}{f_2(x_0+\Delta x) f_2(x_0)} -$$

$$- \frac{(f_1(x_0) f_2(x_0+\Delta x) - f_1(x_0) f_2(x_0))}{f_2(x_0+\Delta x) f_2(x_0)} =$$

$$= \frac{(f_1(x_0+\Delta x) - f_1(x_0)) f_2(x_0)}{f_2(x_0+\Delta x) f_2(x_0)} -$$

$$- \frac{f_1(x_0)(f_2(x_0+\Delta x) - f_2(x_0))}{f_2(x_0+\Delta x) f_2(x_0)}.$$

Следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f_1(x_0+\Delta x) - f_1(x_0)) f_2(x_0)}{\Delta x f_2(x_0+\Delta x) f_2(x_0)} -$$

$$- \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(x_0)(f_2(x_0+\Delta x) - f_2(x_0))}{\Delta x f_2(x_0+\Delta x) f_2(x_0)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta x} \cdot f_2(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{f_2(x_0+\Delta x) f_2(x_0)}$$

$$- f_1(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{f_2(x_0+\Delta x) f_2(x_0)} =$$

$$= \frac{f_1'(x_0) f_2(x_0) - f_1(x_0) f_2'(x_0)}{f_2^2(x_0)},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 17. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Тогда и частное $\frac{1}{y} = \frac{1}{f(x)}$ также имеет в точке x_0 производную и

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Пример 54. Вывод формул производных тангенса и котангенса проведём с использованием доказанного правила дифференцирования частного.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Имеем

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании обратной функции.

Теорема 58. Пусть функция $y=f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет конечную не равную нулю производную $f'(x_0)$. Тогда обратная для f функция $x=f^{-1}(y)=g(y)$ также имеет производную в соответствующей точке $y_0=f(x_0)$, определяемую равенством

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = g'(y) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{51}$$

или

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Доказательство. Зафиксируем некоторую окрестность точки x_0, в которой функция $y=f(x)$ строго монотонна и непрерывна, и будем рассматривать f только в этой окрестности. Как нам известно по теореме об обратной непрерывной функции, обратная функция $x=g(y)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки $y_0=f(x_0)$.

Рассмотрим приращение Δy так, что $y_0+\Delta y$ из указанной окрестности. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, также не равное нулю в силу строгой монотонности f. Поэтому

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Если теперь $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности $g(y)$ приращение Δx также стремится к нулю, но при $\Delta x \to 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0) \neq 0,$$

следовательно, существует предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Таким образом, формула (51) доказана.

Пример 55. Рассмотрим $y=\arcsin x$. При $-1 \leq x \leq 1$ имеем $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда $x=\sin y$ и, применив формулу (51), получим

$$\frac{dy}{dx} = (\arcsin x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}.$$

Пусть $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, тогда $0 < \cos y < 1$ и $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$. Таким образом,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

Пример 56. Рассмотрим $y = \arccos x$, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$. Тогда $x = \cos y$ и, применив формулу (51), получим

$$\frac{dy}{dx} = (\arccos x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sin y}.$$

Пусть $0 < y < \pi$, тогда $\sin y > 0$ и $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Таким образом,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1.$$

Пример 57. Рассмотрим $y = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Тогда $x = \operatorname{tg} y$ и, применив формулу (51), получим

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Пример 58. Рассмотрим $y = \operatorname{arcctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < \pi$. Тогда $x = \operatorname{ctg} y$ и, применив формулу (51), получим

$$\frac{dy}{dx} = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\sin^2 x = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Таким образом,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Пример 59. Рассмотрим $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $-\infty < y < +\infty$. Тогда $x = a^y$ и, применив формулу (51), получим

$$\frac{dy}{dx} = (\log_a x)' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

Таким образом,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

В частности, при $a{=}e$ имеем

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

5.6 Дифференцирование сложной функции

Теорема 59. Пусть функция $y{=}f(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z{=}F(y)$ дифференцируема в точке $y_0{=}f(x_0)$. Тогда сложная функция $\Phi(x){=}F[f(x)]$ дифференцируема в точке x_0, причём

$$\Phi'(x_0) = F'(y_0)f'(x_0).$$

При помощи дифференциалов равенство можно записать в виде

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Доказательство. Так как функция F дифференцируема в точке y_0, то она определена в некоторой окрестности $V(y_0)$ точки y_0. Так как из существования производной $f'(x_0)$ следует непрерывность функции f в этой точке, то для окрестности $V(y_0)$ найдётся такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что $f(U(x_0)){\subset}V(y_0)$, и следовательно, для всех $x{\in}U(x_0)$ имеет смысл сложная функция $F(f(x))$.

Положим $\Delta x{=}x{-}x_0$, $\Delta y{=}y{-}y_0$, $\Delta z{=}F(y){-}F(y_0)$. Функция F дифференцируема в точке y_0, поэтому её приращение Δz при всех Δy таких, что $y{\in}V(y_0)$, имеет вид

$$\Delta z = F'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y,$$

где $\varepsilon(\Delta y)$ – бесконечно малая при $\Delta x{\to}0$.

Поделив обе части равенства с Δz на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, т.е. существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Так как функция $y = y(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна. Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

откуда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0.$$

Поэтому

$$\Phi'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= F'(y_0) f'(x_0).$$

Теорема доказана.

Формула для производной сложной функции справедлива и в том случае, когда под производными понимаются соответствующие односторонние производные, если соответствующая сложная функция в односторонней окрестности имеет смысл.

Рассмотрим вопрос об инвариантность формы первого дифференциала относительно преобразования независимой переменной.

Утверждение 8. В условиях теоремы 59 справедлива формула

$$dz = F'(y_0)dy = \Phi'(x_0)dx.$$

В этой формуле $dy{=}f'(x_0)dx$ является дифференциалом функции, а dx – дифференциалом независимой переменной.

Таким образом, дифференциал функции имеет один и тот же вид: произведение производной по некоторой переменной на “дифференциал этой переменной”, независимо от того, является эта переменная в свою очередь функцией или независимой переменной.

Доказательство. Имеем $dz{=}\Phi'(x_0)dx$, отсюда, применив формулу для производной сложной функции, получим

$$dz = F'(y_0)f'(x_0)dx,$$

но $f'(x_0)dx{=}dy$, а поэтому $dz{=}F'(y_0)dy$, что и требовалось доказать.

Пример 60. Пусть $y{=}x^\alpha$, $x{>}0, \alpha{\in}\mathbb{R}$. Найдём $(x^\alpha)'$. Имеем $x^\alpha{=}e^u$, где $u{=}\alpha\ln x$. Замечая, что $\frac{du}{dx}{=}\frac{\alpha}{x}$, получаем

$$(x^\alpha)' = \frac{de^u}{dx} = \frac{de^u}{du}\frac{du}{dx} = e^u\,\frac{\alpha}{x} = e^{\alpha\ln x}\,\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Таким образом,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

Выведем с помощью теоремы 59 ещё одну часто применяемую формулу. Пусть $y{=}u^v$, где $u{=}u(x){>}0$, $v{=}v(x)$. Представим нашу функцию в виде $y{=}e^{v\ln u}$ и вычислим $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{v\ln u}}{dx} = e^{v\ln u}\frac{dv\ln u}{dx} = u^v\left(v'\ln u + \frac{v}{u}u'\right) =$$

$$= u^v\ln u\, v' + vu^{v-1}u'.$$

Таким образом,

$$(u^v)' = u^v\ln u\, v' + vu^{v-1}u',$$

где производная функции u^v равна сумме двух слагаемых, из которых первое совпадает с производной u^v в предположении, что u – постоянная, а второе – с производной u^v в предположении, что v – постоянная.

С помощью правила дифференцирования сложной функции можно находить и производные функций, заданных неявно. Пусть дифференцируемая функция $y{=}y(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y){=}0$. Дифференцируя тождество $F(x,y(x)){=}0$ как сложную функцию, можно вычислить производную $\frac{dy}{dx}$.

Пример 61. В качестве примера вычислим производную неявной функции $y(x)$, определённой уравнением $x^2{+}y^2{=}a^2$. Продифференцируем уравнение $x^2{+}y^2{=}a^2$, считая y функцией от x. Получим $2x{+}2yy'{=}0$, отсюда $y'{=}{-}\frac{x}{y}$.

Пример 62. В случае, когда функция задана не одной формулой, а несколькими, вычисление производной приходится иногда производить непосредственно, исходя из определения производной. Найдём, например, производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

При $x{\neq}0$ производная существует и вычисляется по формулам дифференцирования:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

В точке же $x{=}0$ производная находится непосредственно по её определению:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Таким образом, функция $f(x)$ дифференцируема на всей вещественной оси.

Пример 63. Найдём производные гиперболических функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ (см. (40),(41), (42), (43)):

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}' x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch}' x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}' x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \operatorname{sh}' x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Из всех найденных производных основных элементарных функций, а также гиперболических функций составим единую таблицу.

Таблица производных.

1. $(c)' = 0$, $c = \text{const}$,
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,
3. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0$,
4. $(e^x)' = e^x$,
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$,
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
7. $(\sin x)' = \cos x$,
8. $(\cos x)' = -\sin x$,
9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$,
15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$,
16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$,
17. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,
18. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

5.7 Производные высших порядков

Определение 67. Пусть функция $f(x)$, определённая на интервале (a, b), имеет в каждой точке $x \in (a, b)$ производную $f'(x)$. Если при $x \in (a, b)$ производная функции $f'(x)$ существует, то она называется *второй производной* (или *производной второго порядка*) функции f обозначается через $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$.

Таким образом, $f''(x) = [f'(x)]'$ или, опуская обозначение аргумента, $y'' = (y')'$.

Аналогично определяется производная $y^{(n)}$ любого порядка $n = 1, 2, \ldots$, а именно, если существует производная $y^{(n-1)}$ порядка $n-1$ (при этом под производной нулевого порядка подразумевается сама функция: $y^{(0)} = y$), то по определению $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$.

Определение n-й производной в точке x_0 можно записать в виде предела

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Продолжая так и далее, получим общую формулу:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x_0 - k\Delta x), \qquad (52)$$

где $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Аналогично определяются односторонние производные высшего порядка.

Если функция f имеет в точке x_0 производную порядка $n>1$, то в некоторой окрестности точки x_0 существуют и все производные более низкого порядка $k<n$, которые к тому же непрерывны в этой окрестности, в частности сама функция определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 68. Функция называется *n раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке*, если во всех точках этого промежутка она имеет непрерывные производные до порядка n включительно ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

При этом, если конец принадлежит промежутку, под производной в этом конце, понимается соответствующая односторонняя производная.

Основные формулы.

1. Найдём производную порядка $n \in \mathbb{N}$ от степенной функции: $(x^\alpha)^{(n)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Имеем

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$$
$$(x^\alpha)'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \ \ldots,$$
$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Получим

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}. \qquad (53)$$

2. Найдём производную порядка $n\in\mathbb{N}$ от показательной функции: $(a^x)^{(n)}$, $a\in\mathbb{R}$, $a>0$, $a=1$. Имеем

$$(a^x)^n = a^x \ln^n a, \quad a > 0,$$

$$(a^x)' = a^x \ln a, \ \ldots$$

Окончательно получим

$$(a^x)^n = a^x \ln^n a.$$

В частности,

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \tag{54}$$

3. Найдём производную порядка $n\in\mathbb{N}$ от логарифмической функции: $(\ln x)^{(n)}$. Имеем

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}, \ \ldots,$$

$$(\ln x)^{(n)}=(x^{-1})^{(n-1)}=-(-1-1)(-1-2)\ldots(-1-n+1-1)x^{-1-n+1}=$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Окончательно получим

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}. \tag{55}$$

4. Найдём производную порядка $n\in\mathbb{N}$ от синуса: $(\sin x)^{(n)}$. Имеем

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \ \ldots$$

Окончательно получим

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \tag{56}$$

Аналогично, для косинуса

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \tag{57}$$

Пример 64. Найдём производную порядка 35 от функции $f(x)=\sqrt{x}$. Используя формулу (53), получаем

$$(\sqrt{x})^{(35)} = (x^{\frac{1}{2}})^{(35)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-35+1\right)x^{\frac{1}{2}-35} =$$

$$= \frac{67!!}{2^{35}}x^{-\frac{69}{2}},$$

где двойной факториал "!!" действует по формуле (2):

$$67!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 67.$$

5.8 Высшие производные суммы и произведения функций. Формула Лейбница. Производные высших порядков от сложных функций, от обратных функций и от функций, заданных параметрически

Теорема 60. Пусть функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ имеют производные n-го порядка в точке x_0 тогда функции y_1+y_2 и $y_1\cdot y_2$ также имеют производные n-го порядка в точке x_0, причём

$$(f_1+f_2)^{(n)} = f_1^{(n)} + f_2^{(n)},$$

$$(f_1f_2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_1^{(n-k)} f_2^{(k)}, \tag{58}$$

где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ обозначает число сочетаний из n элементов по k, $k=0,1,2,\ldots,n$, (биномиальные коэффициенты).

Формула (58) обычно называется *формулой Лейбница*, её символически можно записать в следующем виде:

$$(f_1f_2)^{(n)} = (f_1+f_2)^{\{n\}}.$$

Индекс $\{n\}$ означает, что выражение $(y_1+y_2)^{\{n\}}$ записывается подобно биному Ньютона, т.е. в виде суммы с теми же коэффициентами, что и в биномиальной формуле, только степени функций y_1 и y_2 заменяются их производными соответствующего порядка.

Доказательство. Докажем формулы по индукции.

1. При $n = 1$ имеем

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2',$$

т.е. формула $(f_1+f_2)^{(n)}=f_1^{(n)}+f_2^{(n)}$ верна при $n=1$.

Пусть она справедлива при $n=k$: $(f_1+f_2)^{(k)}=f_1^{(k)}+f_2^{(k)}$.

Докажем её при $n = k+1$.

$$(f_1 + f_2)^{(k+1)} = [(f_1 + f_2)^{(k)}]' = (f_1^{(n)} + f_2^{(n)})' =$$

$$= (f_1^{(n)})' + (f_2^{(n)})' = f_1^{(n+1)} + f_2^{(n+1)}.$$

2. При $n=1$ имеем $(y_1 y_2)'=y_1' y_2+y_2' y_1$. Пусть формула справедлива при $n=k$:

$$(f_1 f_2)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i f_1^{(k-i)} f_2^{(i)}.$$

Докажем её при $n = k+1$. Имеем

$$(f_1 f_2)^{(k+1)} = [(f_1 f_2)^{(k)}]' = \left[\sum_{i=0}^{k} C_k^i f_1^{(k-i)} f_2^{(i)}\right]' =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left[f_1^{(k+1-i)} f_2^{(i)} + f_1^{(k-i)} f_2^{(i+1)}\right] =$$

$$= f_1^{(k+1)} f_2^{(0)} + \sum_{i=1}^{k} C_k^i f_1^{(k+1-i)} f_2^{(i)} + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i f_1^{(k-i)} f_2^{(i+1)} + f_1^{(0)} f_2^{(k+1)},$$

$$C_k^0 = C_k^k = 1.$$

Теперь изменим индекс суммирования во второй сумме, положив $i{=}p{-}1$, тогда новый индекс суммирования p будет меняться от 1 до n. После этого в полученных суммах объединим попарно слагаемые, содержащие производные одинаковых порядков. Обозначив общий индекс суммирования через i, будем иметь

$$(f_1f_2)^{(k+1)} = f_1^{(k+1)}f_2^{(0)} + \sum_{i=1}^{k}(C_k^i + C_k^{i-1})f_1^{(k+1-i)}f_2^{(i)} + f_1^{(0)}f_2^{(k+1)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i f_1^{(k+1-i)}f_2^{(i)},$$

так как $C_k^i + C_k^{i-1} = C_{k+1}^i$ и $C_{k+1}^0 = C_{k+1}^{k+1}$.

Следствие 18. Если c – постоянная, а $y{=}f(x)$ – функция, имеющая производную n-го порядка в точке x_0, то функция $cf(x)$ также имеет производную порядка n при $x{=}x_0$, причём

$$(cf)^{(n)} = cf^{(n)}.$$

Пример 65. Найдём производную порядка 21 от произведения x^3e^{2x}. Использовав формулу (58), получим

$$(x^3e^{2x})^{(21)} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k (e^{2x})^{(21-k)}(x^3)^{(k)}.$$

Имеем

$$(x^3)^{(0)} = x^3, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad (x^3)'' = 2\cdot 3x = 6x,$$

$$(x^3)''' = 6, \quad (x^3)^{IV} = (x^3)^{V} = \ldots = (x^3)^{(21)} = 0,$$

$$(e^{2x})^{(21)} = 2^{21}e^{2x}, \quad (e^{2x})^{(20)} = 2^{20}e^{2x},$$

$$(e^{2x})^{(19)} = 2^{19}e^{2x}, \quad (e^{2x})^{(18)} = 2^{18}e^{2x},$$

$$C_{21}^0 = 1, \quad C_{21}^1 = 21, \quad C_{21}^2 = 210, \quad C_{21}^3 = 1330$$

и

$$(x^3e^{2x})^{(21)} = C_{21}^0(e^{2x})^{(21)}(x^3)^{(0)} + C_{21}^1(e^{2x})^{(20)}(x^3)'+$$
$$+C_{21}^2(e^{2x})^{(19)}(x^3)'' + C_{21}^3(e^{2x})^{(18)}(x^3)''' =$$
$$= 2^{21}e^{2x}x^3+3{\cdot}21{\cdot}2^{20}e^{2x}x^2+6{\cdot}210{\cdot}2^{19}e^{2x}x+6{\cdot}1330{\cdot}2^{18}e^{2x} =$$
$$= e^{2x}(2097152x^3 + 66060288x^2 + 660602880x + 2091909120).$$

Теорема 61. Пусть функция $y{=}y(x)$ имеет вторую производную в точке x_0, а $z{=}z(y)$ – вторую производную в точке $y_0{=}y(x_0)$. Тогда сложная функция $z[y(x)]$ имеет при $x{=}x_0$ вторую производную, причём

$$z''_{xx} = z''_{yy}(y'_x)^2 + z'_y y''_{xx}. \tag{59}$$

Доказательство. Действительно, поскольку существуют производные $y''(x_0)$ и $z''(y_0)$, то существуют также $y'(x_0)$ и $z'(y_0)$. Следовательно, функции $y(x)$ и $z(y)$ непрерывны соответственно в точках x_0 и y_0. Поэтому в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $z{=}z[y(x)]$. Дифференцируя её и опуская для простоты обозначение аргумента, имеем $z'_x{=}z'_y y'_x$; дифференцируя еще раз по x, получим

$$z''_{xx} = (z'_y y'_x)' = (z'_y)'_x y'_x + z'_y y''_{xx} = z''_{yy}(y'_x)^2 + z'_y y''_{xx}.$$

Аналогичным образом вычисляются, при соответствующих предположениях, и производные высших порядков сложной функции. Этот метод позволяет также доказывать существование и находить производные высших порядков от обратной функции.

Теорема 62. Пусть функция $y{=}y(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и пусть при $x{=}x_0$ существуют производные y' и y'', причём $y'(x_0){\neq}0$; тогда и обратная функция $x{=}x(y)$ имеет вторую производную в точке $y_0{=}y(x_0)$, причём она может быть выражена через значения производных y' и y'' функции $y{=}y(x)$ при $x{=}x_0$.

Доказательство. В самом деле, опуская, как и выше, обозначения аргумента, согласно теореме о производной обратной функции имеем $x'_y{=}1/y'_x$. Вычислив производную по y от обеих частей и применив к правой части правило дифференцирования сложной функции, получим

$$x''_{yy} = (x'_y)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x x'_y = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^2} \cdot \frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

Аналогично при соответствующих предположениях вычисляются и производные высших порядков для обратной функции.

Подобным же образом можно поступать и в случае так называемого параметрического задания функции.

Определение 69. Пусть функции $x{=}x(t)$ и $y{=}y(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и одна из них, например, $x{=}x(t)$ непрерывна и строго монотонна в указанной окрестности, тогда существует обратная к $x(t)$ функция $t{=}t(x)$, и в некоторой окрестности точки $x_0{=}x(t_0)$ имеет смысл композиция $y(t(x))$. Эта функция y от x называется *параметрически заданной формулами $x{=}x(t)$ и $y{=}y(t)$ функцией.*

Выведем формулы для дифференцирования параметрически заданных функций.

Теорема 63. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют в точке t_0 производные и если $x'(t_0){\neq}0$, то параметрически заданная функция $y(t(x))$ также имеет в точке $x_0{=}x(t_0)$ производную, причём

$$y'_x = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

Доказательство. В самом деле, по правилу дифференцирования сложной функции имеем (опуская обозначение аргумента) $y'_x{=}y'_t t'_x$, по правилу же дифференцирования обратной функции $t'_x{=}\frac{1}{x'_t}$. Тогда $y'_x{=}y'_t\frac{1}{x'_t}$.

Если, кроме того, существуют $x''_{tt}(t_0)$ и $y''_{tt}(t_0)$, то существует и $y''_{xx}(x_0)$, причём

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Аналогично вычисляются производные более высокого порядка параметрически заданных функций.

Пример 66. Найдём производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически $x(t) = t^3 + 3t^2$, $y(t) = t^4 - 8t^2$. Получим

$$x'(t) = 3t^2 + 6t, \quad y'(t) = 4t^3 - 16t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4t^3 - 16t}{3t^2 + 6t} = \frac{4(t-2)}{3},$$

$$x''(t) = 6t + 6, \quad y''(t) = 12t^2 - 16,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3} = \frac{(12t^2 - 16)(3t^2 + 6t) - (4t^3 - 16t)(6t + 6)}{(3t^2 + 6t)^3} =$$

$$= \frac{12t^2(t+2)^2}{27t^3(t+2)^3} = \frac{4}{9t(t+2)}.$$

5.9 Дифференциалы высших порядков. Нарушение инвариантности формы дифференциалов высших порядков

Вспомним, что если функция $y{=}f(x)$ дифференцируема на некотором интервале (a, b), то её дифференциал $dy{=}f'(x)dx$ называется также её первым дифференциалом.

Определение 70. Значение дифференциала $d(dy)$, т.е. дифференциала от первого дифференциала, в некоторой точке x_0 называется *вторым дифференциалом* функции f в этой точке и обозначается через d^2y, т.е.

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx)|_{x=x_0} = [f'(x)dx]'|_{x=x_0}dx = f''(x_0)dx^2.$$

При вычислении дифференциалов мы считаем приращение $dx{=}\Delta x$ постоянным, т.е. $d^2x{=}0$.

Аналогично, когда у функции $y{=}f(x)$ при $x{=}x_0$ существует производная n-го порядка: $y^{(n)}$, определяется *дифференциал n-го порядка* d^ny функции $y{=}f(x)$ в точке x_0 как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка $d^{n-1}y$:

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Справедлива формула

$$d^ny = y^{(n)}dx^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{60}$$

Её доказательство проведём по индукции. Для $n{=}1$ и $n{=}2$ она доказана. Пусть эта формула верна для дифференциалов порядка $n-1$: $d^{n-1}y{=}y^{(n-1)}dx^{n-1}$. Тогда, согласно данному выше определению, для вычисления дифференциала n-го порядка необходимо вычислить сначала дифференциал от $d^{n-1}y$:

$$d^ny = d(y^{(n-1)}dx^{n-1}) = (y^{(n-1)}dx^{n-1})dx = y^{(n)}dx^n.$$

Из формулы (60) следует, что

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}. \tag{61}$$

Отметим некоторые свойства дифференциалов высших порядков:

1. $d^n(y_1 + y_2) = d^ny_1 + d^ny_2$;

2. $d^n(cy) = cd^n y, \quad c = const;$

3. $d^n(y_1 y_2) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k dy_1^{n-k} dy_2^k = (dy_1 + dy_2)^{\{n\}}.$

Замечание 15. Формулы (60) и (61) справедливы, вообще говоря, при $n>1$ (в отличие от случая $n=1$) только тогда, когда x является независимой переменной. В случае дифференциалов высших порядков по зависимым переменным дело обстоит сложнее.

Пусть $z=z(y)$, $y=y(x)$, имеет смысл суперпозиция $z[y(x)]$ и функции $z(y)$, $y(x)$ дважды дифференцируемы. Тогда $dz=z'_y dy$, дифференцируя ещё раз, получаем

$$d^2 z = d(dz) = d(z'_y dy) =$$

$$= d(z'_y)dy + z'_y d(dy) = z''_{yy} dy^2 + z'_y d^2 y \qquad (62)$$

(мы написали $dz'_y = z''_{yy} dy$, использовав инвариантность первого дифференциала). Сравнивая формулы (60) и (62), мы видим, что они отличаются вторым членом, и так как, вообще говоря, $d^2 y \neq 0$, то они существенно различны. Поделив обе части равенства (62) на dx^2, мы получим формулу второй производной для сложной функции:

$$z''_{xx} = z''_{yy}(y'_x)^2 + z'_y y''_{xx},$$

которая была нами получена раньше другим путём.

Подобным же образом могут быть вычислены дифференциалы и производные высших порядков сложной функции.

6 Раздел 6. Приложения дифференциального исчисление функции одной переменной

6.1 Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Приведём теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши о дифференцируемых функциях. Эти теоремы применяются не только в математике, но и в различных областях физики и техники для анализа движения, скорости изменений и в задачах оптимизации. Теорема Лагранжа используется для поиска приблизительных значений и прогнозирования на основе производных и скорости изменения процесса.

Теорема 64 (Ферма). Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и принимает в этой точке наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если при $x{=}x_0$ существует производная в широком смысле, то она равна нулю.

Доказательство. Пусть функция f определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и принимает для определённости при $x{=}x_0$ наибольшее значение, т.е. для всех $x{\in}U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x){\leq}f(x_0)$. Тогда, если $x{<}x_0$, то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0, \tag{63}$$

а если $x > x_0$, то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0. \tag{64}$$

Если существует производная в широком смысле, т.е. если существует конечный или бесконечный, определённого знака предел

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

то, переходя к пределу при $x \to x_0 - 0$ в неравенстве (63), получаем $f'(x_0) \geq 0$; аналогично из неравенства (64) при $x \to x_0 + 0$ находим $f'(x_0) \leq 0$. Эти неравенства выполняются одновременно лишь при $f'(x_0) = 0$.

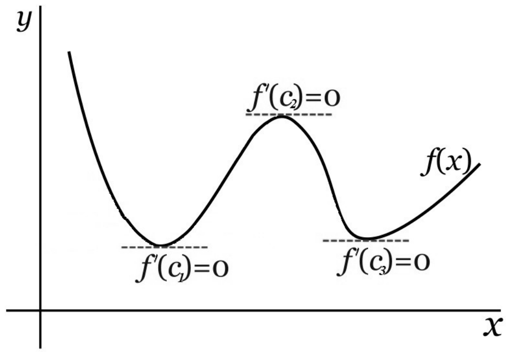


Рис. 12: Теорема Ферма.

Геометрическая интерпретация теоремы Ферма состоит в том, что если при $x = x_0$ функция f принимает наибольшее или наименьшее значение в некоторой окрестности точки x_0, то касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси Ox.

Если функция $y = f(x)$ имеет в некоторой точке x_0 конечную или бесконечную производную, то $f(x)$ называется функцией, имеющей при $x = x_0$ производную в широком смысле.

Теорема 65 (Ролля). Пусть функция f

1. непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2. имеет в каждой точке интервала (a, b) производную в широком смысле;

3. принимает равные значения на концах отрезка, т.е. $f(a) = f(b)$,

тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Мы уже знаем, что функция, непрерывная на отрезке, принимает наибольшее и наименьшее значения в некоторых точках этого отрезка (см. теорему Вейерштрасса 38). Пусть

$$M = \sup_{[a,b]} f(x), \quad m = \inf_{[a,b]} f(x),$$

тогда для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $m \le f(x) \le M$.

Если $m = M$, то функция f постоянна, и значит, $f' = 0$ на $[a, b]$ и в качестве точки ξ можно взять любую точку интервала (a, b).

Если же $m \ne M$, то из условия $f(a) = f(b)$ следует, что хотя бы одно из значений m или M не принимается на концах отрезка $[a, b]$. Пусть этим значением является M, т.е. существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(\xi) = M$, и значит, в этой точке ξ функция f принимает наибольшее значение и на интервале (a, b). Поэтому из теоремы Ферма 64 следует, что $f'(\xi) = 0$.

Пример 67. [?] Многочлен

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \quad n \in \mathbb{N},$$

называется *многочленом Лагерра*. Докажем, что все нули многочлена Лагерра положительны.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^n e^{-x}$. Поскольку $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ и $x^n e^{-x} > 0$ при $x > 0$, то существует точка $\xi \in (0, \infty)$, в которой функция $\varphi(x) = x^n e^{-x}$ принимает наибольшее значение. Тогда по теореме Ферма $\varphi'(\xi) = 0$. Производная $\varphi'(x) = e^{-x} x^{n-1}(n - x)$, тогда при $n > 1$ получим $\varphi'(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi'(x) = 0$, поэтому в силу теоремы Ролля найдутся точки $\xi_1 \in (0, \xi)$, $\xi_2 \in (\xi, \infty)$ такие, что $\varphi''(\xi_1) = \varphi''(\xi_2) = 0$. Кроме того, $\varphi''(x) = e^{-x} x^{n-2} \left(n^2 - n(2x + 1) + x^2\right)$, поэтому при $n > 2$ имеем $\varphi''(0) = 0$. Таким образом, $\varphi''(x)$ обращается в нуль в трёх точках полуоси $(0,\infty)$. Поскольку $\varphi^{(k)}(0)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi^{(k)}(x)=0$ при $k=0,1,2,\ldots,n-1$, применяя теорему Ролля, получаем, что функция $\varphi^{(n-1)}(x)$ обращается в нуль в $n+1$ точках, лежащих на $(0,\infty)$, причём одна из этих точек $x=0$. Эти точки являются концами n отрезков, на каждом из которых к функции $\varphi^{(n-1)}(x)$ применима теорема Ролля, поэтому существует по крайней мере n таких точек $\xi_m > 0$, $m=0,1,2,\ldots,n-1$, что $\varphi^{(n)}(\xi_m) = 0$. Очевидно, $\varphi^{(n)}(0)\neq 0$. Поскольку $L_n(x) = e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})=e^x\varphi^{(n)}(x)$ есть многочлен n-й степени, имеющий n нулей, то его нули – это точки ξ_m, $m=0,1,2,\ldots,n-1$, причём $\xi_m>0$, $m=0,1,2,\ldots,n-1$.

Теорема 66 (Лагранжа). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и в каждой точке интервала (a,b) имеет производную в широком смысле, то в этом интервале существует по крайней мере одна такая точка ξ, что

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \lambda x$$

и определим число λ таким образом, чтобы $F(a)=F(b)$, т.е. чтобы $f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b$. Это равносильно тому, что

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Для функции F выполняются все условия теоремы Ролля. Действительно, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция λx, будучи линейной, непрерывна на всей числовой оси, поэтому и функция $F(x)=f(x)-\lambda x$ также непрерывна на отрезке $[a,b]$. Функция f имеет во всех точках интервала (a,b) конечную или бесконечную производную, а функция λx — конечную производную во всех точках числовой оси, поэтому их разность $F(x)$ также имеет всюду в интервале (a, b) конечную или бесконечную производную. Наконец, на концах отрезка $[a, b]$ в силу выбора λ функция F принимает одинаковые значения. Поэтому существует хотя бы одна такая точка ξ $(a<\xi<b)$, что $F'(\xi)=0$. Получаем $F'(x)=f'(x)-\lambda$, поэтому $f'(\xi)-\lambda=0$. Подставив сюда λ, получим

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 68. При $x>1$ доказать неравенства

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) < \sqrt{x} - 1 < \frac{1}{2}(x-1).$$

Применим теорему Лагранжа к функции $f(x) = \sqrt{x}$. Тогда, поскольку $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, то по теореме Лагранжа найдётся такая точка $\xi \in (1, x)$, что

$$\sqrt{x} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}(x-1),$$

тогда из того, что $1<\xi<x$, следует

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) < \sqrt{x} - 1 < \frac{1}{2}(x-1).$$

Пример 69. Доказать неравенства

1. $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$,
2. $|\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| \leq |x - y|$,
3. $py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y)$ при $0 < y < x$ и $p > 1$.

Применим теорему Лагранжа, будем иметь:

1. $\sin(x) - \sin(y) = (x-y)\cos(\xi)$, тогда
$$|\sin(x) - \sin(y)| = |\cos(\xi)| \cdot |x-y| \leq |x-y|.$$
2. $\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y) = \frac{1}{1+\xi^2}(x-y)$, тогда
$$|\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)| = \frac{1}{1+\xi^2}|x-y| \leq |x-y|.$$
3. $x^p - y^p = p\xi^{p-1}(x-y)$, тогда, поскольку $0 < y < x$,
$$py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y).$$

Положим $a{=}x$, $b{-}a{=}\Delta x$ и $b{=}x{+}\Delta x$, тогда
$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$
Эта формула называется *формулой конечных приращений Лагранжа*.

Следствие 19. Пусть функция f

1. определена на некотором промежутке (конечном или бесконечном);
2. имеет производную, равную нулю во всех его внутренних точках;
3. непрерывна в концевых точках рассматриваемого промежутка, входящих в него,

тогда функция f постоянна на указанном промежутке.

Доказательство. Действительно, каковы бы ни были две точки x_1 и x_2, $x_1{<}x_2$ рассматриваемого промежутка, функция f, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[x_1, x_2]$, и значит,
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

где $x_1<\xi<x_2$. Но по условию доказываемого следствия $f'(\xi)=0$, и значит, $f(x_1)=f(x_2)$ для любых двух точек x_1 и x_2 из области определения функции f, что и означает, что функция f постоянна.

Следствие 20. Если функции f и g дифференцируемы во всех внутренних точках некоторого промежутка и в этих точках

$$f' = g',$$

а на концах промежутка (которые в него входят) функции f и g непрерывны, то эти функции отличаются на рассматриваемом промежутке лишь на постоянную:

$$f - g = c.$$

Доказательство. Действительно, функция $F=f-g$ удовлетворяет условиям следствия 19, в частности, $F'=f'-g'=0$ во внутренних точках промежутка, и поэтому $F=c$.

Следствие 21. Пусть функция φ

1. непрерывна на интервале (a,b);
2. дифференцируема во всех точках интервала (a,b), кроме, быть может, некоторой точки $x_0\in(a,b)$;
3. существует $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi'(x)$,

тогда существует и производная $\varphi'(x_0)$, причём

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \varphi'(x).$$

Доказательство. Действительно, пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi'(x)=A$. Если $a<x<b$ и $x\neq x_0$, то по теореме Лагранжа $\varphi(x)-\varphi(x_0)=\varphi'(\xi)(x-x_0)$, где $\xi\in(x_0,x)$, если $x>x_0$, и $\xi\in(x,x_0)$, если $x<x_0$, откуда

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \varphi'(\xi).$$

Будем для определённости считать, что $x>x_0$. Точка $\xi=\xi(x)$ является функцией от x и притом, вообще говоря, многозначной. Выберем произвольно для каждого $x\in(a,b)$ одно какое-либо значение ξ, тогда получим однозначную функцию $\xi(x)$ (как говорят, однозначную ветвь многозначной функции). Поскольку $x_0<\xi(x)<x$, то

$$\lim_{x\to x_0}\xi(x)=x_0.$$

Применив правило замены переменного для пределов функций (35), получим, что существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\varphi'(\xi)=A,$$

а следовательно, существует и предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=A.$$

Это и означает, что производная $\varphi'(x_0)$ существует и равна A.

Теорема 67 (Коши). Пусть функции f и g

1. непрерывны на отрезке $[a,b]$;
2. имеют производные в каждой точке интервала (a,b);
3. $g'\neq 0$ во всех точках интервала (a,b).

Тогда существует такая точка ξ $(a<\xi<b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Здесь $f(b)-f(a)\neq 0$, $g(a)-g(b)\neq 0$. Случай $f(b)-f(a)=0$ $(g(a)-g(b)=0)$ см. в теореме 65.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\lambda g(x),$$

где число λ выберем таким образом, чтобы $F(a)=F(b)$, т.е. чтобы $f(a)-\lambda g(a)=f(b)-\lambda g(b)$. Для этого нужно взять

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Функция F удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, следовательно, существует такая точка ξ, $a<\xi<b$, что $F'(\xi)=0$. Но $F'(x)=f'(x)-\lambda g'(x)$, а поэтому

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0,$$

откуда следует, что

$$\lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Получили формулу, обычно называемую *формулой конечных приращений Коши*.

6.2 Понятие равномерной непрерывности

В этом подразделе рассмотрим понятие равномерной непрерывности, имеющей существенное значение для определённого интеграла Римана.

Запишем определение функции, заданной на множестве $X\in\mathbb{R}$ и непрерывной в точке $x_0\in X$: для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при всех $x\in X$ и $|x-x_0|<\delta$ имеем $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Вообще говоря, при фиксированных $\varepsilon>0$ у каждой точки x_0 будет своё значение величины $\delta(\varepsilon)$, т.е. $\delta(\varepsilon)$ зависит от x_0 и это можно символически записать так: $\delta(\varepsilon)=\delta(\varepsilon, x_0)$.

Если оказалось, что для любого $\varepsilon>0$ и всякой точки $x_0\in X$ величина $\delta(\varepsilon)$ не зависит от x_0, то функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве X. Запишем это определение более чётко в эквивалентной форме.

Определение 71. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на X*, если

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \ \forall\,x_1, x_2 \in X :\ \ |x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Пример 70. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является равномерно непрерывной на промежутке $[1, +\infty)$, но не является равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$.

Для всякого $\varepsilon{>}0$ найдётся $\delta{=}\delta(\varepsilon){>}0$ такое, что для всех $x', x''{\in}[1, +\infty)$, удовлетворяющих неравенству $|x''{-}x'|{<}\delta$, выполняется

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| < \varepsilon.$$

Действительно,

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \left|\frac{x'' - x'}{x'x''}\right| = |x'' - x'| < \varepsilon$$

при $\delta{=}\varepsilon$.

Покажем, что $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на промежутке $(0, 1)$. Возьмём $\varepsilon{=}1$, любое $\delta{\in}(0, 1)$ и подберём такие значения $x', x''{\in}(0, 1)$, что $|x''{-}x'|{<}\delta$, но

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| \geq 1 = \varepsilon.$$

Пусть $x' = \delta{\in}(0, 1)$, $x'' = \frac{\delta}{\delta+1}{\in}(0, 1)$, $|x''{-}x'|{=}\frac{\delta^2}{\delta+1}{<}\delta$. Тогда

$$\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{\delta + 1}{\delta}\right| = \frac{1}{\delta} \geq 1 = \varepsilon,$$

следовательно, $f(x) = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на промежутке $(0, 1)$.

Теорема 68 (Кантора). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нём.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $f(x)$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной на $[a,b]$. Тогда

$$\exists\,\varepsilon > 0\ \ \forall\,\delta > 0\ \ \exists\alpha,\beta \in X:\ |\alpha-\beta| < \delta\ \Rightarrow\ |f(\alpha)-f(\beta)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим последовательность $\delta{=}\delta_n{=}1/n$. Каждому n тогда соответствует пара точек α_n, β_n такая, что

$$|\alpha_n-\beta_n| < \delta\,|f(\alpha_n)-f(\beta_n)| \geq \varepsilon.$$

Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ являются ограниченными. По теореме Больцано–Вейерштрасса из α_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$, т.е. $\alpha_{n_k}{\to}x_0{\in}X$ при $k{\to}\infty$. Далее,

$$|\alpha_{n_k}-\beta_{n_k}| < \frac{1}{n_k},$$

следовательно, $\gamma_{n_k}{=}\alpha_{n_k}{-}\beta_{n_k}$ есть бесконечно малая последовательность и $\beta_{n_k}{\to}x_0{\in}X$ при $k{\to}\infty$. Но тогда $y_k{=}f(\alpha_{n_k}){\to}f(x_0)$, $z_k{=}f(\beta_{n_k}){\to}f(x_0)$ при $k{\to}\infty$, т.е. $|y_k{-}z_k|{\to}0$ при $k{\to}\infty$. А это противоречит тому, что

$$|y_k-z_k| \geq \varepsilon,$$

так как, переходя в этом неравенстве к пределу при $k{\to}\infty$, получим $0{\geq}\varepsilon$, что неверно.

Пример 71. Исследовать функцию $f(x){=}\frac{\sin(x)}{x}$ на равномерную непрерывность на интервале $(0,\pi)$.

Функция $f(x){=}\frac{\sin(x)}{x}$ непрерывна на $(0,\pi)$, но $(0,\pi)$ не является отрезком, поэтому здесь теорема Кантора не применима. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x = 0, \\ \frac{\sin(x)}{x} & x \in (0,\pi), \\ 0 & x = \pi. \end{cases}$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ и $\left.\frac{\sin(x)}{x}\right|_{x=\pi}=0$. Поэтому по теореме Кантора функция $F(x)$ равномерно непрерывна на $[0,\pi]$, а, в частности, $\frac{\sin(x)}{x}$ равномерно непрерывна на $(0,\pi)$.

Теорема 69. Если функция $f(x)$ имеет на промежутке X ограниченную производную, то $f(x)$ равномерно непрерывна на этом промежутке.

Доказательство. Ограниченность производной функции $f(x)$ на промежутке X означает, что существует такое число $M>0$, для которого $|f'(x)|<M$ при всех $x\in X$.

Зададим произвольное число $\varepsilon>0$ и положим $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$. Рассмотрим любые две точки $x',x''\in X$, удовлетворяющие условию $|x'-x''|<\delta$. Заметим, что для функции $f(x)$ на отрезке $[x',x'']$ выполнены все условия теоремы Лагранжа. Поэтому найдётся такая точка $\xi\in(x',x'')$, что

$$|f(x'')-f(x')| = |f'(\xi)||x''-x'| < M\cdot\delta = M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Согласно определению равномерной непрерывности функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на промежутке X.

Пример 72. Исследуем функцию $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ на равномерную непрерывность на луче $(0,\infty)$.

Найдём производную $f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$. Эта производная ограничена на $(0,\infty)$:

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} < 1,$$

следовательно, $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ равномерно непрерывна на $(0,\infty)$.

6.3 Формула Тейлора

Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то её приращение можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

где $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-y_0$, $y_0=f(x_0)$ и $A=f'(x_0)$, т.е.

$$f(x) = y_0 + A(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Иначе говоря, существует линейная функция

$$P_1(x) = y_0 + A(x - x_0), \tag{65}$$

такая, что

$$f(x) = P_1(x) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

причём $P_1(x_0)=y_0=f(x_0)$, $P_1'(x_0)=A=f'(x_0)$.

Поставим более общую задачу. Пусть функция f имеет в точке x_0 n производных. Требуется выяснить, существует ли многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, что

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{66}$$

и

$$f(x_0) = P_n(x_0),\ f'(x_0) = P_n'(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0). \tag{67}$$

Будем искать этот многочлен, по аналогии с формулой (65), в виде

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n.$$

Замечая, что $P_n(x_0)=A_0$, из первого условия (67) имеем $A_0=f(x_0)$. Далее,

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \ldots + nA_n(x - x_0)^{n-1},$$

отсюда $P_n'(x_0)=A_1$, и так как $P_n'(x_0)=f'(x_0)$, то $A_1=f'(x_0)$. Затем найдём вторую производную многочлена $P_n(x)$:

$$P_n''(x) = 2\cdot 1\cdot A_2 + \ldots + n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}.$$

Отсюда и из условия $f''(x_0)=P_n''(x_0)$ получим $A_2=\frac{f''(x_0)}{2!}$. Затем

$$P_n'''(x) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot A_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)A_n(x-x_0)^{n-3},$$

где $A_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots,n$. В силу самого построения, для многочлена

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots +$$
$$+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

выполнены все соотношения (67). Проверим, удовлетворяет ли он условию (66).

Обозначим $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$. Из условия (67) следует, что

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \tag{68}$$

Поэтому, применяя n раз правило Лопиталя для раскрытия неопределённости $\frac{r_n(x_0)}{(x-x_0)^n}$ при $x\to x_0$, получаем:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

т.е. действительно, $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$, $x\to x_0$.

Итак, доказана следующая очень важная

Теорема 70. Пусть функция $f(x)$, определённая на интервале (a,b), имеет в точке $x_0\in(a,b)$ производные до порядка n включительно. Тогда при $x\to x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0, \tag{69}$$

или

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0.$$

Эта теорема остаётся справедливой вместе с её доказательством и для функции f, определённой на отрезке $[a,b]$, при $x_0\in[a,b]$, если для $x_0=a$ и $x_0=b$ под производными понимать соответствующие односторонние производные. Формула (69) называется *формулой Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано*.

Многочлен

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора степени n, а функция

$$r_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

– *остаточным членом n-го порядка формулы Тейлора*. Остаточный член $r_n(x)$ является бесконечно малой функцией при $x\to x_0$ более высокого порядка, чем все остальные члены многочлена Тейлора.

Если в формуле (69) $x_0=0$, то получается частный вид формулы Тейлора, называемый обычно *формулой Маклорена*:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n), \quad x\to 0.$$

Доказанная теорема позволяет любую функцию, удовлетворяющую условиям этой теоремы, заменить в окрестности некоторой точки многочленом с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем члены многочлена. Таким многочленом является многочлен Тейлора. Величина погрешности даётся при этом остаточным членом.

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки x_0 можно записать приближенное равенство

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Оказывается, что многочлен $P_n(x)$ может хорошо приближать функцию $f(x)$ в некоторой (иногда весьма большой) окрестности точки x_0. Более того, знание всех чисел $f^{(n)}(x_0)$, соответствующих только одной точке x_0, часто позволяет вычислить $f(x)$ при любом x с любой требуемой степенью точности. Этот факт важен не столько для вычислений, сколько для построения теории. Выражаясь более точно, мы сейчас докажем одну из важнейших теорем анализа, а именно: формулу Тейлора с остаточным членом в общей форме (или в форме Шлёмильха–Роша).

Теорема 71. Пусть $f(x)$ – $(n+1)$-раз дифференцируемая функция на интервале (a, b). Пусть x_0, x $(x_0<x)$ – любые две точки из этого интервала. Тогда для любого положительного $p>0$ существует точка $\xi\in(x_0, x)$ такая, что

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{pn!}(x - x_0)^p(x - \xi)^{n-p+1}.$$

Доказательство. Определим число H равенством

$$H = \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^p} = \frac{f(x) - P_n(x_0, x)}{(x - x_0)^p},$$

где

$$P_n(x_0, x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots +$$

$$+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

По существу, нам нужно доказать, что на интервале (x_0,x) найдётся точка ξ такая, что

$$H=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{pn!}(x-\xi)^{n-p+1}.$$

Докажем это, опираясь на теорему Ролля. Равенство, определяющее число H, можно записать так:

$$f(x)-P_n(x_0,x)-H(x-x_0)^p=0.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t)$, определённую на $[x_0,x]$ соотношением

$$\varphi(t)=f(x)-P_n(t,x)-H(x-t)^p.$$

Тогда, очевидно, $\varphi(x_0)$=0. Кроме того, $\varphi(t)$ дифференцируема на (x_0,x) и непрерывна на $[x_0,x]$. Далее, так как справедливо равенство $P_n(x,x)$=$f(x)$, то

$$\varphi(x)=f(x)-f(x)-H(x-x)^p=0.$$

Следовательно, по теореме Ролля на интервале (x_0,x) производная $\varphi'(t)$ обращается в нуль в некоторой точке ξ, т.е.

$$\varphi'(t)|_{t=\xi}=0,\quad \xi\in(x_0,x).$$

Запишем $\varphi'(t)$ в развернутой форме:

$$\varphi'(t)=-P_n'(t,x)+pH(x-t)^{p-1}=$$

$$=\left(f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)'_t+pH(x-t)^{p-1}.$$

Так как при k=1, 2, . . ., n имеем

$$\left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)'_t=\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1},$$

то

$$\varphi'(t) = pH(x-t)^{p-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Отсюда при $t{=}\xi$ получаем

$$\varphi'(t)|_{t=\xi} = pH(x-\xi)^{p-1} - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = 0.$$

Следовательно,

$$H = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{pn!}(x-\xi)^{n-p+1}.$$

Следствие 22. Остаточный член в формуле Тейлора можно представить в форме Шлёмильха–Роша и при $x_0 \geq x$.

Частные случаи.

1. Остаточный член в форме Лагранжа ($p{=}n{+}1$):

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

2. Остаточный член в форме Коши ($p{=}1$):

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n$$

или при $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$, $1-\theta = \frac{x-\xi}{x-x_0}$:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n.$$

Покажем теперь, что многочлен Тейлора является многочленом наилучшего приближения функции в окрестности данной точки.

Заметим сначала, что, очевидно, всякий многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{70}$$

может быть представлен для любого x_0 в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(x - x_0)^k,$$

для этого достаточно положить $x{=}x_0{+}h$ в (70) и разложить правую часть по степеням h.

Теорема 72. Пусть функция f дифференцируема до порядка n включительно в точке x_0 и пусть $f(x){=}P_n(x){+}o((x - x_0)^n)$, $x{\to}x_0$, где $P_n(x){=} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x{-}x_0)^k$ – некоторый многочлен степени, меньшей или равной n. Тогда $a_k{=}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k{=}0, 1, \ldots, n$, т.е. $P_n(x)$ является многочленом Тейлора.

Доказательство. По теореме 70 имеем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

откуда, переходя к пределу при $x{\to}x_0$, получим $a_0{=}f(x_0)$. Отбрасывая слева и справа этот член, сокращая оставшиеся в обеих частях выражения на $x{-}x_0$ ($x{\neq}x_0$) и замечая, что

$$o((x - x_0)^n) = \varepsilon(x)(x - x_0)^n, \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

и значит, при $x{\to}x_0$

$$\frac{o((x - x_0)^n)}{x - x_0} = \varepsilon(x)(x{-}x_0)^{n-1} = o((x{-}x_0)^{n-1}),\ x \neq x_0,\ n = 1, 2, \ldots,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k(x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}), \quad x \to x_0.$$

Переходя снова к пределу при $x \to x_0$, будем иметь $a_1 = f'(x_0)$. Продолжая таким же образом, получим $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Доказанная теорема означает, что никакой многочлен степени, меньшей или равной n, отличный от многочлена Тейлора порядка n, не может приближать данную функцию с точностью до $o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$ (а значит, и с более высокой точностью).

Приведём примеры разложения элементарных функций по формуле Тейлора.

Основные разложения.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Функция $\sin x$ обладает производными всех порядков. Найдём для неё формулу Тейлора при $x_0 = 0$, т.е. формулу Маклорена. По формуле (56) получим, что $(\sin x)^{(m)} = \sin\left(x + m\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому при $k = 0, 1, \ldots$

$$f^{(m)}(0) = \sin\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0, & m = 2k, \\ (-1)^k, & m = 2k+1, \end{cases}$$

и согласно формуле (67)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

Мы записали здесь остаточный член в виде $o(x^{2n+2})$, а не в виде $o(x^{2n+1})$, так как следующий за последним выписанным слагаемым член многочлена Тейлора равен нулю.

2. Рассмотрим функцию $f(x) = \cos x$. Как известно (см. формулу (57)) $(\cos x)^{(m)} = \cos\left(x + m\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому, при $k=0, 1, \ldots$

$$f^{(m)}(0) = \cos\frac{m\pi}{2} = \begin{cases} 0, & m = 2k+1, \\ (-1)^k, & m = 2k, \end{cases}$$

и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

3. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Поскольку $(e^x)^{(k)} = e^x$, $k=0, 1, \ldots$ (см. формулу (54)), то $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, \ldots$, следовательно,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{71}$$

Отсюда, заменив x на $-x$, получим

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + o(x^n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{72}$$

4. Используя разложения (71) и (72), найдём разложения гиперболических функций $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Будем иметь

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

5. Рассмотрим функцию $f(x)=(1 + x)^a$, где $a \in \mathbb{R}$ – некоторое фиксированное число. Так как при $k=1, 2, \ldots$ (см. формулу (53))

$$f^{(k)}(x) = ((1 + x)^a)^{(k)} = a(a - 1) \ldots (a - k + 1)(1 + x)^{a-k},$$

то $f^{(k)}(0)=a(a - 1)...(a - k + 1)$, и следовательно,

$$(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a - 1)}{2!}x^2 + \frac{a(a - 1)(a - 2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{a(a - 1) \ldots (a - n + 1)}{n!}x^n + o(x^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a(a - 1) \ldots (a - k + 1)}{k!}x^k + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

6. Рассмотрим функцию $f(x)= \ln (1 + x)$. Легко видеть, что (см. формулу (55)) $f^{(k)}(x) = (\ln(1 + x))^{(n)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, $k=1, 2, \ldots$. Поэтому $f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k - 1)!$, $k=1, 2, \ldots$, $f(0)=0$, тогда

$$\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \to 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пример 73. Для функции $y= \sin x$ выпишем несколько первых полиномов формулы Тейлора при $x_0=0$:

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \quad P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

Каждый из этих полиномов приближает функцию $\sin x$ в окрестности точки $x_0=0$ со всё большей точностью (см. рис. 13).

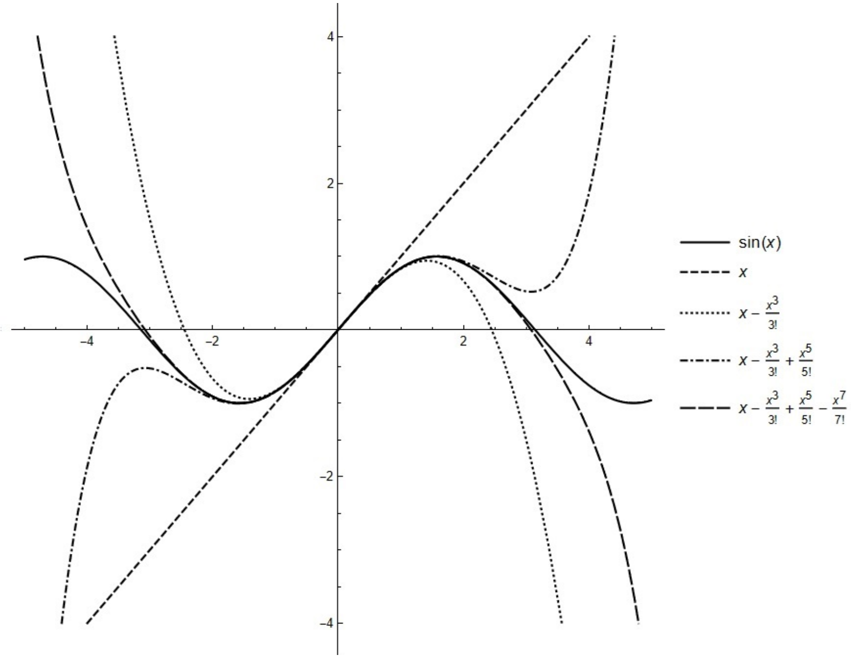


Рис. 13: Функция $y = \sin x$ и первые четыре её полинома Тейлора.

Пример 74. [?] Найти разложение функции y= tg x по формуле Тейлора при x_0=0 до члена с x^5.

Поскольку функция tg(x) нечётная, то её разложение в окрестности точки x_0=0 имеет вид

$$\mathrm{tg}(x) = Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^6), \quad x \to 0,$$

где A, B, C – числовые коэффициенты. Используя разложения для $\sin x$ и $\cos x$, получим

$$\sin(x) = [Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^6)] \cos x, \quad x \to 0,$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) =$$

$$= (Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^6)) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)\right), \quad x \to 0.$$

Раскрыв скобки, будем иметь

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) =$$

$$= Ax + \left(B - \frac{A}{2}\right) x^3 + \left(C + \frac{A}{4!} - \frac{B}{2}\right) x^5 + o(x^6), \quad x \to 0.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим

$$A = 1, \qquad B - \frac{A}{2} = -\frac{1}{3!}, \qquad C + \frac{A}{4!} - \frac{B}{2} = \frac{1}{5!},$$

тогда

$$A = 1, \qquad B = \frac{1}{3}, \qquad C = \frac{2}{15}$$

и

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6), \quad x \to 0.$$

6.4 Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталя

Во многих случаях отыскание предела функции, заданной аналитически, при стремлении аргумента к некоторой точке (числу или к одной из бесконечностей ∞, $+\infty$ или $-\infty$), выполняемое путём формальной подстановки соответствующего значения вместо аргумента в формулу, задающую рассматриваемую функцию, приводит к выражениям вида

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \infty - \infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \qquad 1^\infty.$$

Они называются *неопределённостями*, так как по ним нельзя судить о том, существует или нет указанный предел, не говоря уже о нахождении его значения, если он существует. В этом случае вычисление предела называется также “раскрытием неопределённостей”. Мы рассмотрим способы отыскания пределов, который носят общее название *правил Лопиталя*.

Рассмотрим сначала правило раскрытия неопределённости вида $\frac{0}{0}$.

Теорема 73. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

1. дифференцируемы на интервале $(a, a{+}\delta)$, $\delta{>}0$;
2. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$;
3. $g'(x){\neq}0$ для всех $x{\in}(a, a{+}\delta)$;
4. существует конечный или бесконечный (равный $+\infty$ или $-\infty$) предел $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы функции f и g не определены в точке a. Доопределим их, положив $f(a){=}g(a){=}0$. Теперь f и g непрерывны в точке a и удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем значении на любом отрезке $[a, x]$, где $a{<}x{<}a{+}\delta$. Поэтому для каждого $x{\in}(a, a{+}\delta)$ существует такое $\xi{=}\xi(x){\in}(a, x)$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{73}$$

причём $\lim\limits_{x\to a+0} \xi(x){=}a$.

Поэтому, если существует $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}{=}k$, то из правила замены переменного для пределов функций (см. (35)) следует, что существует и $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}{=}k$.

Теперь из (73) получаем

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k.$$

Следствие 23. В теореме 73 можно заменить условие $x{\to}a{+}0$ и интервал $(a, a{+}\delta)$ на условие $x{\to}a{-}0$ и интервал $(a{-}\delta, a)$.

Следствие 24 (первое правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

1. дифференцируемы на интервале $(a{-}\delta, a{+}\delta)$, за исключением, быть может, точки $x{=}a$;

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

3. $g'(x){\neq}0$ для всех $x{\in}(a{-}\delta, a{+}\delta)$, $x{\neq}a$;

4. существует конечный или бесконечный (равный $+\infty$ или $-\infty$) предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{74}$$

Справедливо и другое утверждение.

Теорема 74. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x){=}0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x){=}0$, существуют предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

и значения $f'(a)$ и $g'(a) \neq 0$. То

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Доказательство. Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f'(a)(x-a) + o(x-a)}{g'(a)(x-a) + o(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a) + o(1)}{g'(a) + o(1)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Следствие 25. Первое правило Лопиталя имеет место и при $a=\infty$.

Доказательство. Пусть функции f и g дифференцируемы при $x>c$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)= \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$, $g'(x)\neq 0$ при всех $x>c$. Подстановка $x=\frac{1}{z}$ приводит задачу к вычислению предела для $z=0$. Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{-f'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{-g'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Рассмотрим теперь правило раскрытия неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 75. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

1. дифференцируемы на интервале $(a, a+\delta)$, $\delta>0$;
2. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\infty$;
3. $g'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a, a+\delta)$;
4. существует конечный или бесконечный (равный $+\infty$ или $-\infty$) предел $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функции $f(x)$ и $g(x)$, которые обе стремятся к бесконечности при $x\to a+0$. Для доказательства правила Лопиталя при раскрытии неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ будем сначала считать, что

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\mathbb{R}.$$

Возьмём произвольное $\varepsilon>0$ и введём обозначение $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{5+4|A|}$. Без ограничения общности будем считать, что $\varepsilon_1<1/2$, т.е. $\varepsilon<\frac{5+4|A|}{2}$.

Тогда для любого $\varepsilon_1\in(0,1/2)$ найдётся $\delta_1=\delta_1(\varepsilon_1)>0$ такое, что

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon_1,\quad \forall x\in(a,a+\delta_1).$$

Пусть x_0 — некоторая точка из $(a,a+\delta_1)$, тогда, в силу $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, найдётся число $\delta_2=\delta_2(\varepsilon_1)>0$ такое, что

$$|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{\varepsilon_1}\Leftrightarrow\frac{|f(x_0)|}{|f(x)|}<\varepsilon_1,\quad \forall x\in(a,a+\delta_2).$$

Также найдётся $\delta_3=\delta_3(\varepsilon_1)>0$ такое, что

$$|g(x)|>\frac{|g(x_0)|}{\varepsilon_1}\Leftrightarrow\frac{|g(x_0)|}{|g(x)|}<\varepsilon_1,\quad \forall x\in(a,a+\delta_3).$$

Пусть $\delta_4=\min(\delta_1,\delta_2,\delta_3)$, тогда в силу теоремы Коши 67 для любого $x\in(a,a+\delta_4)$ найдётся такая точка $\xi\in(x,x_0)\subset(a,a+\delta_4)$, что

$$\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}-A\right|=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right|<\varepsilon_1.$$

Тогда

$$\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right|=\left|\left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}-A\right)+A\right|<\varepsilon_1+|A|<1+|A|.$$

Кроме того, при $x\in(a,a+\delta_4)$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{f(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)}=\frac{f(x_0)}{f(x)}-1=\alpha-1,\qquad |\alpha|<\varepsilon_1<\frac{1}{2},$$

$$\frac{\Delta g(x_0)}{f(x)}=\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x_0)}=\frac{g(x_0)}{g(x)}-1=\beta-1,\qquad |\beta|<\varepsilon_1<\frac{1}{2},$$

и

$$\left|\frac{\frac{\Delta g(x_0)}{f(x)}}{\frac{\Delta f(x_0)}{f(x)}}-1\right|=\left|\frac{1-\beta}{1-\alpha}-1\right|=\frac{|\alpha-\beta|}{|1-\alpha|}\le\frac{2\varepsilon_1}{1/2}=4\varepsilon_1.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|=\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}+\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}-A\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right|+\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}-A\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right|\cdot\left|\frac{\frac{\Delta g(x_0)}{f(x)}}{\frac{\Delta f(x_0)}{f(x)}}-1\right|+\varepsilon_1\leq(1+|A|)\cdot 4\varepsilon_1+\varepsilon_1=\varepsilon_1(5+4|A|)=\varepsilon.$$

Получаем доказываемое утверждение при $A\in\mathbb{R}$.

Если же $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$, то $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$, поэтому в силу только что доказанного $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$, а это означает, что $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$.

Следствие 26. В теореме 75 можно заменить условие $x\to a+0$ и интервал $(a,a+\delta)$ на условие $x\to a-0$ и интервал $(a-\delta,a)$.

Следствие 27 (второе правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

1. дифференцируемы на интервале $(a-\delta,a+\delta)$, за исключением, быть может, точки $x=a$;
2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$;
3. $g'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a-\delta,a+\delta)$, $x\neq a$;
4. существует конечный или бесконечный (равный $+\infty$ или $-\infty$) предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\tag{75}$$

Следствие 28. Второе правило Лопиталя имеет место и при $a=\pm\infty$.

Замечание 16. Иногда правило Лопиталя приходится применять несколько раз, т.е. вместо формул (74) и (75) использовать

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Замечание 17. При однократном применении правила Лопиталя могут возникнуть следующие три случая:

1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ существует, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, т.е. имеет место правило Лопиталя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Хотя может оказаться, что новая дробь не лучше старой и в этом случае применение правила Лопиталя бесполезно (см. пример 77);
2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ существует, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, т.е. новая дробь хуже старой дроби, здесь применение правила Лопиталя невозможно и может привести к неверным заключениям (см. пример 78);
3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ не существует, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует.

Случай когда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ не существует, а $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует в действительности невозможен, т.к. из существования $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ обязательно следует существование $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Пример 75. Пользуясь правилом Лопиталя, найдём предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha>0$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0.$$

Это означает, что при $x \to +\infty$ функция $\ln x$ растёт медленнее, чем любая положительная степень переменной x.

Пример 76. Пользуясь правилом Лопиталя, найдём предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0.$$

Это означает, что при $x \to +\infty$ степень x^n растет медленнее, чем показательная функция a^x при $a > 1$.

Пример 77. Рассмотрим случай формального бессилия правила Лопиталя. Для $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(\sqrt{1+x^2})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

т.е. получилась дробь, обратная данной, и задача осталась той же. Тогда как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

Пример 78. Рассмотрим пример, когда применение правила Лопиталя невозможно. Имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin^3 x}{5x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin^3 x}{x}}{5+\frac{6}{x}} = \frac{1}{5}.$$

Однако, предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sin^3 x)'}{(5x+6)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+3\sin^2 x \cos x}{5}$$

не существует.

Рассмотрим теперь вопрос, как применять правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞ и ∞^0.

1. Если функция $f(x)g(x)$ принимает неопределённую форму $0{\cdot}\infty$ при $x{=}a$, то переписав её в виде
$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$
или
$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$
мы сведём вопрос к раскрытию неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

2. Выражение, которое даёт в пределе неопределённость вида $\infty{-}\infty$, следует свести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, например, приведением к общему знаменателю.

3. Функция вида $y{=}f(x)^{g(x)}$ может дать одну из трёх неопределённостей 0^0, 1^∞, ∞^0. В этом случае следует записать предел в виде
$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}.$$
В каждом из приведённых выше случаев $g(x)\ln f(x)$ даёт уже рассмотренную неопределённость $0{\cdot}\infty$.

6.5 Необходимое и достаточное условие монотонности функции. Экстремумы

В этом подразделе покажем, как теория дифференцирования применяется к изучению поведения функции, а именно к определению её экстремальных точек, промежутков монотонности и др.

Теорема 76. Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция f не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы во всех его точках производная была неотрицательной, $f'(x) \geq 0$ (соответственно, неположительной $f'(x) \leq 0$).

Если всюду на (a, b) производная положительна: $f'(x) > 0$ (соответственно отрицательна: $f'(x) < 0$), то функция f строго возрастает (строго убывает) на рассматриваемом интервале.

Доказательство.

Необходимость. Если функция f не убывает (не возрастает) на (a, b), то для любой точки $x_0 \in (a, b)$ при $\Delta x > 0$ имеем $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$ $(\Delta y \leq 0)$, т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ $(\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0)$. И переходя к пределу при $x \to x_0$, получаем $f'(x_0) \geq 0$ $(f'(x_0) \leq 0)$.

Достаточность. Пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Тогда по теореме Лагранжа 66 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < x_2$. Так как $x_2 - x_1 > 0$, то при $f'(x) \geq 0$ на (a, b) (откуда следует, в частности, что $f'(\xi) \geq 0$) будем иметь $f(x_2) \geq f(x_1)$, т.е. функция f не убывает. Аналогично, при $f'(x) \leq 0$ на (a, b) имеем $f'(\xi) \leq 0$ и, следовательно, $f(x_2) \leq f(x_1)$, т.е. функция f убывает.

Если же $f'(x) > 0$ на (a, b), то $f'(\xi) > 0$ и поэтому $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. функция f строго возрастает. Пусть теперь $f'(x) < 0$ на (a, b), тогда $f'(\xi) < 0$, следовательно, $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. функция f строго убывает. Доказательство закончено.

Условия $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ не являются необходимыми для строгого возрастания, соответственно, строгого убывания функции. Например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает, но $f'(x)|_{x=0} = 0$.

Теорема 76 остаётся верной для непрерывных функций, не имеющих производной в конечном числе точек. Утверждение второй части теоремы 76 остаётся в силе, если, кроме того, в конечном числе точек производная обращается в нуль.

Используя теорему 76 можно доказывать справедливость неравенств.

Пример 79. Определить, что больше: e^{π} или π^{e}.

Рассмотрим функцию $f(x){=}{-}\frac{\ln x}{x}$ на интервале (e,π). Найдём её производную:

$$f'(x) = \left(-\frac{\ln x}{x}\right)' = -\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{\ln x - 1}{x^2} > 0, \qquad \forall x > e.$$

Получаем, что функция $f(x){=}{-}\frac{\ln x}{x}$ не убывает на интервале (e,π), тогда

$$\lim_{x\to e+0} f(x) = -\frac{\ln e}{e} < -\frac{\ln x}{x} = f(x) < -\frac{\ln \pi}{\pi} = \lim_{x\to \pi-0} f(x).$$

Следовательно,

$$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \;\Rightarrow\; \pi \ln e > e \ln \pi \;\Rightarrow\; \ln e^{\pi} > \ln \pi^{e} \;\Rightarrow\; e^{\pi} > \pi^{e}.$$

Таким образом, e^{π} больше чем π^{e}.

Дадим определение локальных экстремумов функции.

Определение 72. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0. Точка x_0 называется точкой *локального максимума* (соответственно точкой *локального минимума*) функции f, если существует такое $\delta{>}0$, что для всех Δx, удовлетворяющих условию $|\Delta x|{<}\delta$, выполняется неравенство $f(x_0{+}\Delta x){\le}f(x_0)$ (соответственно $f(x_0{+}\Delta x){\ge}f(x_0)$).

Если существует такое $\delta{>}0$, что для всех $\Delta x{\neq}0$ таких, что $|\Delta x|{<}\delta$, выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x){<}f(x_0)$ (соответственно $f(x_0{+}\Delta x){>}f(x_0)$, то x_0 называется точкой *строгого локального максимума* (соответственно *строгого локального минимума*).

Точки (строгого) максимума и минимума называются точками *(строгого) экстремума*.

Для точек x_0 строгого экстремума функции f, и только для них, приращение $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ не меняет знака при переходе аргумента через x_0, т.е. при изменении знака Δx. Именно $\Delta f<0$ для точек строгого максимума и $\Delta f>0$ в случае строгого минимума независимо от знака достаточно малого $\Delta x\neq 0$.

Теорема 77 (необходимые условия экстремума). Пусть x_0 является точкой экстремума функции f, определённой в некоторой окрестности точки x_0. Тогда либо производная $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Действительно, если x_0 является точкой экстремума для функции f, то найдется такая окрестность $U_\delta(x_0)$, что значение функции f в точке x_0 будет наибольшим или наименьшим в этой окрестности. Поэтому, если в точке x_0 существует производная, то она, согласно теореме Ферма 64, равна нулю. Теорема доказана.

Отметим, что условие $f'(x_0)=0$ не является для дифференцируемой при $x=x_0$ функции достаточным условием наличия экстремума, как это показывает пример функции $f(x)=x^3$, которая в точке $x=0$ имеет производную, равную нулю, но для которой $x=0$ не является точкой экстремума.

Теорема 78 (достаточные условия строгого экстремума). Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки $x_0\in(a,b)$, в которой она является, однако, непрерывной. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через x_0, то x_0 является точкой строгого экстремума.

При этом, если для $x_0-\delta<x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x)>0$, а для $x_0<x<x_0+\delta$ – неравенство $f'(x)<0$, то x_0 является точкой строгого максимума, а если для $x_0-\delta<x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x)<0$, а для $x_0<x<x_0+\delta$ – неравенство $f'(x)>0$, то x_0 является точкой строгого минимума (рис. 14).

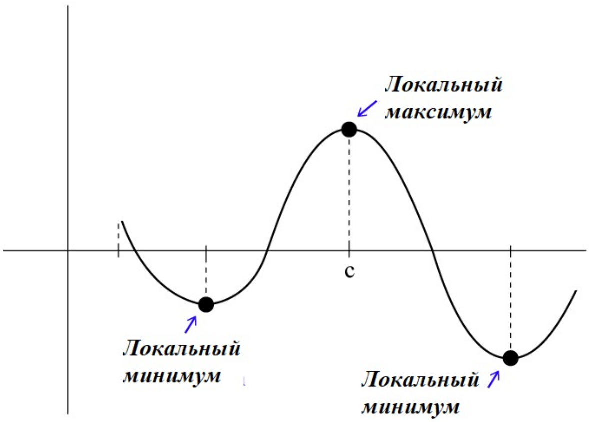


Рис. 14: Максимум и минимум.

Доказательство. Рассмотрим случай $f'(x)>0$ для $x<x_0$ и $f'(x)<0$ для $x>x_0$, где x принадлежит окрестности точки x_0, указанной в условиях теоремы. По теореме Лагранжа 66

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

где ξ лежит на интервале с концами x_0 и x.

Если $x<x_0$, то $x-x_0<0$ и $f'(\xi)>0$, так как $x<\xi<x_0$. Если $x>x_0$, то $x-x_0>0$ и $f'(\xi)<0$, так как в этом случае $x_0<\xi<x$. Таким образом, всегда $\Delta f<0$, т.е. точка x_0 является точкой строгого максимума. Аналогично рассматривается второй случай. Теорема доказана.

Из теоремы 78 следует достаточное условие локального экстремума функции в терминах смены знака производной.

- Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна при $x{=}x_0$, имеет всюду в рассматриваемой окрестности (кроме, может быть, точки x_0) производную и эта производная с каждой стороны от x_0 сохраняет постоянный знак (следовательно, можно говорить о сохранении или перемене знака у производной при переходе через x_0), то для того, чтобы при $x{=}x_0$ функция достигала экстремума, необходимо и достаточно, чтобы производная меняла знак при переходе через точку x_0.

Получим теперь достаточное условие локального экстремума функции, имеющей производные высших порядков.

Определение 73. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, будем называть x_0 *точкой возрастания (убывания)* функции f, если существует такое $\delta{>}0$, что при $x_0{-}\delta{<}x{<}x_0$ выполняется неравенство $f(x){<}f(x_0)$ (соответственно $f(x){>}f(x_0)$), а при $x_0{<}x{<}x_0{+}\delta$ – неравенство $f(x){>}f(x_0)$ (соответственно $f(x){<}f(x_0)$).

Если функция определена на интервале, то могут существовать точки, не являющиеся ни точками экстремума функции, ни точками возрастания, ни точками убывания.

Теорема 79. Пусть в точке x_0 у функции f существуют производные до порядка $n{\geq}1$ включительно, причем

$$f^{(i)}(x_0) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n-1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{76}$$

Тогда, если $n{=}2k$, $k{=}1,2,\ldots$, т.е. n – чётное число, то функция f имеет в точке x_0 строгий экстремум, а именно, максимум при $f^{(2k)}(x_0){<}0$ и минимум при $f^{(2k)}(x_0){>}0$. Если же $n{=}2k{+}1$, $k{=}0,1,2,\ldots$, т.е. n – нечётное число, то функция f не имеет в точке x_0 экстремума; в этом случае x_0 является точкой возрастания при $f^{(2k+1)}(x_0){>}0$ и убывания при $f^{(2k+1)}(x_0){<}0$.

Доказательство. Сначала докажем одно простое замечание. Если $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to x_0$, то существует такое $\delta>0$, что при $|x-x_0|<\delta$ справедливо неравенство

$$|\alpha(x)| \leq \frac{1}{2}|\beta(x)|.$$

Действительно, $\alpha(x)=\varepsilon(x)\beta(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$, тогда найдётся $\delta>0$ такое, что при $|x-x_0|<\delta$ выполняется неравенство $|\varepsilon(x)|<\frac{1}{2}$, откуда и следует указанное неравенство.

Поскольку f имеет в точке x_0 производную порядка $n\geq 1$, то (согласно определению производной) производная порядка $n-1$ рассматриваемой функции определена в некоторой окрестности точки x_0. Поэтому и сама функция f также определена, во всяком случае в той же окрестности точки x_0.

Напишем формулу Тейлора n-го порядка для функции f в окрестности точки x_0.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),\ \ x\to x_0.$$

В силу (76) получим, что при $x=x_0+\Delta x$, $\alpha(x)=o((x-x_0)^n)$, $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ будем иметь

$$\Delta f = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \alpha(x),\ \alpha(x) = o(\Delta x^n), \quad \Delta x\to 0. \qquad (77)$$

Поскольку $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ не зависит от x и $o(g)=o(cg)$, то

$$\alpha(x) = o\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right), \quad \Delta x\to 0.$$

Поэтому, согласно сделанному замечанию, существует такое $\delta>0$, что при $|\Delta x|<\delta$

$$|\alpha(x)| < \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right|.$$

Отсюда следует, что при $|\Delta x|<\delta$, $\Delta x\neq 0$, знак правой части равенства (77), а значит и знак Δf, совпадает со знаком первого слагаемого правой части.

Если $n=2k$, $k=1,2,\ldots$, то в (77) Δx возводится в чётную степень, поэтому знак Δf не зависит от знака Δx, и значит, x_0 является точкой строгого экстремума, причём точкой строгого максимума при $f^{(2k)}(x_0)<0$ (в этом случае $\Delta f<0$) и строгого минимума при $f^{(2k)}(x_0)>0$ (в этом случае $\Delta f>0$).

Если же $n=2k+1$, $k=0,1,2,\ldots$, то Δx возводится в нечётную степень, поэтому знак Δf меняется вместе с изменением знака Δx, и значит, x_0 не является точкой экстремума. Если Δx меняет знак с "-" на "+", то при $f^{(2k+1)}(x_0)>0$ приращение Δf меняет знак с "-" на "+", и значит, x_0 является точкой возрастания функции f, а при $f^{(2k+1)}(x_0)<0$ приращение Δf меняет знак с "+" на "-", и значит, x_0 является точкой убывания функции f.

Следствие 29. Если $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то при $f''(x_0)>0$ x_0 является точкой строгого минимума, а при $f''(x_0)<0$ – точкой строгого максимума функции f (рис. 15).

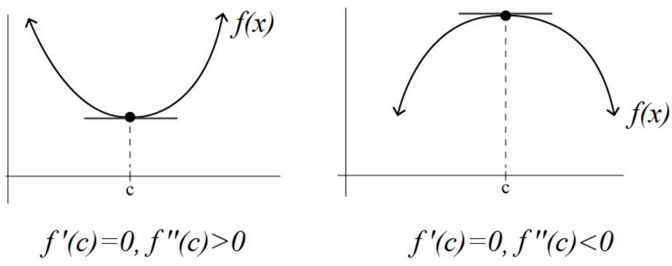


Рис. 15: Знак второй производной при минимуме и максимуме.

Точка, в которой функция определена, а её производная равна нулю, называется *стационарной точкой*.

Точка, в которой функция определена, а её производная либо равна нулю, либо не существует, называется *критической точкой*.

Приведём пример задачи, где требуется найти экстремум функции.

Пример 80. Дана фанерная заготовка в виде кругового сегмента круга радиуса R, угол дуги которого равен 2θ. Сегмент не превышает полукруга. Из этого кругового сегмента нужно вырезать прямоугольник с наибольшей площадью, одна сторона которого лежит на отрезке прямой, ограничивающей круговой сегмент, а противоположные вершины которого лежат на дуге окружности кругового сегмента. Выписать угол дуги сегмента, стягиваемой стороной прямоугольника с максимальной площадью.

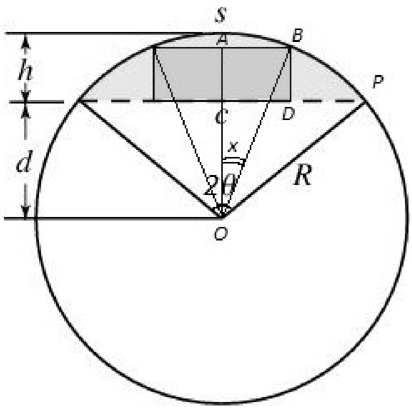


Рис. 16: Прямоугольник, вписанный в сегмент.

Решение. Изобразим на рис. 16 искомый прямоугольник, вписанный в сегмент. Пусть угол дуги сегмента, стягиваемой стороной прямоугольника равен $2x$. Поскольку сегмент не превышает полукруга, то $0 \leq 2x \leq \pi$ или $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Чтобы найти площадь искомого прямоугольника и максимизировать её, найдём стороны этого прямоугольника. Прямоугольник разделим пополам радиусом и обозначим вершины правой половины этого прямоугольника A, B, C, D. Длина AB будет равна половине длины хорды окружности, стягиваемой углом $2x$. Длина хорды равна $2R\sin x$, где R – радиус окружности, $2x$ – центральный угол, опирающийся на данную хорду. Тогда длина AB будет равна $|AB|{=}R\sin x$, а длина стороны прямоугольника, лежащей на хорде, равна $2R\sin x$.

Чтобы найти длину AC, найдём длины OC и AO. Для треугольника ΔOCP имеем $|OP|{=}R$, $\angle POC{=}\theta$, $\angle PCO{=}\frac{\pi}{2}$, тогда этот треугольник прямоугольный с гипотенузой OP. Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение длины прилежащего катета к длине гипотенузы, т.е. $\cos\theta{=}\frac{|OC|}{R}$. Тогда $|OC|{=}R\cos\theta$.

Чтобы найти длину AO, рассмотрим прямоугольный ΔABO. Для него $\angle BOA{=}x$, $|OB|{=}R$, значит, $|AO|{=}R\cos x$. Получим длину стороны AB прямоугольника $|AC|{=}|AO|{-}|OC|{=}R\cos x{-}R\cos\theta$.

Стороны прямоугольника найдены, найдём его площадь:

$$S(x) = 2R^2\sin x(\cos x - \cos\theta).$$

Чтобы определить, при каком значении x эта площадь будет максимальной, найдём $S'(x)$ и корни уравнения $S'(x){=}0$:

$$S'(x) = R^2(\sin 2x - 2\cos\theta\sin x)' = 2R^2(\cos 2x - \cos\theta\cos x) = 0.$$

Поскольку $\cos 2x{=}2\cos^2 x{-}1$, то получим квадратное уравнение относительно $\cos x$:

$$2\cos^2 x - \cos\theta\cos x - 1 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D = \cos^2\theta + 8,$$

следовательно,

$$\cos x = \frac{\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta + 8}}{2}.$$

Поскольку $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, то $\cos x \ge 0$ и

$$\cos x = \frac{\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 8}}{2} \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 8}}{2}\right).$$

Исследуем знак второй производной $S(x)$:

$$S''(x) = 2R^2(\cos 2x - \cos\theta\cos x)' = 2R^2(-2\sin 2x + \cos\theta\sin x) =$$

$$= 2R^2(-4\sin x\cos x + \cos\theta\sin x) = 2R^2\sin x(-4\cos x + \cos\theta).$$

При $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ получаем, что $\sin x \ge 0$. Поскольку $x \le \theta$ и на промежутке $[0, \pi/2]$ косинус не возрастает, то $\cos x \ge \cos\theta$. Следовательно, $(-4\cos x + \cos\theta) < 0$, $S''(x) < 0$ и $x = \arccos\left(\frac{\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 8}}{2}\right)$ – точка максимума функции $S(x)$.

Таким образом, угол дуги сегмента, стягиваемой стороной прямоугольника с максимальной площадью, равен $x = \arccos\left(\frac{\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta + 8}}{2}\right)$.

6.6 Выпуклость функции и точки перегиба

Введём определения выпуклой вверх и выпуклой вниз функций.

Пусть функция f определена на интервале (a, b) и пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Проведём прямую через точки $A = (x_1, f(x_1))$ и $B = (x_2, f(x_2))$, лежащие на графике функции f. Её уравнение будет

$$\frac{y - f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

или

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = l(x).$$

Очевидно, $l(x_1) = f(x_1)$, $l(x_2) = f(x_2)$.

Определение 74. Функция f называется *выпуклой вверх* (*выпуклой вниз*) на интервале (a, b), если каковы бы ни были точки x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, для любой точки x_0 интервала (x_1, x_2) выполняется неравенство

$$l(x_0) \le f(x_0) \tag{78}$$

(соответственно

$$l(x_0) \ge f(x_0)). \tag{79}$$

Неравенство (78) означает, что всякий раз, когда мы берём две точки на графике функции $y{=}f(x)$, соединяющий их отрезок находится под графиком функции. Неравенство (79) означает, что любая точка хорды AB (т.е. отрезка прямой $y{=}l(x)$ с концами в точках A и B) лежит не ниже точки графика функции f, соответствующей тому же значению аргумента (рис. 17).

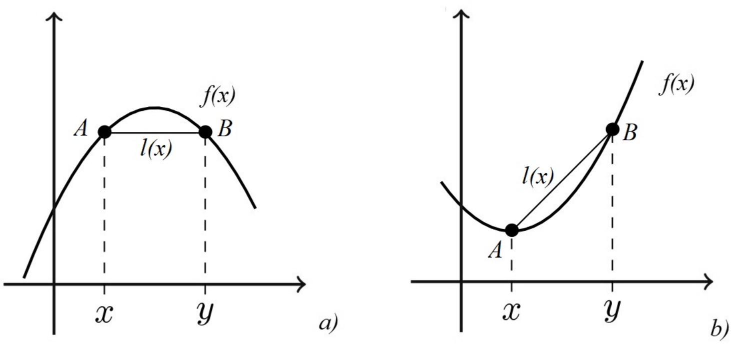


Рис. 17: Выпуклость вверх и выпуклость вниз.

Определение 75. Если вместо (78) и (79) выполняются строгие неравенства $l(x_0)<f(x_0)$ и, соответственно, $l(x_0)>f(x_0)$ при любых x_0, x_1 и x_2 таких, что $a<x_1<x_0<x_2<b$, то функция f называется *строго выпуклой вверх* (*строго выпуклой вниз*) на интервале (a,b).

Теорема 80. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале (a,b) и имеет в нём конечную производную $f'(x)$. Для того чтобы $f(x)$ была выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале (a,b), необходимо и достаточно, чтобы её производная $f'(x)$ не возрастала (не убывала) на этом интервале.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ выпукла вверх. Предполагая $a<x_1<x<x_2<b$, перепишем условие $l(x)=\frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}\leq f(x)$ в виде:

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \leq \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}. \tag{80}$$

Если теперь устремить x сначала к x_2, а затем к x_1, то в пределах, соответственно, получим

$$f'(x_2) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \qquad \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq f'(x_1),$$

откуда $f'(x_2)\leq f'(x_1)$, так что функция $f'(x)$ действительно оказывается не возрастающей. Аналогично доказывается случай выпуклой вниз функции.

Достаточность. Предположим теперь выполнение условия $f'(x_2)\leq f'(x_1)$, $a<x_1<x<x_2<b$ (т.е. функция $f(x)$ не возрастает на (a,b)). Для доказательства неравенства $\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\leq\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ применим к каждой из его частей теорему Лагранжа 66:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1), \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2),$$

$$x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2.$$

Так как по предположению $f'(\xi_2) \le f'(\xi_1)$, $\xi_1 < \xi_2$, то имеет место соотношение

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \le \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

а из него можно восстановить соотношение

$$l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \le f(x),$$

что и даёт выпуклость вверх функции. Аналогично доказывается случай не убывающей функции.

Теорема 81. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ на интервале (a, b) и имеет внутри него конечную вторую производную $f''(x)$. Для выпуклости вверх (вниз) функции $f(x)$ на интервале (a, b) необходимо и достаточно, чтобы внутри (a, b) выполнялось неравенство

$$f''(x) \le 0 \qquad (f''(x) \ge 0).$$

Доказательство. В связи с предыдущей теоремой 80 для доказательства достаточно применить теорему о монотонности дифференцируемой функции (теорема 54) к функции $f'(x)$.

Рассмотрим теперь точки перегиба графика функции. Точки перегиба – это точки, в которых график функции меняет направление выпуклости: с выпуклости вверх на выпуклость вниз или наоборот.

Определение 76. Пусть функция f дифференцируема при $x = x_0$ и пусть $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$. Если разность $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 называется *точкой перегиба функции* f (см. рис. 18).

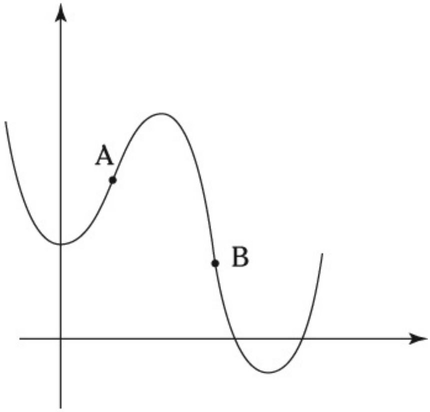


Рис. 18: A и B — точки перегиба.

Теорема 82 (необходимое условие наличия точки перегиба). Пусть функция f имеет непрерывную при $x=x_0$ вторую производную. Тогда, если точка x_0 является точкой перегиба функции f, то $f''(x_0)=0$.

Доказательство. Пусть f имеет в точке x_0 непрерывную при $x=x_0$ вторую производную и $y=L(x)$ – уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$, т.е.

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

По формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2), \ x\to x_0,$$

тогда

$$f(x) - L(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \ x\to x_0.$$

Если $f''(x_0)\neq 0$, то знак разности $f(x)-L(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 совпадает со знаком числа $f''(x_0)$, следовательно, разность $f(x)-L(x)$ не меняет знака в точке x_0 и тогда эта точка не является точкой перегиба. Таким образом, $f''(x_0)=0$.

Теорема 83 (достаточное условие наличия точек перегиба). Если функция f, дифференцируемая в точке x_0, дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $U_\delta(x_0)$ этой точки и вторая производная $f''(x)$ функции f меняет знак при переходе аргумента через x_0 (т.е. либо $f''(x)<0$ при $x_0-\delta<x<x_0$ и $f''(x)>0$ при $x_0<x<x_0+\delta$, либо $f''(x)>0$ при $x_0-\delta<x<x_0$ и $f''(x)<0$ при $x_0<x<x_0+\delta$), то x_0 является точкой перегиба функции f.

Доказательство. Пусть $y=L(x)$ – уравнение касательной

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Применив теорему Лагранжа 66 к разности $f(x)-f(x_0)$, получим

$$\begin{aligned} f(x) - L(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \\ = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \\ = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0), \quad x < \xi < x_0. \end{aligned}$$

Применим теорему Лагранжа ещё раз, но уже к разности $f'(\xi)-f'(x_0)$, имеем

$$\begin{aligned} f(x) - L(x) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0) = \\ = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0), \quad x < \xi < \eta < x_0. \end{aligned}$$

При $x\neq x_0$ получим $(\xi - x_0)(x - x_0)>0$ и, следовательно,

$$\operatorname{sgn}(f(x) - L(x)) = \operatorname{sgn} f''(\eta), \quad x < \xi < \eta < x_0.$$

Точка η лежит между ξ и x_0, т.е. по ту же сторону от x_0, что и точка x. Отсюда следует, что если f'' меняет знак при переходе аргумента через точку x_0, то разность $f(x)-L(x)$ меняет знак, и следовательно, x_0 является точкой перегиба.

Теорема 84 (достаточное условие наличия точек перегиба). Пусть $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, тогда x_0 является точкой перегиба.

Доказательство. По формуле Тейлора в силу условия $f''(x_0)=0$ имеем

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3),\ x \to x_0,$$

и поскольку $L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, то

$$f(x) - L(x) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3),\ x \to x_0.$$

Отсюда следует, что знак разности $f(x)-L(x)$ меняется при изменении знака $x-x_0$. Это и означает, что x_0 является точкой перегиба.

6.7 Асимптоты и примеры особых точек кривых

Асимптота – это линия, к которой приближается график функции при стремлении x или y к положительной или отрицательной бесконечности. Существует три вида асимптот: вертикальная, горизонтальная и наклонная (см. рис. 19), но горизонтальная и наклонная определяются одним образом.

Определение 77. Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x>a$ (соответственно для всех $x<a$). Если существуют такие числа k и ℓ, что

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (kx + \ell)] = 0$$

(соответственно при $x\to-\infty$), то прямая

$$y = kx + \ell$$

называется *наклонной асимптотой графика функции* $f(x)$ при $x\to+\infty$ (соответственно при $x\to-\infty$). При $k=0$ получаем горизонтальную асимптоту $y=\ell$.

Числа k и ℓ находятся по формулам

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \left(k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}\right)$$

и

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] \qquad \left(\ell = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx]\right).$$

Асимптота может быть определена как прямая, расстояние до которой от графика функции стремится к нулю, когда точка $(x, f(x))$ “стремится, оставаясь на графике, в бесконечность” (при $x\to\pm\infty$).

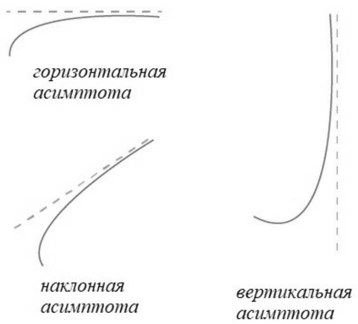


Рис. 19: Асимптоты.

Определение 78. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 (быть может, односторонней) и пусть выполнено хотя бы одно из условий $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, тогда прямая $x=x_0$ называется *вертикальной асимптотой графика функции* f.

Рассмотрим теперь особые точки кривых. Особая точка алгебраической кривой – это точка, в которой кривая ведет себя “нетипично”, например, самопересекается.

Рассмотрим уравнение кривой в неявной форме

$$F(x, y) = 0.$$

Угловой коэффициент касательной к такой кривой определяется по формуле

$$y' = \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

где (x, y) – координаты точки касания. Если $F(x, y)$ – есть целый многочлен от x и y, то кривая $F(x, y)$=0 называется *алгебраической.*

Определение 79. *Особой точкой алгебраической кривой* $F(x, y)$=0 называется точка, координаты которой удовлетворяют уравнениям

$$F'_x(x, y) = 0, \quad F'_y(x, y) = 0.$$

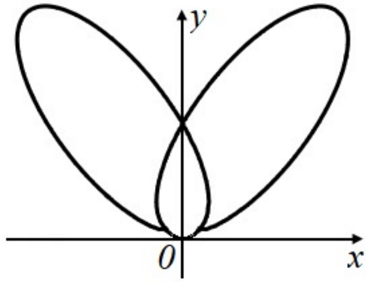
Различают узловые особые точки, точки возврата первого и второго рода, точки соприкосновения, изолированные точки и точки прекращения кривой (см. рис. 20 и 21).

1. *Узловые особые точки.*

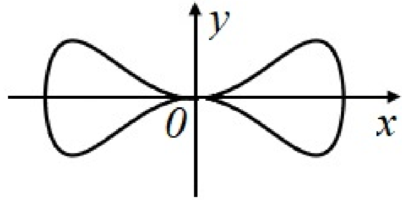
   Особая точка, в которой пересекаются различные ветви кривой так, что каждая ветвь имеет свою особую касательную, называется *узловой точкой кривой* (см. рис. 20a).

2. *Точки возврата.*

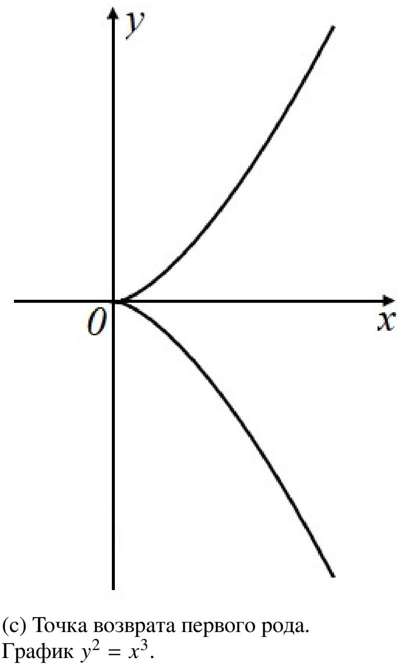
   - *Точка возврата первого рода.* В начале координат встречаются, не продолжаясь дальше, две ветви кривой, причем обе ветви в точке встречи имеют одну и ту же касательную и расположены по разные стороны от этой касательной вблизи особой точки (см. рис. 20c).



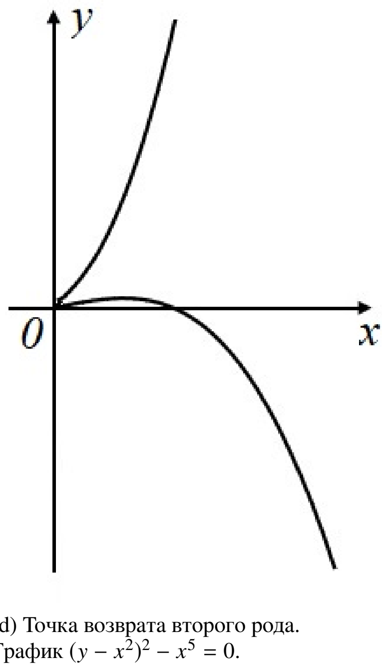
(a) Узловая особая точка.
Кривая “козерог”:
$2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 = 0.$



(b) Точка соприкосновения.
График $y^2 - x^4 + x^6 = 0.$

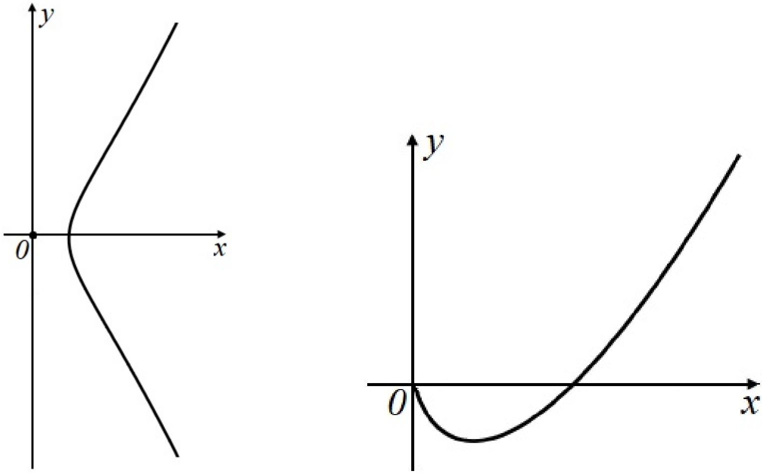


(c) Точка возврата первого рода.
График $y^2 = x^3$.



(d) Точка возврата второго рода.
График $(y - x^2)^2 - x^5 = 0.$

Рис. 20: Особые точки кривых.



(a) Изолированная точка $(0, 0)$.
Кривая $y^2 = x^2(x - 1)$.

(b) Точка прекращения кривой $(0, 0)$.
График $y = x\ln(x)$.

Рис. 21: Особые точки кривых.

- *Точка возврата второго рода.* В начале координат встречаются, не продолжаясь дальше, две ветви кривой, причем обе ветви в точке встречи имеют одну и ту же касательную и расположены по одну сторону от этой касательной вблизи особой точки (см. рис. 20d).

3. *Точки соприкосновения*

   В начале координат две ветви взаимно касаются, такая особая точка называется *точкой соприкосновения* (см. рис. 20b).

4. *Изолированные точки и точки прекращения кривой*

   Точка, удовлетворяющая уравнению кривой, но такая, что вблизи неё нет других точек кривой, называется *изолированной точкой* (см. рис. 21a). Особая точка кривой, в которой кривая обрывается, называется точкой прекращения кривой (см. рис. 21b).

6.8 Порядок построения графика функции

1. Построение графика явно заданной функции.

1. Найти область определения функции и исследовать поведение функции в граничных точках области определения.
2. Исследовать функцию на симметрию графика и периодичность.
3. Найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности.
4. Определить точки пересечения графика функции с координатными осями и области постоянства знака функции.
5. Найти асимптоты.
6. Найти точки экстремума и промежутки не убывания и не возрастания функции.
7. Определить точки перегиба и установить промежутки вогнутости вверх (вниз).
8. Построить график функции.

Пример 81. Построим график функции

$$f(x)=\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}.$$

1. Найдём область определения этой функции. Функция существует при всех значениях $x\in\mathbb{R}$, кроме $x=-1$, при котором знаменатель обращается в нуль. Следовательно, область определения функции

$$D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty).$$

2. Исследуем вопрос о симметрии графика, т.е. проверим является ли данная функция чётной, нечётной или функцией общего вида. Для этого выясним, выполняется ли одно из равенств $f(-x)=f(x)$ или $f(-x)=-f(x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x-1)^3}{3(-x+1)^2} = -\frac{(x+1)^3}{3(1-x)^2} \neq \begin{cases} f(x), \\ -f(x). \end{cases}$$

Ни одно из проверяемых равенств не выполняется, так что функция не является ни чётной ни нечётной.

Очевидно, функция не является периодической.

3. Числитель и знаменатель дроби $\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}$ — непрерывные функции, поэтому функция $\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}$ будет непрерывной при всех значениях x, кроме $x=-1$, при котором знаменатель дроби обращается в нуль.

Исследуем поведение функции в граничных точках области определения.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1+0} \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2} = -\infty.$$

Точка $x= -1$ – точка разрыва функции второго рода.

4. Определим токи пересечения графика функции с осями координат. График пересекает ось Oy при $x=0$:

$$f(0) = \frac{(0-1)^3}{3(0+1)^2} = -\frac{1}{3}.$$

Для нахождения точек пересечения графика с осью Ox решим уравнение

$$\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2} = 0.$$

Оно имеет единственное решение $x=1$. Таким образом, точки пересечения с координатными осями: $\left(0,-\frac{1}{3}\right)$ и $(1,0)$.

Найдём области постоянства знака функции, т.е. промежутки, где функция положительна и отрицательна. Поскольку график пересекает ось Ox в точке $(1,0)$, а также поскольку функция может принимать значения разных знаков по разные стороны от точки разрыва, то нужно исследовать, какой знак имеет функция при $x<-1$, $-1<x<1$ и при $x>1$. Очевидно, $\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}>0$ при $x>1$ и $\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}<0$ при $x<1, x\neq-1$. Таким образом,

x	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,1)	1	$(1,+\infty)$
f(x)	–	не сущ.	–	0	+

5. Определим асимптоты.

а) Вертикальные асимптоты найдём, приравняв знаменатель к нулю: $3(x+1)^2=0$; $x=-1$. Следовательно, вертикальная асимптота одна: ее уравнение $x=-1$.

б) Горизонтальные асимптоты определим, вычислив пределы функции $f(x)$ при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}=+\infty,$$

а это означает, что горизонтальных асимптот нет.

в) Наклонные асимптоты:

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^3}{3x(x+1)^2}=\frac{1}{3},$$

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}-\frac{x}{3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^3-x(x+1)^2}{3(x+1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{3(x+1)^2}=-\frac{5}{3}.$$

Аналогично
$$k_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3},$$
$$b_2 = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = -\frac{5}{3}.$$
Это означает, что наклонная асимптота одна:
$$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}.$$

6. Найдём точки экстремума и промежутки не убывания и не возрастания функции. Первая производная имеет вид
$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{3(x+1)^3}.$$

Определим критические точки.

1) Решая уравнение $f'(x)$=0, находим x_1=1, x_2=−5.

2) Значением, при котором $f'(x)$ не существует, является x=−1. Эта точка не входит в область определения функции, поэтому не будет являться экстремальной.

Определим знак производной функции в каждом из интервалов $(-\infty, -5)$, $(-5, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$:

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	не сущ.	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{9}{2}$	$\searrow$	не сущ.	$\nearrow$	0	$\nearrow$

При x=−5 функция имеет максимум и f_{max}=$-\frac{9}{2}$. Поскольку знаки во втором и третьем интервалах различны, то можно было бы предположить, что при x=−1 есть экстремум. Однако такое предположение неверно, так как при x=−1 заданная функция не существует. Таким образом, функция имеет единственный экстремум при x=−5. Координаты точки максимума M=$\left(-5, -\frac{9}{2}\right)$.

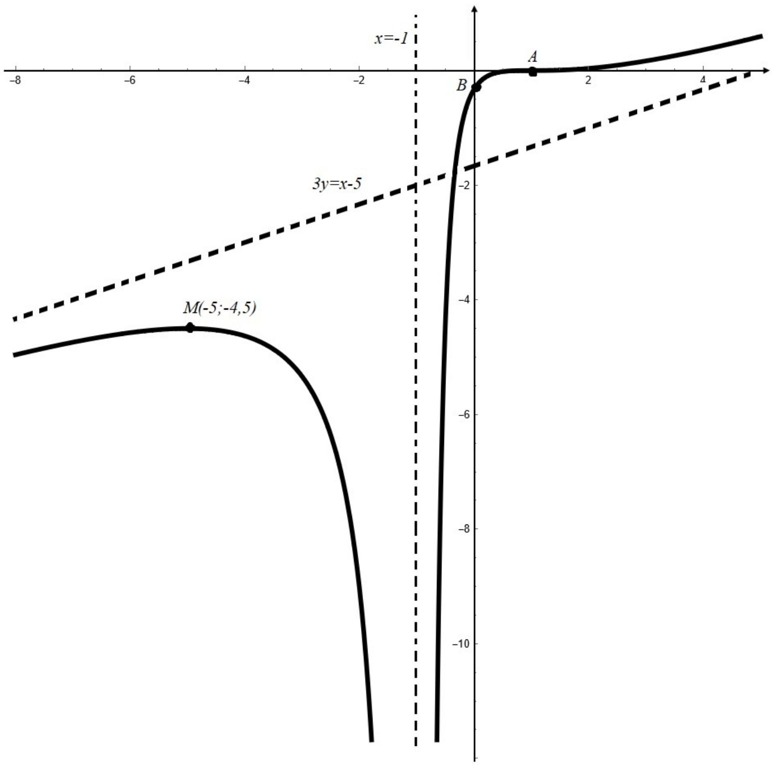


Рис. 22: $f(x) = \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^2}$.

7. Определим интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба.

Найдём

$$f''(x) = \frac{8(x-1)}{(x+1)^4}$$

и определим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.

1) Решая уравнение $f''(x)$=0, найдём x=1.

2) При x=−1 вторая производная функции $f(x)$ не существует.

Исследуем поведение второй производной на интервалах $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	не сущ.	$\frown$	0	$\smile$

Значит, в интервалах $(-\infty,-1)$ и $(-1,1)$ кривая выпукла вверх, а в интервале $(1,+\infty)$ — выпукла вниз. При переходе через точку $x=1$ вторая производная поменяла знак и это означает что при $x=1$ кривая имеет точку перегиба. Координаты точки перегиба $A=(1,0)$.

8. Используя сведения, полученные в пунктах 1–7, построим график функции (см. рис. 22).

2. Построение графика функции, заданной параметрически.

При построении графика функции, заданной параметрически $x=x(t)$, $y=y(t)$, не получается следовать тому же плану, что при построении графика явно заданной функции. Рассмотрим пример построения графика функции $x=x(t)$, $y=y(t)$, где используется только передвижение между особыми точками и асимптота.

Пример 82. Рассмотрим кривую, заданную уравнением

$$x^3+y^3-3axy=0, \quad a>0, \tag{81}$$

называемую “листом Декарта”. Введём переменный параметр t, полагая

$$y=tx.$$

Подставив $y=tx$ в уравнение (81) и сократив на x^2, получим

$$x=\frac{2at}{1+t^3},$$

а уравнение $y = tx$ даст нам тогда

$$y = \frac{2at^2}{1+t^3}.$$

Эти уравнения дают параметрическую форму представления листа Декарта. Определим производные от x и y по t:

$$x_t = 3a\frac{(1+t^3) - 3t^2 t}{(1+t^3)^2} = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1+t^3)^2},$$

$$y_t = 3a\frac{2t(1+t^3) - 3t^2 t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3at\left(2 - t^3\right)}{(1+t^3)^2}.$$

Для исследования изменения x и y разобьём весь промежуток $(-\infty, +\infty)$ изменения t на такие отдельные части, внутри которых производные x_t и y_t сохраняют неизменный знак и не обращаются в бесконечность. Для этого отметим значения:

$$t = -1,\ 0,\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ \sqrt[3]{2},$$

при которых эти производные обращаются в нуль или бесконечность. Определив знаки x_t и y_t внутри этих промежутков и вычислив значения x и y на концах промежутков, мы получим, таким образом, приведённую ниже таблицу.

Промежуток t	x_t	y_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	−	не убывает от 0 до $+\infty$	не возрастает от 0 до $-\infty$
$(-1, 0)$	+	−	не убывает от $-\infty$ до 0	не возрастает от $+\infty$ до 0
$\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	+	+	не убывает от 0 до $\sqrt[3]{4}a$	не убывает от 0 до $\sqrt[3]{2}a$
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}\right)$	−	+	не возрастает от $\sqrt[3]{4}a$ до $\sqrt[3]{2}a$	не убывает от $\sqrt[3]{2}a$ до $\sqrt[3]{4}a$
$\left(\sqrt[3]{2}, +\infty\right)$	−	−	не возрастает от $\sqrt[3]{2}a$ до 0	не возрастает от $\sqrt[3]{4}a$ до 0

Для вычисления углового коэффициента касательной воспользуемся формулой

$$y_x = \frac{y_t}{x_t} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

Получаем

$$y_x = 0, \ \ t = 0,$$

$$y_x = \lim_{t\to\infty} \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)} = \infty,$$

т.е. две ветви кривой, взаимно пересекающиеся в начале координат, касаются – одна оси Ox, другая оси Oy. Таким образом, точка $(0,0)$ является узловой.

При стремлении t к -1 x и y стремятся к бесконечности, и кривая имеет бесконечную ветвь. Определим асимптоту. Угловой коэффициент асимптоты равен

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1} \frac{2at^2(1+t^3)}{2at(1+t^3)} = -1,$$

$$b = \lim_{t\to-1}(y+x) = \lim_{t\to-1} \frac{2at^2+3at}{1+t^3} = \lim_{t\to-1} \frac{6at+3a}{3t^2} = -a.$$

т.е. уравнение асимптоты будет

$$x + y = -a.$$

В соответствии с этой схемой мы получим кривую, изображенную на рис. 23.

При построении кривых, заданных параметрически: $x{=}x(t)$, $y{=}y(t)$, можно можно использовать следующие пункты.

1. Найти области определения $D_x(t)$ и $D_y(t)$ функций $x{=}x(t)$ и $y{=}y(t)$. Найти область определения функции, заданной параметрически $D(t){=}D_x(t)\cap D_y(t)$.

2. Решив уравнения $x(t){=}0$, $y(t){=}0$, найти точки пересечения с осями координат.

3. Вычислить производные x'_t и y'_t. Определить производную y'_x. Найти критические точки.

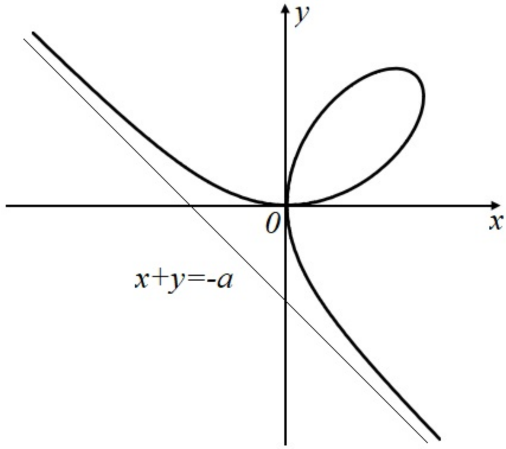


Рис. 23: Лист Декарта: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$.

4. На каждом из интервалов, границами которых служат критические точки, определить знак производной y'_x и промежутки не убывания и не возрастания функции $y(x)$, заданной параметрически.

5. Определить экстремумы функции, а также точки, касательная к которым вертикальна (производная y'_x в этих точках обращается в бесконечность).

6. Определить особые точки графика, в которых x'_t=0 и (или) y'_t=0.

7. Найти пределы $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=x_0$ и $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=y_0$ в точках t_0, лежащих на границах области определения.

   - Если оба предела конечны, найти касательную к кривой в точке (x_0, y_0).
   - Если один из пределов конечен, а второй бесконечен, то кривая имеет горизонтальную $y=y_0$ или вертикальную $x=x_0$ асимптоту.

- Если оба предела бесконечны, то найти наклонную асимптоту $y = kx + \ell$, вычислив пределы $k = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$, $\ell = \lim\limits_{t\to t_0} [y(t) - kx(t)]$. Если один из этих пределов не существует, то асимптоты нет.

Если двустороннего предела в точке t_0 не существует, то может быть рассмотрен один из односторонних пределов в этой точке.

8. Вычислить производную y''_{xx} и определить точки перегиба функции и направление выпуклости на каждом из интервалов, ограниченных точками перегиба или точками, в которых вторая производная не существует.

9. Выяснить, существуют ли точки самопересечения графика функции, решив систему

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2), \ \ t_1 \neq t_2, \\ y(t_1) = y(t_2), \ \ t_1 \neq t_2. \end{cases}$$

10. Проверить график функции на симметричность.

    - График функции симметричен относительно точки (a, b), если при любом t можно найти такое t_1, что

    $$\begin{cases} x(t) + x(t_1) = 2a, \\ y(t) + y(t_1) = 2b. \end{cases}$$

    - График функции симметричен относительно прямой $ax + by + c = 0$, если при любом t можно найти такое t_1, что

    $$\begin{cases} a[x(t) + x(t_1)] + b[y(t) + y(t_1)] + 2c = 0, \\ b[x(t) - x(t_1)] = a[y(t) - y(t_1)]. \end{cases}$$

В частности, график функции симметричен относительно прямой $y{=}x$, если при любых t имеет решение система

$$\begin{cases} x(t) = y(t_1), \\ y(t) = x(t_1). \end{cases}$$

6.9 Графики в полярных координатах

Положение точки M в полярных координатах на плоскости определяется:

1) её расстоянием r от некоторой данной точки O, называемой *полюсом*;

2) углом φ, который образует отрезок OM с заданным направлением прямой (L), которая называется *полярной осью*.

При этом r называют *радиусом-вектором* и φ – *полярным углом*. Если принять полярную ось за $0x$, а полюс — за начало координат, то имеем, очевидно (см. рис. 24):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

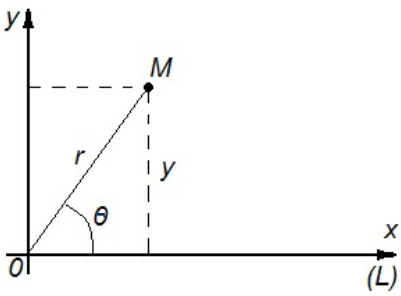


Рис. 24: Точка M в полярных координатах.

Данному положению точки M соответствует одно определённое положительное значение r и бесчисленное множество значений φ, которые отличаются слагаемым, кратным 2π. Если M совпадает с O, то r=0 и φ неопределенно.

Всякая функциональная зависимость вида r=$r(\varphi)$ (явная) или $F(r,\varphi)$=0 (неявная) имеет в полярной системе координат свой график.

Пару полярных координат r и φ можно перевести в декартовы координаты x и y путём применения тригонометрических функций синуса и косинуса (при этом предполагается, что нулевой луч полярной системы координат совпадает с осью x декартовой системы):

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

в то время как две декартовы координаты x и y могут быть переведены в полярную координату r по теореме Пифагора:

$$r^2 = y^2 + x^2.$$

Для определения угловой координаты φ следует принять во внимание два следующих соображения.

Для r≡0 значение φ может быть произвольным действительным числом. Для r≠0, чтобы получить уникальное значение φ, следует ограничиться интервалом в 2π . Обычно выбирают интервал $[0,\ 2\pi)$ или $(-\pi,\ \pi]$.

Для вычисления φ в интервале $[0,\ 2\pi)$, можно воспользоваться такими уравнениями:

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}), & x > 0, y \geq 0; \\ \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) + 2\pi, & x > 0, y < 0; \\ \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) + \pi, & x < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0, y < 0; \\ - & x = 0, y = 0. \end{cases}$$

Для того чтобы построить график $r=r(\varphi)$ в полярных координатах по точкам, нужно заполнить таблицу, в первой строке которой записать значения угла φ из интересующего нас промежутка, а во второй — соответствующие значения функции $r(\varphi)$. Затем, отметить и соединить эти точки плавной линией.

Построим графики функций, которые часто бывают заданы в полярных координатах.

Спирали. Пусть $a>0$, $b>0$. Рассмотрим три вида спиралей:

1. спираль Архимеда: $r=a\varphi$,
2. гиперболическая спираль: $r\varphi=a$,
3. логарифмическая спираль: $r=be^{a\varphi}$.

Спираль Архимеда $r=a\varphi$. График функции $r=2\varphi$ имеет вид, изображенный на рис. 25 а). Заполнять таблицу значений φ и $r(\varphi)$ нет необходимости в силу простой функциональной зависимости между φ и $r(\varphi)$.

Гиперболическая спираль $r\varphi=a$. Особенностью этого графика является то, что расстояние между любой точкой этой кривой и полярной осью не превосходит a (т.е. кривая имеет асимптоту, параллельную полярной оси и проведённую на расстоянии a от неё).

Положив $\varphi > 0$ и $a = 1$, заполним таблицу для φ и $r = \frac{1}{\varphi}$.

φ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\frac{1}{\varphi}$	$\frac{6}{\pi}\approx 2$	$\frac{4}{\pi}\approx 1,3$	$\frac{3}{\pi}\approx 1$	$\frac{2}{\pi}\approx 0,7$	$\frac{3}{2\pi}\approx 0,5$	$\frac{6}{5\pi}\approx 0,4$	$\frac{1}{\pi}\approx 0,3$

Замечаем, что r будет увеличиваться при уменьшении φ. При этом график $r=\frac{1}{\varphi}$ не имеет общих точек с прямой, параллельной полярной оси и проходящей на расстоянии 1 от неё.

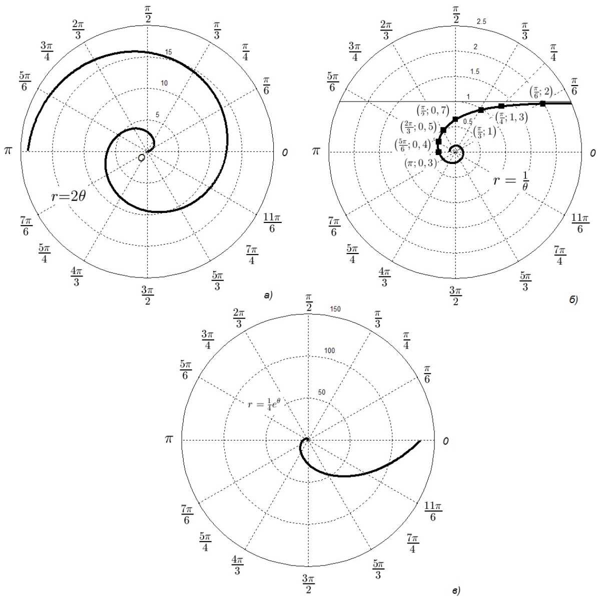


Рис. 25: Графики функций $r = 2\varphi$, $r\varphi = 1$ и $r = \frac{1}{4}e^{\varphi}$.

Далее видим, что r не обращается в нуль ни при каких конечных значениях φ, а только будет уменьшаться с увеличением φ. Поэтому кривая будет приближаться к полюсу O, закручиваясь около него, но никогда не пройдёт через O в противоположность спирали Архимеда. Отметив и соединив плавной линией точки таблицы, а также учитывая поведение функции $r{=}\frac{1}{\varphi}$ при увеличении и уменьшении угла φ получим график функции $r{=}\frac{1}{\varphi}$ (см. рис. 25 б)).

Логарифмическая спираль $r{=}be^{a\varphi}$. При $\varphi{=}0$ имеем $r{=}b$. Если $\varphi{>}0$, то при увеличении φ увеличивается и r. Если $\varphi{<}0$, то при уменьшении φ радиус-вектор r приближается к нулю.

Логарифмическая спираль $r{=}\frac{1}{4}e^{\varphi}$ изображена на рис. 25 в).

Розы. *Розами* или *кривыми Гвидо Гранди* называются кривые, полярное уравнение которых имеет вид $r{=}a\sin(k\varphi)$ или $r{=}a\cos(k\varphi)$. Будем рассматривать случай, когда $a{>}0$, k — це-

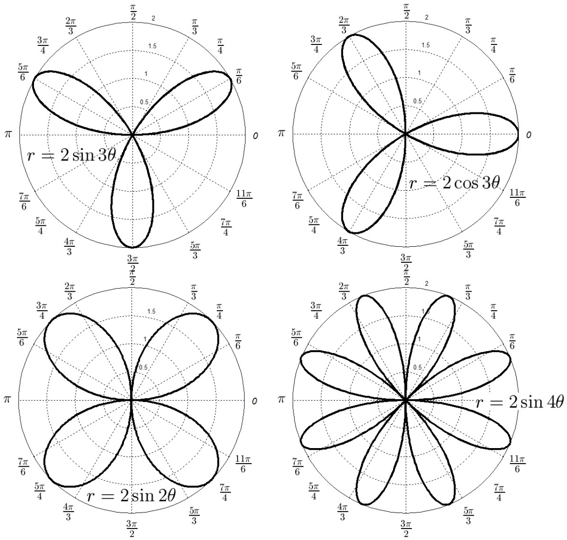


Рис. 26: Графики функций $r = 2\sin 3\varphi$, $r = 2\cos 3\varphi$, $r = 2\sin 2\varphi$ и $r = 2\sin 4\varphi$.

лое положительное число. Заметим, что поскольку правая часть уравнения розы не может превышать a, то вся кривая находится внутри круга радиуса a. Так как $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$ являются периодическими функциями, то роза состоит из лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен a. При этом, если k — нечётное число, то число лепестков равно k, а если k — чётное, то роза имеет $2k$ лепестков. Графики функций $r{=}2\sin(3\varphi)$, $r{=}2\cos(3\varphi)$, $r{=}2\sin(2\varphi)$ и $r{=}2\sin(4\varphi)$ изображены на рис. 26.

Улитка Паскаля и кардиоида. Полярное уравнение *улитки* имеет вид $r{=}2a\cos\varphi{+}h$. Если $h{>}2a$, то это уравнение даёт только положительные значения r (см. рис. 27 а)). Если $h{<}2a$, то r будет принимать и отрицательные значения (см. рис. 27 б)). Наконец, при $h{=}2a$ уравнение улитки будет $r{=}2a(1 + \cos\varphi)$ и в этом случае улитка представляет собой *кардиоиду* (см. рис. 27

в)).

В качестве примера приведём графики функций r=4 cos φ+6, r=6 cos φ+3 и r=6(cos φ+1) на рис. 27.

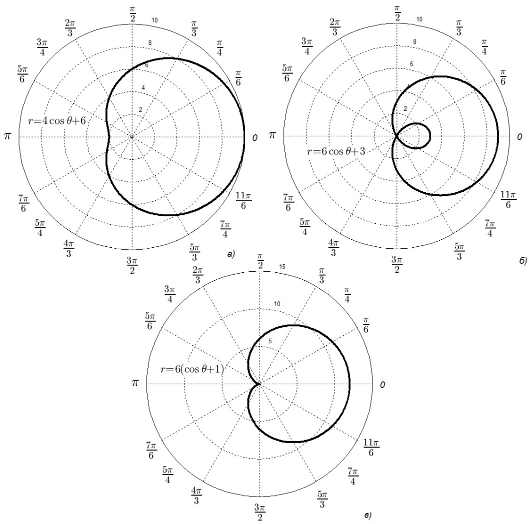


Рис. 27: Графики функций $r = 4\cos\varphi + 6$, $r = 6\cos\varphi + 3$ и $r = 6(\cos\varphi + 1)$.

7 Раздел 7. Интегральное исчисление функции одной переменной

7.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Интеграл – одно из центральных понятий математики и математического анализа. Его развитие было мотивировано проблемой нахождения функции, производная которой известна. Таким образом, для данной функции f мы будем искать функцию F такую, что F'=f, т.е. мы ищем такую функцию F, дифференцирование которой дает f. Это, например, позволит зная мгновенную скорость частицы получить положение этой частицы, а зная мгновенное ускорение частицы, позволит определить её мгновенную скорость и т.п.

Определение 80. Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией для функции* $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если $F(x)$ дифференцируема и во всех точках этого отрезка выполнено равенство $F'(x)=f(x)$.

Теорема 85. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то разность между ними равна постоянному числу

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \quad C = \text{const}.$$

Доказательство. По определению первообразной имеем: $F_1'(x)=f(x)$, $F_2'(x)=f(x)$ для всех $x\in[a, b]$. Обозначим $F_1(x)-F_2(x)=g(x)$, тогда

$$g'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Следовательно, $g'(x)=0$ для всех $x\in[a, b]$, а это означает, что $g(x)=\text{const}$ на отрезке $[a, b]$. Действительно, применим теорему Лагранжа 66 к функции $g(x)$, которая является непрерывной и дифференцируемой на отрезке $[a, b]$. Какова бы ни была точка x на отрезке $[a, b]$, мы имеем в силу теоремы Лагранжа:

$$g(x) - g(a) = (x - a)g'(\xi), \quad a < \xi < x.$$

Так как $g'(\xi)=0$, то $g(x)-g(a)=0$ или $g(x)=g(a)$. Таким образом, функция $g(x)$ в любой точке отрезка $[a, b]$ сохраняет значение $g(a)$, а это означает, что функция $g(x)$ является постоянной на отрезке $[a, b]$. Обозначив постоянную $g(a)$ через C, из равенства $F_1(x)-F_2(x)=g(x)=g(a)$ получим $F_1(x)-F_2(x)=C$. Теорема доказана.

Из теоремы 85 следует, что если для данной функции $f(x)$ найдена какая-нибудь первообразная $F(x)$, то любая другая первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x)+C$, C = const.

Определение 81. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x)+C$ называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x),$$

здесь $f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция, $\int$ – знак интеграла, dx – дифференциал.

Символ $\int$, используемый для обозначения неопределённого интеграла, возник исторически в результате видоизменения буквы S, первой буквы слова “sum” (сумма).

Замечание 18. Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для этой функции существует первообразная.

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$.

Дифференцирование есть действие *прямое* и *однозначное*, так как непрерывная функция $F(x)$ не может иметь двух различных производных $f(x)$. Интегрирование же есть действие *обратное* и *многозначное*, дающее для заданной производной $f(x)$ бесчисленное множество результатов $F(x)+C$.

Отметим равенства, следующие из определения неопределённого интеграла.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Свойства линейности неопределённого интеграла.

1. Неопределённый интеграл от суммы (разности) двух или нескольких функций равен сумме (разности) их интегралов:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)\, dx = a \int f(x)\, dx, \quad a = \text{const}.$$

При выполнении вычислений, связанных с интегрированием, обычно обращаются к таблице интегралов, состоящей из формул, полученных из таблицы производных и некоторых других, часто используемых.

Таблица интегралов.

1. $\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
4. $\int e^x\, dx = e^x + C$
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,\ |x| < a$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C,\ a \neq 0$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C,\ a \neq 0$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C,\ a \neq 0$

Приведём примеры интегрирования некоторых простейших функций, для интегрирования которых достаточно знать только таблицу интегралов и свойства линейности.

Пример 83. 1. Следующие интегралы находятся по первой формуле из таблицы интегралов.

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C.$$

2. Используя линейность интеграла и первую формулу из таблицы интегралов, получим

$$\int (6x^2 - 3x + 5)\,dx = \int 6x^2\,dx - \int 3x\,dx + \int 5\,dx =$$

$$= 6\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 5\int\,dx = 6\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 5x + C =$$

$$= 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

3. Умножим и поделим на 5, а затем применим пятую формулу из таблицы интегралов:

$$\int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x\,d(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

4. Для нахождения интеграла

$$\int \sin 5x \cos 3x\,dx$$

применим формулу

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)],$$

получим

$$\int \sin 5x \cos 3x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int [\sin 8x + \sin 2x]\,dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

В аналогичных случаях применяются также формулы

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)].$$

5. Применив формулу понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

будем иметь

$$\int \sin^2 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

В аналогичных случаях применяется также формула

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

7.2 Интегрирование методом замены переменной

Для вычисления интеграла мы должны, если это возможно, теми или другими способами привести его к табличным интегралам и таким образом найти искомый результат. Рассмотрим метод подстановки. В основе этого метода лежит формула замены переменной. Метод формулируется в следующем утверждении.

Теорема 86. Пусть функция $f(t)$ имеет первообразную $F(t)$ на интервале J, функция $\varphi(x)$ дифференцируема на интервале I и $\varphi(x)\in J$ для любого $x\in I$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ имеет первообразную на интервале I и выполняется равенство

$$\int f(t)\,dt = \{t=\varphi(x)\} = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx. \qquad (82)$$

Формула 82 называется *формулой замены переменной*.

Доказательство. Продифференцируем функцию $\int f(t)\,dt$ по x на интервале I, используя формулу производной сложной функции

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dg}{dt}\varphi'(x),$$

получим:

$$\frac{d}{dx}\int f(t)\,dt = \frac{d}{dt}\left[\int f(t)\,dt\right]\varphi'(x) = f(t)\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

или

$$\frac{d}{dx}\int f(t)\,dt = f(\varphi(x))\varphi'(x). \tag{83}$$

Проинтегрировав теперь по x на интервале I равенство (83), получим

$$\int\left(\frac{d}{dx}\int f(t)\,dt\right)\,dx = \int f(t)\,dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

Таким образом, равенство (82) доказано.

Функцию $t=\varphi(x)$ в формуле (82) следует подбирать так, чтобы можно было вычислить интеграл $\int f(t)\,dt$.

Отметим ряд преобразований дифференциала, следующих из (82), полезных на практике:

1. $dx = d(x+b)$, где $b = const$;
2. $dx = \frac{1}{a}d(ax)$, $a = const$, $a \neq 0$;
3. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, $a = const$, $a \neq 0$, $b = const$;
4. $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$;
5. $\sin x dx = -d\cos x$;
6. $\cos x dx = d(\sin x)$.

Вообще,

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)dx.$$

Пример 84. 1. В интеграле $\int \sin 5x\ dx$ произведём замену $t{=}5x$, получим $dt{=}d(5x){=}5dx$, $dx{=}\frac{dt}{5}{=}\frac{1}{5}dt$. Тогда можем записать

$$\int \sin 5x\, dx = \frac{1}{5}\int \sin t\, d(t) = -\frac{1}{5}\cos t + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

2. В интеграле $\int \sqrt{\sin x}\cos x\, dx$ сделаем замену $t{=}\sin x$, тогда $dt{=}d(\sin x){=}\cos x dx$ и

$$\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}{+}C = \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}{+}C.$$

3. Рассмотрим интеграл $\int \frac{xdx}{x^2+1}$. Перейдём к переменной t по формуле $x^2{+}1{=}t$, тогда $2xdx{=}dt$, $xdx{=}\frac{1}{2}dt$ и

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

4. Интеграл $\int \frac{dx}{3+2x^2}$ можно преобразовать в табличному:

$$\int \frac{dx}{3+2x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}x)^2}.$$

Тогда, вводя замену $\sqrt{2}x{=}t$, $\sqrt{2}dx{=}dt$, получим

$$\int \frac{dx}{3+2x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{(\sqrt{3})^2 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}} + C.$$

5. Рассмотрим интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$. Произведём в нём замену переменной $e^x{=}t$, $x{=}\ln t$, получим $dx{=}\frac{1}{t}dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{t-1}}.$$

Снова сделаем замену переменной $\sqrt{t-1}=y$, $t-1=y^2$, $t=y^2+1$, $dt=2ydy$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = \int \frac{2ydy}{(y^2+1)y} =$$

$$= 2\int \frac{dy}{1+y^2} = 2\operatorname{arctg}(y) + C = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{e^x-1}) + C.$$

В простых случаях можно не вводить новую переменную, а использовать технику введения функции под знак дифференциала. Если благодаря введению под знак дифференциала мы можем преобразовать подынтегральное выражение и получить более простую функцию, которую можно интегрировать с помощью таблицы интегралов, то процесс введения новой переменной можно опустить.

Пример 85. Рассмотрим интеграл $\int \operatorname{tg} x dx$. Вводя под дифференциал $\sin x$ по формуле $\sin x\, dx{=}{-}d\cos x$, получим

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Рассмотрим теперь, как методом замены переменных можно находить интегралы, содержащие квадратный трёхчлен.

Пример 86. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\, dx,$$

который содержит квадратный трёхчлен $x^2{+}x{+}1$. Начнём с того, что выделим полный квадрат в квадратном трёхчлене:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Теперь произведём замену $x+\frac{1}{2}=t$, $x+\frac{1}{2}=t$, $dx=dt$, получим

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$= \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 87. В квадратном трёхчлене интеграла

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}$$

выделим полный квадрат:

$$-(x^2+2x-3) = -(x^2+2x+1-1-3) = -((x+1)^2-4) = 4-(x+1)^2.$$

Будем иметь

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{-2(x^2+2x-3)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{-(x^2+2x-3)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}}.$$

Произведём замену $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$, получим

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(t-1)dt}{\sqrt{4-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{t\,dt}{\sqrt{4-t^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(t^2)}{\sqrt{4-t^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{t}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(4-t^2)}{\sqrt{4-t^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{t}{2} =$$

$$= -\frac{2}{2\sqrt{2}}\sqrt{4-t^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{t}{2} + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-(x+1)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

7.3 Интегрирование по частям

До сих пор мы рассматривали интегралы от функций, соответствующие табличным формулам интегрирования или приводимым к таковым. Кроме того, мы использовали тот факт, что интеграл от суммы есть сумма интегралов и константу можно выносить за знак интеграла. Если же нам нужно найти интеграл от произведения или частного функций, то нам нужен новый метод интегрирования который называется методом интегрирования по частям.

Теорема 87. Пусть u и v – функции, дифференцируемые на интервале I. Тогда на этом интервале справедливо равенство

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{84}$$

Формула 84 называется *формулой интегрирования по частям.*

Доказательство. Возьмём формулу Лейбница

$$d(uv) = udv + vdu \tag{85}$$

и проинтегрируем равенство 85:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu.$$

В левой части знаки интеграла и дифференциала, поставленные рядом, взаимно уничтожают друг друга и дают произведение uv, к которому нет смысла присоединять произвольную константу, потому что в правой части стоят два неопределенных интеграла, включающих в себя константы. Следовательно, предыдущее равенство перепишется в виде:

$$uv = \int udv + \int vdu.$$

Перенос произведения uv вправо, а интеграла $\int udv$ влево заканчивает доказательство формулы интегрирования по частям 84.

Успех интегрирования по частям зависит от удачного выбора функций u и v. Чтобы иметь возможность записать правую часть 84, нам нужно знать, как интегрировать другой (хотя бы один) из сомножителей u или v. Кроме того, интеграл в правой части 84, обычно, должен быть проще с точки зрения дальнейшего интегрирования.

Замечание 19. При определении функции v по дифференциалу dv мы могли бы брать любую постоянную, так как в конечный результат она не входит (это легко проверить, взяв вместо v выражение $v+C$). Поэтому удобно считать эту постоянную равной нулю.

Среди наиболее важных применений метода интегрирования по частям является интегрирование:

- произведений,
- выражений, содержащих логарифмы,
- выражений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Например, для интегралов следующего вида: $\int x^n e^x\,dx$, $\int x^n \sin x\,dx$, $\int x^n \cos x\,dx$, $\int x^n \operatorname{sh} x\,dx$, $\int x^n \operatorname{ch} x\,dx$ за $u(x)$ берут алгебраическую часть выражения – x^n.

В интегралах вида $\int x^n \arcsin x\,dx$, $\int x^n \arccos x\,dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx$, $\int x^n \operatorname{arcctg} x\,dx$, $\int x^n \log_a x\,dx$ за $u(x)$ берут не алгебраическую часть, а, например, $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x^n dx$.

Пример 88. Найдём интеграл $\int x \cos x\,dx$ по формуле 84. Обозначим

$$u = x, \qquad dv = \cos x\,dx,$$

тогда получим

$$du = dx, \quad v = \sin x.$$

Применяя формулу 84, будем иметь

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Замечание 20. При вычислении интеграла в примере 88 мы обозначили за u функцию x, поскольку при дифференцировании она упрощается (показатель степени понижается на единицу). В то же время при дифференцировании косинуса (как и синуса), как и при его интегрировании, он не упрощается и не усложняется.

Например, при $k \in \mathbb{N}$ интегралы вида

$$\int x^k \sin(ax)\, dx,$$

$$\int x^k \cos(ax)\, dx,$$

$$\int x^k e^{ax}\, dx$$

вычисляются интегрированием по частям, причём за u принимается x^k.

Пример 89. Рассмотрим интеграл $\int \operatorname{arctg} x\, dx$. Подынтегральное выражение содержит только одну функцию – $\operatorname{arctg} x$, которую и следует взять за u:

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = dx,$$

тогда

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x$$

и, применив формулу 84, получим

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 90. Интеграл от многочлена, умноженного на логарифмическую функцию, также можно найти, применяя формулу 84. Например, в $\int x^2 \ln x\, dx$ возьмём

$$u = \ln x, \quad dv = x^2 dx,$$

получим

$$du = \frac{1}{x}dx, \quad v = \frac{x^3}{3}$$

и, применяя 84, будем иметь

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

При вычислении интегралов в примерах 89 и 90 выгодно было продифференцировать обратные функции $\operatorname{arctg} x$ и $\ln x$, так как при этом получаются рациональные функции, которые проще интегрировать.

В следующих примерах мы продемонстрируем ещё один способ, который обычно используется вместе с интегрированием по частям. Идея состоит в том, что с помощью интегрирования по частям (возможно, несколько раз) и некоторых преобразований мы получаем выражение, которое снова содержит исходный неизвестный интеграл, таким образом, мы имеем уравнение

$$\int f(x)dx = g(x) + c\int f(x)dx, \quad c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0, \quad c \neq 1,$$

из которого можно найти неизвестный интеграл $\int f(x)dx$. Такие интегралы называются *возвратными*.

Пример 91. Рассмотрим интеграл $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Пусть в 84

$$u = \sqrt{1-x^2}, \quad dv = dx,$$

$$du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad v = x,$$

тогда

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin x.$$

Отсюда получим

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C.$$

Пример 92. Найдём интеграл $\int e^{ax}\sin(bx)dx$. Положим

$$u = e^{ax}, \quad dv = \sin(bx)dx,$$

тогда

$$du = ae^{ax}dx, \quad v = -\frac{1}{b}\cos(bx)$$

и, применяя 84, будем иметь

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx.$$

Применим формулу интегрирования по частям 84 ещё раз. Положим

$$u = e^{ax}, \quad dv = \cos(bx)dx,$$

тогда

$$du = ae^{ax}dx, \quad v = \frac{1}{b}\sin(bx)$$

и

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) +$$

$$+\frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx\right) = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) +$$

$$+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx.$$

Отсюда

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin(bx)$$

и

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)).$$

Пример 93. Рассмотрим интеграл $\int \sin(\ln x)\,dx$. Пусть

$$u = \sin(\ln x), \quad dv = dx,$$

тогда

$$du = \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx, \quad v = x$$

и, применяя 84, будем иметь

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) -$$

$$- \int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Применим формулу интегрирования по частям 84 ещё раз. Обозначим

$$u = \cos(\ln x), \quad dv = dx,$$

получим

$$du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)\,dx, \quad v = x$$

и

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx.$$

Получаем уравнение

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx.$$

Откуда, выражая интеграл $\int \sin(\ln x)dx$, будем иметь

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$$

7.4 Интегрирование рациональных функций

Мы рассмотрели некоторые элементарные приёмы вычисления неопределённых интегралов и заметили, что операция интегрирования гораздо сложнее операции дифференцирования. Более того, интеграл от элементарной функции далеко не всегда представляет собой элементарную функцию. Однако, интеграл от многочлена является многочленом, поэтому многочлены представляют собой класс элементарных функций, которые мы можем проинтегрировать, получив снова элементарную функцию. Оказывается, что более общим классом функций, дающих в результате интегрирования элементарные функции, является класс рациональных функций. Когда мы работаем с многочленами, важную роль играет разложение на более простые (линейные или квадратичные) множители. В то время как многочлены разлагаются на произведение множителей, рациональные функции будут разлагаться на сумму простых рациональных функций, также называемых элементарными дробями, которые можно проинтегрировать.

Рациональная функция (*рациональная дробь*) – это частное двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $Q(x)$ – ненулевой многочлен.

Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$, и *неправильной*, если степень многочлена $P(x)$ не меньше степени многочлена $Q(x)$.

Любую неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, у которой степень числителя больше или равна степени знаменателя, можно выразить с помощью алгоритма деления в виде суммы полинома и правильной рациональной дроби, у которой степень числителя меньше степени знаменателя:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

где $R(x)$, $P_1(x)$ и $Q_1(x)$ – некоторые многочлены, а $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Определение 82. Правильные рациональные дроби вида $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ и $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $a, p, q, A, M, N \in \mathbb{R}$, $p^2-4q<0$ называются *простейшими* или *элементарными рациональными дробями*.

Отметим без доказательства, что для всякого многочлена степени n с действительными коэффициентами справедливо разложение на множители вида

$$P_n(x) = A_n(x-a_1)^{\alpha_1} \ldots (x-a_r)^{\alpha_r} \times$$
$$\times (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \qquad (86)$$

где

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + 2\sum_{i=1}^{s} \beta_i = n, \;\; \frac{p_j^2}{4} - q_j < 0, \;\; j = 1, 2, \ldots, s,$$

и все коэффициенты A_n, a_1, …, a_r, p_1, q_1, …, p_s, q_s действительны. При этом a_1, …, a_r – все действительные корни многочлена $P_n(x)$. Разложение многочлена на множители вида (86) единственно, оно однозначно определяется корнями этого многочлена и их кратностями.

Теорема 88. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь. Если знаменатель дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ представим в виде

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \ldots (x-a_r)^{\alpha_r} \times$$
$$\times (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s},$$

где a_i, $i{=}1,2,\ldots,r$ – попарно различные действительные корни многочлена $Q(x)$, а квадратные трёхчлены $x^2{+}p_jx{+}q_j$, $j{=}1,2,\ldots,s$ не имеют действительных корней, то дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1-1}}{x-a_1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_0}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \frac{B_1}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}} + \frac{B_2}{(x-a_r)^{\alpha_r-2}} + \ldots + \frac{B_{\alpha_r-1}}{x-a_r} + \ldots$$

$$\ldots+\frac{M_0x+N_0}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}}+\ldots+\frac{M_{\beta_1-1}x+N_{\beta_1-1}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{L_0x+H_0}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}}+\frac{L_1x+H_1}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}}+\ldots+\frac{L_{\beta_s-1}x+H_{\beta_s-1}}{x^2+p_sx+q_s}. \tag{87}$$

Коэффициенты A_0, A_1, ..., A_{α_1-1}, ..., B_0, B_1, ..., B_{α_r-1}, M_0, $M_1, \ldots, M_{\beta_1-1}, N_0, N_1, \ldots, N_{\beta_1-1}, \ldots, L_0, L_1, \ldots, L_{\beta_s-1}, H_0, H_1, \ldots,$ H_{β_s-1} – действительные числа (их можно определить с помощью *метода неопределённых коэффициентов*).

Метод неопределённых коэффициентов.

Для нахождения неизвестных коэффициентов в теореме 88 необходимо привести дроби равенства (87) к общему знаменателю и получить тождественные многочлены в числителях справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

Пример 94. Разложим дробь $\dfrac{x}{x^2-1}$ на сумму простейших дробей.

Функция $\dfrac{x}{x^2-1}$ является правильной рациональной дробью, поэтому деления не требуется. Знаменатель можно представить в виде $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Таким образом, знаменатель имеет два простых корня: 1 и -1, которым соответствуют две дроби: $\frac{A}{x-1}$ и $\frac{B}{x+1}$. Разложение имеет вид

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

После приведения к общему знаменатель получим

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1}.$$

Две дроби равны и их знаменатели одинаковы, следовательно равны и числители:

$$x = (A+B)x + A - B.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A - B = 0. \end{cases}$$

Откуда имеем $A{=}B$, $2A{=}1$, следовательно, $A{=}B{=}\frac{1}{2}$ и

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}.$$

Далее будем считать, что интегрирование ведётся на интервале, где все функции и интегралы от них имеют смысл. Поскольку каждая рациональная функция может быть разложена на многочлен и сумму элементарных дробей, то осталось только рассмотреть, как проинтегрировать элементарные рациональные дроби.

Сначала рассмотрим вычисление интегралов от дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

Пусть $n\in\mathbb{N}$. Если $n=1$, то

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C.$$

Если $n\neq 1$, то

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Рассмотрим теперь интегралы от дробей

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)},\quad \frac{p^2}{4} - q < 0,\quad n = 1, 2, \ldots$$

Снова начнём со случая $n=1$. Замечая, что

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right),$$

и полагая $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$, получим

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}\,dt =$$

$$= M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a} + C.$$

Окончательно получим

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C. \tag{88}$$

В случае $n>1$, полагая, как и выше, $t=x+\frac{p}{2}$, $a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$, подобным же образом получим

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = M\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Рассмотрим в отдельности каждый из получившихся интегралов в правой части этого равенства. Что касается первого из них, то он вычисляется сразу:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

Второй же интеграл вычисляется несколько сложнее. Пусть

$$\Im_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Проинтегрируем интеграл $\Im_n$ по частям, положив

$$u = \frac{1}{(t^2+a^2)^n}, \quad dv = dt,$$

$$du = -\frac{2nt\,dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}, \quad v = t,$$

затем добавим и вычтем a^2 в числителе получившейся под знаком интеграла функции и получим

$$\Im_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+a^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\,dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}\right],$$

т.е.

$$\Im_n = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\cdot\Im_n - 2na^2\cdot\Im_{n+1},$$

откуда
$$\Im_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\cdot \Im_n, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{89}$$
т.е. мы получили *рекуррентную формулу*.

Интеграл $\Im_1$ вычисляется по формуле (88). Формула (89) позволяет вычислить $\Im_2$. Зная $\Im_2$, по той же формуле (89)) можно найти $\Im_3$, продолжая этот процесс дальше, можно найти и выражение для любого интеграла $\Im_n$, n=$1, 2, \ldots$.

При нахождении интегралов от рациональных дробей мы получили только многочлены, рациональные дроби, логарифмы и арктангенсы. Сформулируем этот факт в виде теоремы.

Теорема 89. Неопределённый интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, на котором знаменатель дроби не обращается в нуль, существует и выражается через элементарные функции, а именно, он является алгебраической суммой суперпозиций рациональных дробей, арктангенсов и натуральных логарифмов.

Пример 95. Найдём интеграл
$$\int \frac{x}{(2-x)(x+3)}\,dx.$$
Подынтегральная функция является правильной дробью (поскольку степень числителя меньше степень знаменателя), а знаменатель имеет два различных линейных множителя. Подынтегральное выражение можно разложить на простейшие дроби
$$\frac{x}{(2-x)(x+3)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{x+3}.$$
Приведём дроби к общему знаменателю и получим
$$\frac{x}{(2-x)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(2-x)}{(2-x)(x+3)} = \frac{(A-B)x+3A+2B}{(2-x)(x+3)}.$$

Две дроби равны и их знаменатели одинаковы, следовательно равны и числители

$$x = (A - B)x + 3A + 2B.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\begin{cases} A - B = 1, \\ 3A + 2B = 0. \end{cases}$$

Тогда $B{=}-\frac{3}{2}A$, $A{+}\frac{3}{2}A{=}\frac{5}{2}A{=}1$, $A{=}\frac{2}{5}$, $B{=}-\frac{3}{5}$ и

$$\frac{x}{(2-x)(x+3)} = \frac{2}{5}\frac{1}{2-x} - \frac{3}{5}\frac{1}{x+3}.$$

Интеграл примет вид

$$\int \frac{x}{(2-x)(x+3)}\,dx = \frac{2}{5}\int \frac{dx}{2-x} - \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\frac{2}{5}\ln|2-x| - \frac{3}{5}\ln|x+3| + C.$$

Пример 96. Найдём интеграл

$$\int \frac{3x-8}{(x^2+2)^3}\,dx.$$

Запишем

$$\int \frac{3x-8}{(x^2+2)^3}\,dx = 3\int \frac{x}{(x^2+2)^3}\,dx - 8\int \frac{1}{(x^2+2)^3}\,dx.$$

В первом интеграле сделаем замену $x^2{+}2{=}t$, $xdx{=}\frac{1}{2}dt$, получим

$$\int \frac{xdx}{(x^2+2)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3} + C = -\frac{1}{4t^2} = -\frac{1}{4(x^2+2)^2} + C.$$

Для нахождения второго интеграла применим формулу (89) при $n{=}2$, $a{=}\sqrt{2}$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)^3} = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}\frac{x}{(x^2+2)^2} + \frac{3}{2\cdot 2\cdot 2}\cdot\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{x}{8(x^2+2)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+2}\right) =$$

$$= \frac{x}{8(x^2+2)^2} + \frac{3x}{32(x^2+2)} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Окончательный ответ:

$$\int \frac{3x-8}{(x^2+2)^3}\, dx = -\frac{3}{4(x^2+2)^2} -$$

$$-\frac{x}{(x^2+2)^2} - \frac{3x}{4(x^2+2)} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример 97. Найдём интеграл

$$\int \frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x-2}\, dx.$$

Подынтегральная функция $\frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x-2}$ представляет собой неправильную дробь. Выделим целую часть:

$$\int \frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x-2}\, dx = \int \frac{x^3+x-2+3x^2-x+6}{x^3+x-2}\, dx =$$

$$= \int dx + \int \frac{3x^2-x+6}{x^3+x-2}\, dx = x + \int \frac{3x^2-x+6}{x^3+x-2}\, dx.$$

Корнем знаменателя, очевидно, является x=1, поэтому

$$x^3+x-2 = (x-1)(x^2+x+2).$$

Уравнение $x^2+x+2=0$ не имеет вещественных корней, поэтому мы ищем разложение на простейшие дроби вида

$$\frac{3x^2-x+6}{x^3+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+2} =$$

$$= \frac{A(x^2+x+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (A-B+C)x + 2A - C}{x^3 + x - 2},$$

откуда получим $(A+B)x^2+(A-B+C)x+2A-C=3x^2-x+6$. Составим систему

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ A - B + C = -1, \\ 2A - C = 6. \end{cases}$$

Упрощая, запишем

$$\begin{cases} 2A + C = 2; \\ 2A - C = 6, \end{cases}$$

что даёт $4A=8$, $A=2$, $C=-2$, $B=1$, следовательно

$$\frac{3x^2 - x + 6}{x^3 + x - 2} = \frac{2}{x-1} + \frac{x-2}{x^2 + x + 2}$$

и

$$\int \frac{3x^2 - x + 6}{x^3 + x - 2}\, dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{x-2}{x^2+x+2}\, dx = 2\ln|x-1| +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{2x+1-5}{x^2+x+2}\, dx = 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+2)}{x^2+x+2} -$$

$$-\frac{5}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+2) -$$

$$-\frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

Окончательно получим

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + x - 2}\, dx = x + 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+2) -$$

$$-\frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

Пример 98. Найдём интеграл

$$\int \frac{dx}{x^4+1}.$$

Разложим знаменатель на множители

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2 =$$

$$= \left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).$$

Получим

$$x^4+1 = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

Квадратные трёхчлены $x^2-\sqrt{2}x+1$ и $x^2+\sqrt{2}x+1$ не имеют вещественных коней, поэтому

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1} =$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3+(A\sqrt{2}+B+D-C\sqrt{2})x^2+(B\sqrt{2}-D\sqrt{2})x+B+D}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D+\sqrt{2}(A-C)=0, \\ B-D=0, \\ B+D=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A=-C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B=D=\frac{1}{2}$.

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \sqrt{2}\int \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \right.$$

$$\left. + \int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \sqrt{2}\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\int \frac{d(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx + \sqrt{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \int \frac{d(x^2+\sqrt{2}x+1)}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \sqrt{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) - 2\,\mathrm{arctg}\left(1-\sqrt{2}x\right) + \right.$$

$$\left. + \ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + 2\,\mathrm{arctg}(1+\sqrt{2}x)\right) =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right) + \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\right) + C.$$

Таким образом, интегрирование рациональных функций состоит из следующих этапов:

- если функция – неправильная рациональная дробь, то осуществляется деление для выделения целой части и правильной рациональной дроби;

- целая часть, представляющая собой многочлен, интегрируется, а правильная рациональная дробь раскладывается на простейшие дроби;
- интегрирование отдельных простейших дробей.

7.5 Интегрирование некоторых иррациональных функций

Перейдём к изучению интегралов от некоторых иррациональных функций и интегралов, содержащих тригонометрические и гиперболические функции, которые с помощью соответствующих замен можно преобразовать в интегралы от рациональных функций.

Рациональные функции от нескольких переменных. Рациональные функции от функции.

Чтобы иметь возможность точно описать интегралы, с которыми мы будем иметь дело, нам понадобится понятие рациональных функций двух и более переменных. Поэтому введём следующее обозначение:

$$R(u_1, \ldots, u_n) = \frac{P(u_1, \ldots, u_n)}{Q(u_1, \ldots, u_n)},$$

где P и Q – многочлены от переменных u_1, ..., u_n, т.е. функции вида

$$\sum_{k_1+\ldots+k_n \leq k} a_{k_1,\ldots,k_n} u_1^{k_1} \ldots u_n^{k_n}.$$

Функцию $R(u_1, \ldots, u_n)$ будем называть *рациональной функцией от* u_1, ..., u_n.

Рациональные функции двух переменных u и v, например, имеют вид

$$uv - 2, \qquad \frac{u-v}{u+v}, \qquad \frac{uv+1}{u^2-v^2}, \qquad \frac{u^3-u^2v^4+v^5}{u^7v-u^4v^2-1}.$$

Если $u_1, \ldots, u_n$, в свою очередь, являются функциями переменной x: $u_1 = \varphi_1(x), \ldots, u_n = \varphi_n(x)$, то функция

$$R(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

называется *рациональной функцией от функций* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Рациональные функции от x, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ и $\sqrt[4]{x}$, например, имеют вид

$$R(x, \sqrt{x}) = \frac{1 - x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 2}, \qquad R(x, \sqrt[3]{x}) = \frac{3\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x} - 1},$$

$$R(x, \sqrt[4]{x}) = \frac{5 - 2\sqrt[4]{x}}{2 + \sqrt[4]{x} - x}.$$

Пример 99. Функция

$$f(x) = \frac{x + \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + 1}}$$

является рациональной функцией от x и радикалов $\sqrt[3]{x^2 - 1}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt{x^2 + 1}$:

$$f(x) = R(x, \sqrt[3]{x^2 - 1}, \sqrt{x}, \sqrt{x^2 + 1}).$$

Здесь

$$R(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{u_1 + u_2^2}{u_3 - u_4}.$$

1. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_s}\right) dx$.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + e}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax + b}{cx + e}\right)^{r_s}\right) dx, \tag{90}$$

где R – рациональная функция, $r_1, \ldots, r_s \in \mathbb{Q}$, определитель

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть k – общий знаменатель дробей $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$, . . ., $r_s = \frac{m_s}{n_s}$. Замена, определяемая равенством

$$\frac{ax+b}{cx+e} = t^k,$$

преобразует интеграл (90) в интеграл от рациональной функции.

Найдём: $x = \frac{et^k - b}{a - ct^k} = p(t)$ – является рациональной функцией, $dx = p'(t)dt$,

$$p'(t) = \frac{ket^{k-1}(a - ct^k) + kct^{k-1}(et^k - b)}{(a - ct^k)^2} =$$

$$= \frac{kt^{k-1}[e(a - ct^k) + c(et^k - b)]}{(a - ct^k)^2}$$

также рациональная функция. Далее имеем

$$\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_1} = t^{kr_1} = t^{m_1}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_s} = t^{kr_s} = t^{m_s}$$

и

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_s}\right) dx =$$

$$= \int R\left(\frac{et^k - b}{a - ct^k}, t^{m_1}, \ldots, t^{m_s}\right) p'(t)dt = \int R^*(t)dt,$$

где $R^*(t)$ – рациональная функция. Таким образом, вычисление исходного интеграла сводится к интегрированию рациональных дробей.

Пример 100. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}dx.$$

Используя замену $x{=}t^6$, т.е. $t{=}\sqrt[6]{x}$, получаем $dx{=}6t^5dt$ и

$$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}dx = \int \frac{1+t^3-t^2}{t^6+t^5}6t^5dt =$$

$$= \int \frac{6t^3-6t^2+6}{t+1}dt = \int \left(6t^2-12t+12-\frac{6}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2t^3-6t^2+12t-6\ln|t+1|+C = 2\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+12\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$$

Пример 101. Найдём интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$$

Для этого преобразуем его к виду (90):

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}.$$

Произведём замену $\dfrac{x-1}{x+1}{=}t^3$, откуда $x{=}\dfrac{t^3+1}{1-t^3}$, $dx{=}\dfrac{6t^2dt}{(1-t^3)^2}$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{\frac{6t^2}{(1-t^3)^2}dt}{\left(\left(\frac{t^3+1}{1-t^3}\right)^2-1\right)t} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{t}+C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

2. Интегрирование функций, содержащих корень из квадратного трёхчлена.

Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx, \quad a \neq 0,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени $n \geq 1$.

При $n=1$ этот интеграл заменой сводится к табличным.

Пример 102. Вычислим интеграл

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x}}\, dx.$$

Будем иметь

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \frac{dx}{x^2}.$$

Произведём замену $u = \frac{1}{x}$, $du = -\frac{1}{x^2}dx$, получим

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x}}\, dx = -\int \frac{1}{\sqrt{1 + u}}\, du =$$

$$= -2\sqrt{u + 1} + C = -2\sqrt{\frac{x + 1}{x}} + C.$$

Пример 103. Найдём интеграл

$$\int \frac{(x - 2)dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

с помощью замены $x^2 - 4x + 3 = t$. Получим $(2x - 4)dx = dt$, $(x - 2)dx = \frac{1}{2}dt$ и

$$\int \frac{(x - 2)dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + C.$$

Рассмотрим случай, когда $n>1$. Покажем, что справедлива формула

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (91)$$

где $P_{n-1}(x)$ – многочлен степени не выше $n-1$, α – некоторое число.

Пусть задан многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Если существует многочлен

$$P_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0,$$

удовлетворяющий условию (91), то, дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= P_{n-1}(x)'\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{P_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\alpha}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

или

$$2P_n(x) = 2P_{n-1}(x)'(ax^2+bx+c) + P_{n-1}(x)(2ax+b) + 2\alpha.$$

Здесь слева стоит многочлен степени n, каждое слагаемое справа также является многочленом степени не больше n.

Замечая, что

$$P_{n-1}(x)' = (n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_k x^{k-1} + \ldots + b_1,$$

имеем равенство

$$2(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0) =$$

$$= 2(ax^2 + bx + c)((n-1)b_{n-1}x^{n-2} + \ldots + kb_kx^{k-1} + \ldots + b_1) +$$
$$+ (2ax + b)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0) + 2\alpha.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим следующую систему $n+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестными b_0, b_1, ..., b_{n-1}, α:

$$\begin{cases} 2a_0 = 2cb_1 + bb_0 + 2\alpha, \\ 2a_1 = 2bb_1 + 4cb_2 + 2ab_0 + bb_1, \\ \ldots, \\ 2a_k = 2(k-1)ab_{k-1} + 2kbb_k + 2(k+1)cb_{k+1} + 2ab_{k-1} + bb_k, \\ \ldots, \\ 2a_{n-1} = 2(n-2)ab_{n-2} + 2(n-1)bb_{n-1} + 2ab_{n-2} + bb_{n-1}, \\ 2a_n = 2(n-1)ab_{n-1} + 2ab_{n-1}. \end{cases} \tag{92}$$

Из последнего уравнения сразу находим $b_{n-1}=\frac{a_n}{na}$. Подставляя это значение в предпоследнее уравнение и замечая, что в этом уравнении коэффициент у неизвестного b_{n-2} равен $2a(n-1)\neq 0$, найдём значение b_{n-2}. Подставляя далее значения b_{n-1} и b_{n-2} в предыдущее уравнение, найдём значение b_{n-3}, и т.д. Последовательно получим все значения неизвестных b_k, $k=0, 1, \ldots, n-1$. После этого из первого уравнения сразу находится неизвестное α.

Таким образом, система (92) имеет решение при любых значениях a_0, a_1, ..., a_n, поэтому определитель этой системы не равен нулю и указанное решение единственно.

На практике многочлен $P_{n-1}(x)$ в формуле (91) пишут с неопределенными коэффициентами, которые находят, решая систему (92). После этого вычисление данного интеграла сводится к вычислению интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

который в случае, когда подкоренное выражение положительно на некотором промежутке, легко сводится к табличному.

Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-\lambda)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

сводятся к интегралам рассмотренного типа с помощью подстановки $t{=}1/(x-\lambda)$.

Пример 104. Найдём интеграл

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx.$$

Используя формулу (91), запишем

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx =$$

$$= (\beta x^2+\gamma x+\delta)\sqrt{x^2+4x+3}+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}} = (2\beta x+\gamma)\sqrt{x^2+4x+3}+$$

$$+(\beta x^2+\gamma x+\delta)\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+3}}+\frac{\alpha}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

или

$$x^3-6x^2+11x-6=$$

$$= (2\beta x+\gamma)(x^2+4x+3)+(x+2)(\beta x^2+\gamma x+\delta)+\alpha =$$

$$= 3\beta x^3+(10\beta+2\gamma)x^2+(6\beta+6\gamma+\delta)x+\alpha+3\gamma+2\delta.$$

Отсюда находим систему

$$\begin{cases} 3\beta = 1, \\ 10\beta + 2\gamma = -6, \\ 6\beta + 6\gamma + \delta = 11, \\ \alpha + 3\gamma + 2\delta = -6. \end{cases}$$

Решив систему, находим $\beta=\frac{1}{3}$, $\gamma=-\frac{14}{3}$, $\delta=37$, $\alpha=-66$. Тогда

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}\, dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + 37\right)\sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + 37\right)\sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 - 1}} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + 37\right)\sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66\ln|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}| + C.$$

3. Подстановки Эйлера.

Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$ обычно вычисляются с помощью *подстановок Эйлера*. Рассмотрим интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx, \quad a \neq 0.$$

1. При $a>0$ можно провести *первую подстановку Эйлера*, а именно, можно заменить x на t следующим образом:

   $$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t.$$

   Знаки можно брать в любой комбинации. Возведём обе части записанного равенства в квадрат:

   $$ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2,$$

отсюда

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}} = R_1(t),$$

где $R_1(t)$ – рациональная функция от t, а значит, $R_1'(t)$ – также рациональная функция. Имеем $dx{=}R_1'(t)dt$, $\sqrt{ax^2 + bx + c}{=}{\pm}R_1(t)\sqrt{a}{\pm}t{=}R_2(t)$, где, очевидно, $R_2(t)$ – рациональная функция. Окончательно получим

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx =$$

$$= \int R(R_1(t), R_2(t))R_1'(t)dt = \int R^*(t)dt,$$

где $R^*(t)$ – рациональная функция.

2. При $c{>}0$ можно провести *вторую подстановку Эйлера*, а именно, можно сделать замену x на t следующим образом:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt.$$

Комбинация знаков произвольна. Возведя в квадрат обе части этого соотношения, получим равенство

$$ax^2 + bx = \pm 2\sqrt{c}xt + x^2t^2,$$

откуда

$$x = \frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^2 - a} = R_4(t), \quad dx = R_4'(t)dt,$$

$\sqrt{ax^2 + bx + c}{=}{\pm}\sqrt{c}{\pm}R_4(t)t{=}R_5(t)$, где $R_4(t)$, $R_4'(t)$, $R_5(t)$ – рациональные функции от t. Поэтому

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx =$$

$$= \int R(R_4(t), R_5(t))R_4'(t)dt = \int R^*(t)dt,$$

где $R^*(t)$ – рациональная функция.

3. Корни трёхчлена ax^2+bx+c действительные. Пусть x_1 и x_2 действительны и являются корнями трёхчлена ax^2+bx+c. Если $x_1=x_2$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)^2} = |x-x_1|\sqrt{a}.$$

Отсюда следует, что либо под корнем стоит отрицательная при всех значениях $x \neq x_1$ величина, т.е. корень принимает только чисто мнимые выражения, тогда этот случай имеет место при $a<0$ и мы его не рассматриваем, либо при $a \geq 0$ после указанного элементарного преобразования получаем, что переменная x не входит под знак корня, т.е. под интегралом стоит просто рациональная функция от x, вообще говоря, разная для каждого из промежутков $(-\infty, x_1)$ и $(x_1, +\infty)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x_1 \neq x_2$. Замечая, что $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, и вынося $x-x_1$ из-под знака корня, получаем

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) =$$

$$= R\left(x, |x-x_1|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right) = R_3\left(x, \sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}}\right),$$

здесь $R_3(u, v)$ – рациональная функция переменных u и v.

Из предыдущего пункта известно, что последний интеграл может быть вычислен с помощью подстановки $t^2 = \frac{a(x-x_2)}{x-x_1}$, что в нашем случае даёт

$$\pm(x-x_1)t = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}.$$

Выбрав $t > 0$ при $x \geq x_1$ и $t < 0$ при $x \leq x_1$, будем иметь $(x-x_1)t = \sqrt{ax^2+bx+c}$.

Два изученных нами способа вычисления интеграла $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ позволяют всегда свести этот интеграл к интегралу от рациональной дроби на любом промежутке, если только корень $\sqrt{ax^2+bx+c}$ на этом промежутке не принимает чисто мнимые значения.

Пример 105. С помощью подстановки Эйлера найдём интеграл

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Поскольку коэффициент при x^2 больше нуля, используем первую подстановку

$$\sqrt{x^2+2x+2} = x+t.$$

Возведём обе части в квадрат:

$$x^2+2x+2 = x^2+2xt+t^2 \Rightarrow 2x(1-t) = t^2-2 \Rightarrow x = \frac{t^2-2}{2(1-t)},$$

$$dx = \frac{1}{2}\frac{2t(1-t)-(-1)(t^2-2)}{(1-t)^2}dt = \frac{-t^2+2t-2}{2(1-t)^2}dt.$$

Поскольку

$$\sqrt{x^2+2x+2} = x+t = \frac{t^2-2}{2(1-t)}+t = \frac{-t^2+2t-2}{2(1-t)},$$

то получим

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{\frac{-t^2+2t-2}{2(1-t)^2}}{\frac{t^2-2}{2(1-t)}+\frac{-t^2+2t-2}{2(1-t)}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{t^2-2t+2}{(1-t)(t-2)}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{(t-1)^2+1}{(1-t)(t-2)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{t-1}{t-2}dt + \int \frac{dt}{(t-1)(t-2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{t-2+1}{t-2}dt + \int \frac{dt}{(t-1)(t-2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dt + \int \frac{dt}{t-2} + \int \frac{dt}{(t-1)(t-2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \ln|t-2| + \int \frac{dt}{(t-1)(t-2)}\right).$$

Вычислим последний интеграл. Для этого представим подынтегральную дробь в виде суммы простейших дробей и воспользуемся методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2)+B(t-1)}{(t-1)(t-2)} =$$

$$= \frac{(A+B)t - 2A - B}{(t-1)(t-2)},$$

получим систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -2A - B = 1. \end{cases}$$

Тогда $A{=}-1$, $B{=}1$ и

$$\int \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = -\int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{t-2} =$$

$$= -\ln|t-1| + \ln|t-2| + C = \ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right| + C.$$

Окончательно получим

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+2x+2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+2x+2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+2x+2} - x - 2| +$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-x-2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1}\right|+C.$$

Пример 106. Для нахождения интеграла

$$\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$$

выберем вторую подстановку Эйлера: $\sqrt{1+x+x^2}=xt+1$. Возведём в квадрат обе части последнего выражения: $1+x+x^2=x^2t^2+2xt+1$ и получим

$$x=\frac{2t-1}{1-t^2},\quad dx=2\frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}dt.$$

Далее

$$\sqrt{1+x+x^2}=\frac{1-t+t^2}{1-t^2},\qquad t=\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}.$$

В результате будем иметь

$$\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx=\int\frac{-2t}{1-t^2}\,dt=\int\frac{d(1-t^2)}{1-t^2}=$$

$$=\ln|1-t^2|+C=\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right|+C.$$

Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\,dx$ сводятся с помощью подстановки $t^2=ax+b$ к рассмотренным интегралам.

4. Другие подстановки для интегралов вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

Вычисление интегралов с помощью подстановок Эйлера обычно приводит к громоздким выражениям, поэтому их следует применять, вообще говоря, лишь тогда, когда рассматриваемый интеграл не удаётся вычислить другим более коротким способом. Например, замечая, что $ax^2+bx+c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$, нетрудно убедиться, что интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$ (в случае, когда подкоренное выражение положительно на некотором интервале) с помощью линейной подстановки может быть приведён к одному из трёх интегралов:

$$\int R(t, \sqrt{a^2 - t^2})\,dt, \quad \int R(t, \sqrt{t^2 - a^2})\,dt, \quad \int R(t, \sqrt{t^2 + a^2})\,dt.$$

Здесь символом R обозначена некоторая рациональная функция. Для вычисления полученных интегралов часто оказывается очень удобным использование тригонометрических и гиперболических подстановок.

Так, например, рекомендуются следующие замены (возможны и другие варианты):

1. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx; \quad x = a\sin t$ или $x = a\cos t$,

2. $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,dx; \quad x = a\,\mathrm{sh}\,t$ или $x = a\,\mathrm{tg}\,t$,

3. $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx; \quad x = a\,\mathrm{ch}\,t$.

Пример 107. Рассмотрим интеграл $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$, $a>0$. Произведя замену $x=a\,\mathrm{sh}\,t$, $dx=a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$, $t=\mathrm{arsh}\frac{x}{a}= \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\right|$, получим

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 + a^2\,\mathrm{sh}^2\,t}\,a\,\mathrm{ch}\,t\,dt = a^2 \int \mathrm{ch}^2\,t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1 + \mathrm{ch}\,2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \mathrm{ch}\,2t\,dt\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + C.$$

Для удобного нахождения интегралов вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$ можно составить дополнительную таблицу.

Дополнительная таблица интегралов.

1. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0,$
2. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad a \neq 0,$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a > 0,$
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a > 0,$
5. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$
6. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$

Все эти интегралы разными методами сводятся к основной таблице интегралов (см. примеры 91 и 107).

5. Интегралы от дифференциальных биномов.

Интеграл

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx$$

называется *интегралом от дифференциального бинома*. При натуральном p получим

$$x^m(a + bx^n)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k a^{p-k} b^k x^{nk+m}.$$

Выражение $x^m(a + bx^n)^p\,dx$ называется *дифференциальным биномом*. Будем рассматривать случаи, когда m, n и p – рациональные, а a и b – действительные числа.

Сначала положим $x{=}t^{\frac{1}{n}}$, $dx{=}\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt$, тогда

$$\int x^m(a + bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int (a + bt)^p t^{\frac{m+1}{n}-1}dt.$$

Таким образом, интеграл $\int x^m(a + bx^n)^p\,dx$ сводится к интегралу вида

$$\int (a + bt)^p t^q\,dt, \tag{93}$$

где p и $q{=}\frac{m+1}{n}{-}1$ – рациональные числа.

Интеграл от дифференциального бинома (93) берётся в следующих трёх случаях.

1. Пусть p – целое целое. И пусть $q{=}\frac{r}{s}$, где r и s – целые числа. В этом случае подстановка $z{=}t^{\frac{1}{s}}$ сводит интеграл (93) к интегралу от рациональной дроби.

2. Пусть q — целое число. И пусть теперь $p{=}\frac{r}{s}$, r и s – целые числа. Интеграл (93) приводится в этом случае подстановкой $z{=}(a + bt)^{\frac{1}{s}}$ к интегралу от рациональной дроби.

3. Пусть $p{+}q$ – целое число. И пусть $p{=}\frac{r}{s}$, r и s – целые числа. Запишем интеграл (93) в виде

$$\int (a + bt)^p t^q\,dt = \int \left(\frac{a + bt}{t}\right)^p t^{p+q}\,dt.$$

Подстановка

$$z = \left(\frac{a + bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}$$

приводит (93) к интегралу от рациональной дроби.

Итак, в трёх случаях, когда одно из чисел p, q или $p + q$ является целым, интеграл $\int (a+bt)^p t^q\,dt$ при помощи указанных выше подстановок приводится к интегралу от рациональной дроби.

Относительно интеграла $\int x^m(a + bx^n)^p\,dx$ этот результат выглядит следующим образом: когда одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n} + p$ является целым, интеграл $\int x^m(a + bx^n)^p\,dx$ может быть сведён к интегралу от рациональной дроби.

Подстановки в случае интеграла $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ имеют вид.

1. В случае, когда p целое, это сведение осуществляет подстановка

   $$x = z^N,$$

   где число N является общим знаменателем дробей m и n.

2. В случае, когда $\frac{m+1}{n}$ целое, – подстановка $a+bx^n=z^N$, где число N является знаменателем дроби p.

3. В случае, когда $\frac{m+1}{n} + p$ целое, – подстановка $ax^{-n}+b=z^N$, где число N также является знаменателем дроби p.

П.Л. Чебышёв показал, что при показателях m, n и p, не удовлетворяющих вышеуказанным условиям, интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ не выражается через элементарные функции.

Пример 108. Найдём интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1 + \sqrt[3]{x})}.$$

Этот интеграл можно записать в виде

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1 + \sqrt[3]{x})} = \int x^{-\frac{2}{3}}(1 + x^{\frac{1}{3}})^{-1}dx.$$

Тогда $m{=}-\frac{2}{3}$, $n{=}-\frac{1}{3}$, $p{=}{-}1$. Получаем первый случай, когда p – целое число. Произведём подстановку $x{=}t^3$, $dx{=}3t^2dt$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})} = 3\int \frac{t^2dt}{t^2(1+t)} =$$

$$= 3\int \frac{dt}{1+t} = 3\ln|1+t| + C = 3\ln|1+\sqrt[3]{x}| + C.$$

Пример 109. Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Этот интеграл можно записать в виде

$$\int \frac{dx}{(x^2+x)^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}}(1+x)^{-\frac{3}{2}}dx.$$

Тогда $m{=}-\frac{3}{2}$, $n{=}1$, $p{=}-\frac{3}{2}$ и $\frac{m+1}{n}{+}p{=}\frac{-\frac{3}{2}+1}{1}{-}\frac{3}{2}{=}{-}2$ – целое число.

Произведём замену $\frac{1}{x}{+}1{=}t^2$, $x{=}(t^2{-}1)^{-1}$, $dx{=}-\frac{2t}{(t^2-1)^2}$, получим

$$\int \frac{dx}{(x^2+x)^{\frac{3}{2}}} = -2\int \frac{t^2-1}{t^2}\,dt = -2\int \left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$= -2\left(t+\frac{1}{t}\right) + C = -2\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} + \sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) + C.$$

7.6 Интегралы от рациональных выражений с тригонометрическими и гиперболическими функциями

Обычно задача нахождения неопределённых интегралов от тригонометрических и гиперболических функций решается методом подстановки. Обсудим подробно некоторые замены.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Теорема 90. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R – рациональная функция двух переменных, всегда сводятся к интегралу от рациональной функции с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad -\pi < x < \pi.$$

Доказательство. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, а следовательно, через t:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \times \frac{\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} \times \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Далее имеем

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом, мы получаем интеграл от рациональной функции:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 110. Найдём интеграл

$$\int \frac{5dx}{4+\sin x}.$$

Применим универсальную тригонометрическую постановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Отметим, что интеграл вычисляется на интервале $(-\pi,\pi)$. Имеем $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dt=\frac{2dt}{1+t^2}$ и

$$\int\frac{5dx}{4+\sin x}=5\int\frac{1}{4+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\frac{5}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{t}{2}+1}=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4t+1}{\sqrt{15}}\right)+C=$$

$$=\frac{10}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}\right)+C.$$

Отметим, что хотя все рассматриваемые здесь интегралы всегда могут быть приведены к интегралу от рациональной дроби с использованием универсальной подстановки, её практическое применение часто требует сложных вычислений. В то же время существуют и другие подстановки, такие как

$$t=\sin x,\qquad t=\cos x,\qquad t=\operatorname{tg}x,$$

которые иногда значительно быстрее и легче позволяют вычислить нужный интеграл. При этом можно использовать следующие способы выбора нужной замены в интеграле вида $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, где $R(u,v)$ – рациональная функция.

1. Если выполняется равенство

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x),$$

то применяется подстановка $\operatorname{tg}x=t$. В этом случае $\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}$, $\sin x\cos x=\frac{t}{1+t^2}$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Этих формул достаточно, чтобы осуществить замену переменных в интеграле.

2. Если
$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
то используется подстановка $\cos x{=}t$.

3. Если
$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
то используется подстановка $\sin x{=}t$.

Пример 111. Для интеграла
$$\int \frac{\cos x - 2\sin x}{4\cos^3 x + \sin^2 x \cos x}\,dx$$
имеем
$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{-\cos x - 2(-\sin x)}{4(-\cos x)^3 + (-\sin x)^2(-\cos x)} =$$
$$= \frac{\cos x - 2\sin x}{4\cos^3 x + \sin^2 x \cos x} = R(\sin x, \cos x).$$
Поэтому будем использовать подстановку $\operatorname{tg} x{=}t$. Производя замену $\operatorname{tg} x{=}t$, получим
$$\int \frac{\cos x - 2\sin x}{4\cos^3 x + \sin^2 x \cos x}\,dx = \int \frac{1 - 2\operatorname{tg} x}{4\cos^2 x + \sin^2 x}\,dx =$$
$$= \int \frac{1-2t}{\left(\frac{4}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}\,dt = \int \frac{1-2t}{4+t^2}\,dt =$$
$$= \int \frac{dt}{4+t^2} - \int \frac{2t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} - \ln(t^2+1) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2} - \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C.$$

Пример 112. Рассмотрим интеграл
$$\int \frac{dx}{\cos x(1+\sin x)}.$$

Поскольку

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{-\cos x(1+\sin x)} = -R(\sin x, \cos x),$$

то будем использовать подстановку $\sin x{=}t$. Получим

$$\int \frac{dx}{\cos x(1+\sin x)} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x(1+\sin x)} =$$

$$= \int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)(1+\sin x)} = \int \frac{dt}{(1-t^2)(1+t)}$$

– интеграл от рациональной дроби. Разложим подынтегральную дробь на простейшие

$$\frac{1}{(1-t^2)(1+t)} = \frac{1}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{1+t} =$$

$$= \frac{A(1+t)^2 + B(1-t) + C(1-t)(1+t)}{(1-t)(1+t)^2} =$$

$$= \frac{(A-C)t^2 + (2A-B)t + A + B + C}{(1-t)(1+t)^2}.$$

Составим систему

$$\begin{cases} A - C = 0, \\ 2A - B = 0, \\ A + B + C = 1. \end{cases}$$

Из полученной системы имеем $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{4}$ и

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(1+t)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|1-t| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{4}\ln|1+t| + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|1-\sin x| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{4}\ln|1+\sin x| + C.$$

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$.

Если m и n являются рациональными числами, то используя подстановки $t = \sin x$ или $t = \cos x$, можно свести интеграл $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ к интегралу от дифференциального бинома.

Действительно, полагая, например, $t = \sin x$, получим

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}, \quad dt = \cos x \, dx,$$

$$dx = \frac{dt}{\cos x} = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} \, dt,$$

и потому

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dt.$$

Таким образом, задача нахождения $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ сводится к уже рассмотренной задаче интегрирования дифференциального бинома.

В случае, когда m и n – целые (не обязательно положительные) числа, интеграл $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ относится к типу интегралов $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$, в частности, для их вычисления целесообразно применять подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \operatorname{tg} x$.

Рассмотрим частные случаи.

1. Если $m = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ – *нечётное положительное число*, то производят замену $\cos x = t$:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x \, dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \, d(\cos x) =$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k x \cos^n x \, d(\cos x) = \int (1 - t^2)^k t^n dt.$$

2. Если $n=2k+1$, $k=0,1,2,\ldots$, – *нечётное положительное число*, то делают замену $\sin x=t$:

$$\int \sin^m x\cos^{2k+1} x\,dx=-\int \sin^m x\cos^{2k} x\,d(\sin x) =$$

$$= -\int t^m(1-t^2)^k dt.$$

3. Если m и n – чётные положительные числа, то подынтегральное выражение $\sin^m x\cos^n x$ преобразуют с помощью формул

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

4. Если m и n – целые отрицательные числа одинаковой чётности, т.е.

$$\int \sin^m x\cos^n x dx = \int \frac{dx}{\sin^\mu x\cos^\nu x},$$

где μ и ν – *целые положительные числа одинаковой чётности*, то в этом случае производится замена

$$\operatorname{tg} x = t, \qquad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt,$$

и интеграл преобразуется с помощью формул

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1, \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 1.$$

Пример 113. Рассмотрим интеграл $\int\cos^3 x\sin^7 x\,dx$. Для его нахождения введём $\cos x$ под знак дифференциала:

$$\int \cos^3 x\sin^7 x\,dx = \int \cos^2 x\sin^7 x\,d(\sin x) =$$

$$= \int (1 - \sin^2 x) \sin^7 x \, d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^7 x \, d(\sin x) - \int \sin^9 x \, d(\sin x) = \frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10} + C.$$

3. Интегралы вида $\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx$.

Интегралы вида

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx, \qquad \int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx,$$

$$\int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx$$

вычисляются, соответственно, с помощью формул:

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x],$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x].$$

4. Интегралы вида $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) \, dx$.

Подстановка $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$ сводит интеграл $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) \, dx$ к интегралу от рациональной дроби.

Действительно, при указанной замене переменной имеем

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2dx}{1 - t^2},$$

поэтому

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) \, dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1 - t^2}, \frac{1 + t^2}{1 - t^2}\right) \frac{dt}{1 - t^2}.$$

В конкретных примерах иногда оказывается значительно удобнее использовать подстановки вида $t = \operatorname{sh} x$, $t = \operatorname{ch} x$ или $t = \operatorname{th} x$, позволяющие вычислить интеграл существенно проще.

Интегралы вида $\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x\, dx$, где m и n – рациональные числа, с помощью подстановок $t = \operatorname{sh} x$ или $t = \operatorname{ch} x$ приводятся к интегралу от дифференциального бинома.

5. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.

Мы знаем, что производная элементарной функции снова является элементарной функцией. Однако, в случае неопределённого интеграла ситуация значительно сложнее. Поскольку элементарные функции непрерывны на интервалах, на которых они определены, то они имеют первообразную. Но вообще неверно, что первообразные элементарных функций снова являются элементарными функциями. Таким образом, может возникнуть ситуация, когда первообразная существует, но не может быть выражена через конечное число алгебраических операций и суперпозиций основных элементарных функций. Мы уже сталкивались с подобной ситуацией, когда изучали интеграл от дифференциального бинома: в этом случае функция под интегралом была элементарной (иррациональной), но, как отмечалось, интеграл от неё не всегда может быть найден.

Интегралы

$$\int \frac{e^x}{x^n}\, dx, \qquad \int \frac{\sin x}{x^n}\, dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x^n}\, dx,$$

где n – натуральное число, не выражаются через элементарные функции. Существуют интегралы от элементарных функций, которые невозможно выразить через другие элементарные функции, но которые играют важную роль в математическом анализе, а также в его различных приложениях. Один из таких интегралов, например, – *интеграл Пуассона*

$$\int e^{-x^2} dx,$$

а также так называемые *эллиптические интегралы*

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx,$$

где $P(x)$ – многочлен третьей или четвёртой степени.

Другие важные в приложениях интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях, – *интегралы Френеля*

$$S(x) = \int\limits_0^x \sin(t^2)\,dt, \quad C(x) = \int\limits_0^x \cos(t^2)\,dt,$$

используемые, например, в оптике. График параметрически заданной функции $x{=}S(t)$, $y{=}C(t)$ даёт кривую на плоскости, называемую спиралью Корню или клотоидой.

Часто встречаются интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad \int \frac{x^2dx}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad 0 < k < 1,$$

которые подстановкой $x = \sin t$ приводятся к линейным комбинациям интегралов

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}, \qquad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt;$$

они называются, соответственно, *эллиптическими интегралами первого и второго рода в форме Лежандра*.

Таким образом, вопрос о том, имеет ли элементарная функция элементарную первообразную и чему она равна, может оказаться очень сложным. В решении этого вопроса раньше помогали обширные справочники (см., например, [12]), теперь же используются системы компьютерной алгебры. Однако, для понимания математики и умения решать поставленные задачи необходимо знать основные методы интегрирования.

Список литературы

[1] Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М. : Высшая школа, 1999. – 695 с.

[2] Бутузов, В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах: учеб. пособие / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин ; под ред. В.Ф. Бутузова. – 5-е изд., испр. – М. : Физматлит, 2002. – 489 с.

[3] Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб.пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : ООО “Издательство Астрель”: ООО “Издательство АСТ”, 2005. – 558 с.

[4] Зорич, В.А. Математический анализ. Ч. I / В.А. Зорич. – 10-е изд., испр. – М. : МЦНМО, 2019. – 564 с.

[5] Ильин, В.А. Математический анализ. Т. 1. Начальный курс / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов ; под ред. А.Н. Тихонова. – 2-е изд., перераб. – М. : Изд-во МГУ, 1985. – 662 с.

[6] Ильин, В.А. Основы математического анализа. Ч. 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Физматлит, 2009. – 648 с.

[7] Ковалева, Л.А. Неравенства в анализе: методы доказательства результатов и решения задач: учебно-методическое пособие / Л.А. Ковалева, С.М. Ситник, О.В. Чернова, Э.Л. Шишкина. – Белгород : ИД «БелГУ», НИУ «БелГУ», 2021. – 60 с.

[8] Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа. Том I / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Дрофа, 2003. – 704 с.

[9] Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: учеб. пособие / Л.Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин ; под ред. Л.Д. Кудрявцева. – 2-е изд., перераб. – М. : Физматлит, 2003. – 496 с.

[10] Ляшко, И.И. Математический анализ в примерах и задачах. Ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.А. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. – Киев : Вища школа, 1974. – 680 с.

[11] Ляшко, И.И. АнтиДемидович. Т. 1. Ч. 1: Введение в анализ. Справочное пособие по высшей математике. Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. – М. : Ленанд, 2015. – 238 с.

[12] Прудников, А.П. Интегралы и ряды: справочник. Т. 1. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Физматлит, 2002. – 631 с.

[13] Соминский, И.С. Метод математической индукции / И.С. Соминский. – М. : Наука, 1965. – 56 с.

[14] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1: учеб. пособие / Г.М. Фихтенгольц. – Санкт-Петербург : Лань, 1997. – 607 с.

[15] Шень, А.Х. Математическая индукция / А.Х. Шень. – 3-е изд., доп. – М. : МЦНМО, 2007. – 32 с.

[16] Basant, K.B. Summation of convergent geometric series and the concept of approachable sunya / K.B. Basant, S. Panda // Indian Journal of History of Science. – 2013. – Vol. 48. – P. 291-313.

[17] Brajendranath, S. The Positive Sciences of Ancient Hindus / S. Brajendranath. – Motilal Banarsidass, 2016. – 323 p.

[18] Jahnke, H.N. A History of Analysis / H.N. Jahnke. – American Mathematical Society, 2003. – 422 p.

[19] Rajagopal, C.T. On an untapped source of medieval Keralese mathematics / C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari // Archive for History of Exact Sciences. – 1978. – Vol. 18, no. 2. –P. 89-102.

[20] Smith, D.E. History of Mathematics / D.E. Smith. – Dover Publications, 1958. – 736 p.

[21] Stewart, J. Calculus: Early Transcendentals / J. Stewart. – Cengage Learning, 2012. – 994 p.

[22] Stillwell, J. Mathematics and Its History / J. Stillwell. – 2nd ed. Springer, 2002. – 542 p.

ЗАЙЦЕВА НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА (04.06.1980)
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

ШИШКИНА ЭЛИНА ЛЕОНИДОВНА (26.11.1980)
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования института инженерных и цифровых технологий Белгородского государственного национального исследовательского университета (НИУ «БелГУ»).

Учебник представляет собой первую часть курса математического анализа, включающую в себя теорию множеств, теорию числовых последовательностей, теории пределов, непрерывности, дифференциального и интегрального исчислений функций одной переменной. Учебник соответствует программе курса математического анализа для студентов математических, механико-математических и естественно-научных факультетов университетов, а также технических и педагогических вузов.

ISBN 978-5-19-012045-5
9 785190 120455