

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение .....	23
<b>ГЛАВА 1 Новая параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства</b> .....	<b>47</b>
1.1 Параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства на основе двух базовых поверхностей .....	47
1.1.1 Векторное параметрическое уравнение области тонкого тела .....	49
1.1.2 Двумерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризаций поверхности .....	49
1.1.3 Трехмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризаций области .....	50
1.1.4 Мультипликативные базисы .....	55
1.1.5 Различные семейства символов Кристоффеля .....	55
1.1.6 Деривационные формулы для мультипликативных базисов .....	57
1.1.7 Представление единичного (изотропного) тензора второго ранга .....	57
1.1.8 Представления изотропных тензоров четвертого ранга .....	58
1.1.9 О ковариантной производной от компонент тензоров .....	61
1.2 Связь между разными семействами параметризаций области тонкого тела .....	63
1.2.1 Связь между различными семействами мультипликативных базисов .....	64
1.2.2 Связь между разными семействами символов Кристоффеля .....	64
1.2.3 Связи между компонентами и ковариантными производными от компонент многоточечного тензора .....	65
1.3 О компонентах ЕТВР .....	65
1.3.1 Об основных компонентах ЕТВР и число независимых основных компонент ЕТВР .....	66
1.3.2 Представления компонент ЕТВР через его основные компоненты переноса при различных семействах параметризаций области тонкого тела .....	68
1.3.2.1 Вектор $\mathbf{h}$ не перпендикулярен к базовым поверхностям .....	68
1.3.2.2 Вектор $\mathbf{h}$ ортогонален к основной базовой поверхности .....	71
1.3.2.3 Вектор $\mathbf{h}$ ортогонален к основной базовой поверхности и координатные линии на ней являются линиями кривизны ...	72
1.4 Выражения семейств символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР .....	74
1.4.1 Выражения символов Кристоффеля относительно базисов, связанных с лицевыми поверхностями, с помощью основных компонент ЕТВР .....	75
1.4.2 Представление $S_g$ -семейства символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР .....	76
1.5 Представления компонент вторых тензоров поверхностей через основные компоненты ЕТВР .....	77
1.5.1 Представления компонент второго тензора поверхности $S$ посредством основных компонент ЕТВР .....	77
1.5.2 Представления для компонент вторых тензоров лицевых поверхностей посредством основных компонент ЕТВР .....	78
1.5.2.1 Представления средних и гауссовых кривизн поверхностей через основные компоненты ЕТВР .....	79
1.5.2.2 Представления компонент переноса и компонент ЕТВР посредством степенных рядов относительно $x^3$ .....	82
1.5.2.3 О представлении расширенного второго тензора поверхности .....	89

1.5.3	О тензорах Римана – Кристоффеля в $\mathbb{R}^3$ .....	90
1.5.4	Тождества Ламе .....	94
1.6	О тензорах Римана – Кристоффеля при новой параметризации области тонкого тела в $\mathbb{R}^3$ .....	96

## ГЛАВА 2 Рекуррентные формулы полиномов Лежандра и Чебышёва.

### Моменты тензорных полей, некоторых выражений и дифференциальных операторов относительно этих систем полиномов

107

2.1	Рекуррентные формулы для полиномов Лежандра. Моменты тензорных полей, их компонент и некоторых дифференциальных операторов .....	107
2.1.1	Теорема о линейном преобразовании сегмента ортогональности .....	107
2.1.2	Производящая функция и основные рекуррентные формулы для многочленов Лежандра .....	109
2.1.3	Дополнительные рекуррентные соотношения .....	111
2.2	Моменты скалярной функции и их производных .....	114
2.2.1	Моменты скалярной функции .....	115
2.2.2	Моменты производных $\partial_i f$ и $\partial_i \partial_j f$ .....	115
2.3	Производящая функция и основные рекуррентные формулы для полиномов Чебышёва первого рода .....	119
2.4	Дополнительные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышёва первого рода на сегменте $[0, 1]$ .....	122
2.5	Производящая функция и основные рекуррентные формулы для полиномов Чебышёва второго рода .....	128
2.6	Дополнительные рекуррентные соотношения для полиномов Чебышёва второго рода на сегменте $[0, 1]$ .....	130
2.7	Моменты тензорного поля и его производных и некоторых выражений относительно многочленов Чебышёва второго рода .....	133
2.7.1	Моменты производных $\partial_i^p \mathbb{F}(x', x^3)$ и $\partial_i^p \partial_j^q \mathbb{F}(x', x^3)$ , $p, q \in \mathbb{N}_0$ .....	135
2.7.2	Моменты некоторых выражений .....	139
2.8	Моменты компонент тензоров и их производных .....	141
2.8.1	Моменты компонент вектора .....	141
2.8.2	Моменты ковариантных производных компонент вектора .....	143
2.8.3	Моменты компонент тензора второго ранга .....	146
2.8.4	Моменты ковариантных производных от компонент тензора второго ранга .....	149
2.9	Представления и моменты $k$ -го порядка некоторых дифференциальных операторов от тензора .....	151
2.9.1	Представления и момент $k$ -го порядка градиента от тензора .....	151
2.9.2	Выражения и момент $k$ -го порядка повторного градиента от тензора .....	152
2.9.3	Представления и моменты $k$ -го порядка дивергенции и ротора от тензора .....	156
2.9.4	Выражения и момент $k$ -го порядка градиента дивергенции от тензора .....	157
2.9.5	Представления и момент $k$ -го порядка Лапласиана тензора .....	158
2.9.6	Выражения и момент $k$ -го порядка повторной дивергенции от тензора .....	160

## ГЛАВА 3 Некоторые вопросы классической и микрополярной теорий упругости

161

3.1	О некоторых недостатках классической теории .....	161
3.2	Различные подходы к построению математических моделей сред со структурой .....	162

3.3	О некоторых аксиомах механики сплошных сред и их следствиях	163
3.3.1	Аксиома 1 (аксиома сплошности)	164
3.3.2	Примерная иерархия структурных уровней материи	164
3.3.3	Классификация по характерным масштабам расстояния $l_0$ и времени $t_0$	165
3.3.4	Аксиома 2 (аксиома евклидовости пространства)	165
3.3.5	Аксиома 3 (аксиома существования абсолютного времени)	166
3.3.6	Пространственные и материальные координаты	167
3.3.7	Аксиома 4 (аксиома сохранения массы)	168
3.3.8	Аксиома 5 (аксиома сохранения тензора микроинерции)	169
3.3.9	Уравнения неразрывности в переменных Лагранжа	169
3.3.10	Дифференцирование интеграла по подвижному объему	171
3.3.11	Уравнения неразрывности в переменных Эйлера	171
3.3.12	Аксиома 6 (аксиома изменения количества движения)	172
3.3.13	Аксиома 7 (аксиома изменения момента количества движения в микрополярной теории)	173
3.3.14	Определяющие соотношения в микрополярной теории упругости	175
3.3.15	Теорема живых сил в микрополярной теории	176
3.3.16	Аксиома 8 (аксиома изменения полной энергии в микрополярной теории, или первый закон термодинамики)	177
3.3.17	Аксиома 9 (о существовании абсолютной температуры) (нулевой закон термодинамики)	178
3.3.18	Аксиома 10 (аксиома притока тепла, или второй закон термодинамики)	179
3.3.19	Аксиома 11 (неравенство Фурье)	181
3.3.20	Граничные и начальные условия теплового содержания	185
3.3.20.1	Граничное условие первого рода (условие типа Дирихле)	185
3.3.20.2	Граничное условие второго рода (условие типа Неймана)	185
3.3.20.3	Граничное условие третьего рода (условие теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона)	185
3.3.20.4	Начальное условие	186
3.4	Представления решений динамических задач в классической теории упругости	186
3.4.1	Представление решения динамических задач изотропного материала в классической теории упругости	186
3.5	Граничные и начальные условия. Постановки начально-краевых задач в классической теории упругости	188
3.5.1	Кинематические граничные условия	188
3.5.2	Статические граничные условия	188
3.5.3	Смешанные граничные условия	188
3.5.4	Начальные условия	189
3.5.5	Постановки начально-краевых задач в классической теории упругости	189
3.5.5.1	Постановка первой начально-краевой задачи в классической теории упругости	189
3.5.5.2	Постановка второй начально-краевой задачи в классической теории упругости	189
3.5.5.3	Постановка третьей начально-краевой задачи в классической теории упругости	189
3.6	Представления решений динамических задач в микрополярной теории упругости	190
3.6.1	Представление решения динамических задач изотропного материала в микрополярной теории упругости	190

3.7	Традиционное разделение начально-краевых задач в анизотропной линейной теории упругости .....	193
3.7.1	Уравнения движения относительно векторов перемещений и вращений для упругого материала без центра симметрии .....	193
3.7.2	О статических граничных условиях в линейной трехмерной микрополярной теории упругости .....	193
3.7.3	Расщепление уравнения движения однородной изотропной микрополярной среды .....	195
3.7.4	О расщеплении статических граничных условий .....	196
3.8	Характеристическое уравнение тензорно-блочного матричного оператора второго ранга .....	197
3.8.1	Расщепление уравнений в перемещениях классической теории упругости для трансверсально-изотропного тела .....	198
3.8.2	О расщеплении статических граничных условий теории упругости для трансверсально-изотропного тела .....	199
3.8.3	Об использовании канонического представления тензора модулей упругости .....	201
3.8.4	Определитель и тензор алгебраических дополнений суммы шести тензоров .....	202
3.8.5	Характеристическое уравнение линейной комбинации тензоров второго ранга .....	202
3.8.6	Выражения тензора-оператора уравнений и его определителя, а также тензора-оператора напряжения при каноническом представлении тензора модулей упругости .....	203
3.8.7	Случай изотропной среды .....	204
3.9	Условия совместности деформации. Тензор кривизны Римана – Кристоффеля .....	205
3.9.1	Условия совместности деформации в классической теории .....	205
3.9.2	Условия совместности относительно тензора напряжений. Уравнения Бельтрами – Мичелла .....	212
3.9.3	Традиционная и новая постановки краевой задачи в напряжениях .....	216
3.9.4	Вариант условия совместности деформации относительно тензора деформаций для изотропного упругого материала .....	216
3.9.5	Традиционная и новая постановки краевой задачи относительно тензора деформаций .....	219
3.9.6	Уравнение относительно тензора деформаций при нестационарных процессах .....	220
3.9.6.1	Уравнение движения относительно вектора перемещений несжимаемой изотропной упругой среды .....	222
3.9.6.2	Уравнения относительно тензора деформаций несжимаемой изотропной упругой среды при нестационарных процессах .....	222
3.9.7	Один вариант вывода уравнений относительно тензоров напряжений и деформаций при нестационарных процессах .....	223
<b>ГЛАВА 4 Задачи на собственные значения для тензорных объектов с некоторыми приложениями к механике</b>		<b>225</b>
4.1	Представления удельной энергии деформации и определяющих соотношений в линейной микрополярной теории упругости .....	225
4.1.1	Задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы .....	227

4.1.2	Выражения удельной энергии деформации и определяющих соотношений через собственные значения и собственные тензорные столбцы .....	230
4.1.3	Собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы .....	231
4.1.4	Микрополярный материал с центром симметрии .....	236
4.1.5	Задача на собственные значения и построение полной системы собственных тензоров для симметричного тензора четвертого ранга .....	237
4.2	Классификация микрополярных линейно-упругих анизотропных материалов .....	238
4.2.1	Классификация микрополярных линейно-упругих анизотропных материалов с центром симметрии .....	238
4.2.1.1	Символ анизотропии состоит из одного элемента .....	238
4.2.1.2	Символ анизотропии состоит из двух элементов .....	239
4.2.1.3	Символ анизотропии состоит из трех элементов (среди них — изотропные микроконтинуальные материалы) .....	239
4.2.1.4	Символ анизотропии состоит из четырех элементов .....	239
4.2.1.5	Символ анизотропии состоит из 5 элементов .....	239
4.2.1.6	Символ анизотропии состоит из 6 элементов .....	240
4.2.1.7	Символ анизотропии состоит из 7 элементов .....	240
4.2.1.8	Символ анизотропии состоит из 8 элементов .....	241
4.2.1.9	Символ анизотропии состоит из 9 элементов .....	241
4.2.2	Классификация классических линейно-упругих анизотропных материалов .....	241
4.2.2.1	Символ анизотропии состоит из одного элемента .....	241
4.2.2.2	Символ анизотропии состоит из двух элементов .....	242
4.2.2.3	Символ анизотропии состоит из трех элементов .....	242
4.2.2.4	Символ анизотропии состоит из четырех элементов .....	242
4.2.2.5	Символ анизотропии состоит из 5 элементов .....	242
4.2.2.6	Символ анизотропии состоит из 6 элементов .....	242
4.3	Собственные значения и собственные тензоры материалов кристаллографических сингоний .....	243
4.3.1	«Изотропный» классический материал .....	244
4.3.2	Кубическая сингония (3 независимых компоненты) .....	246
4.3.3	Трансверсальная изотропия (гексагональная сингония, 5 независимых компонент) .....	247
4.3.4	Тригональная (ромбоэдрическая) сингония (6 независимых компонент) .....	248
4.3.5	Тетрагональная сингония (6 независимых компонент) .....	249
4.3.6	Ромбическая сингония (ортотропия, 9 независимых компонент) .....	250
4.3.7	Моноклиная сингония .....	250
4.3.8	Триклинная сингония .....	251
4.4	Некоторые микрополярные материалы .....	252
4.4.1	Микрополярные материалы, символы анизотропии которых состоят из трех элементов .....	252
4.4.2	Ортотропный микрополярный материал .....	255
4.4.3	Классификация микрополярных линейно-упругих анизотропных материалов без центра симметрии .....	256
4.4.3.1	Символ анизотропии состоит из одного элемента .....	256
4.4.3.2	Символ анизотропии состоит из двух элементов .....	257
4.4.3.3	Символ анизотропии состоит из трех элементов .....	257
4.4.3.4	Символ анизотропии состоит из четырех элементов .....	257
4.4.3.5	Символ анизотропии состоит из 5 элементов .....	257
4.4.3.6	Символ анизотропии состоит из 6 элементов .....	257
4.4.3.7	Символ анизотропии состоит из 7 элементов .....	258
4.4.3.8	Символ анизотропии состоит из 8 элементов .....	258

4.4.3.9	Символ анизотропии состоит из 9 элементов .....	258
4.4.3.10	Символ анизотропии состоит из 10 элементов .....	258
4.4.3.11	Символ анизотропии состоит из 11 элементов .....	258
4.4.3.12	Символ анизотропии состоит из 12 элементов .....	258
4.4.3.13	Символ анизотропии состоит из 13 элементов .....	258
4.4.3.14	Символ анизотропии состоит из 14 элементов .....	258
4.4.3.15	Символ анизотропии состоит из 15 элементов .....	259
4.4.3.16	Символ анизотропии состоит из 16 элементов .....	259
4.4.3.17	Символ анизотропии состоит из 17 элементов .....	259
4.4.3.18	Символ анизотропии состоит из 18 элементов .....	259
4.4.4	Задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы лю- бого четного ранга.....	259
4.4.5	Обобщенная задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы любого четного ранга .....	260
4.4.6	Тензор кривизны Римана – Кристоффеля. О числе независимых условий совместности деформации .....	260
4.4.6.1	О задаче на собственные значения тензора четвертого ранга со специальными симметриями .....	260
4.4.7	О числе условий совместности деформации Сен-Венана.....	264
4.5	Условия совместности деформации в микрополярной теории.....	264
4.5.1	Условия совместности относительно тензоров деформаций и изгибов-кручений в микрополярной теории.....	264
4.5.2	Условия совместности деформации в двумерной микрополярной теории.....	266
4.5.3	Формулы для определения векторов перемещений и вращения в микрополярной теории упругости и антисимметричных частей тен- зоров деформаций и изгибов-кручений с помощью их симметричных частей .....	267
4.5.4	Интегро-дифференциальные уравнения движения микрополяр- ной теории упругости относительно симметричных частей тензоров напряжений и моментных напряжений. Условия совместности отно- сительно тензоров напряжений и моментных напряжений.....	268
4.5.5	Традиционные условия совместности относительно тензоров на- пряжений и моментных напряжений.....	269
4.5.6	Условия совместности относительно тензоров напряжений и мо- ментных напряжений с симметричными тензор-операторами .....	271
4.6	Традиционная и новая постановки краевой задачи относительно тен- зоров напряжений и моментных напряжений в микрополярной теории.....	271
4.6.1	Традиционная постановка краевой задачи относительно тензоров напряжений и моментных напряжений в микрополярной теории.....	271
4.6.1.1	Уравнения равновесия.....	272
4.6.1.2	Уравнения совместности относительно тензоров напряже- ний и моментных напряжений .....	272
4.6.1.3	Граничные условия .....	272
4.6.2	Новая постановка краевой задачи относительно тензоров напря- жений и моментных напряжений в микрополярной теории.....	272
4.6.2.1	Уравнения совместности относительно тензоров напряже- ний и моментных напряжений .....	272
4.6.2.2	Граничные условия .....	273

**ГЛАВА 5 Основные уравнения и определяющие соотношения теории тонких тел. Граничные и начальные условия. Постановки задач 274**

5.1	Различные представления уравнений движения механики деформируемого твердого тела при НПОТТ .....	275
5.1.1	Представления уравнений движения классической МДТТ при НПОТТ .....	275
5.1.2	Представления уравнений движения микрополярной МДТТ при НПОТТ .....	279
5.2	Различные формы записи определяющих соотношений классической и микрополярной теорий упругости .....	281
5.2.1	Определяющие соотношения для модели линейно-упругого тела .....	281
5.2.2	Представления закона Гука классической теории упругости при НПОТТ .....	289
5.2.3	Представления закона Гука микрополярной теории упругости при НПОТТ .....	291
5.2.3.1	Представления уравнения в перемещениях (Ламе) однородного изотропного материала при НПОТТ .....	293
5.2.4	Представление уравнения в перемещениях однородного изотропного материала для неизотермических процессов при НПОТТ .....	294
5.2.5	Представление уравнения в перемещениях и вращениях микрополярной теории упругости для неизотермических процессов при НПОТТ .....	294
5.2.5.1	Представление уравнения в перемещениях и вращениях микрополярной теории упругости однородного изотропного материала при неизотермических процессах .....	294
5.2.5.2	Представление уравнения в перемещениях и вращениях микрополярной теории упругости анизотропного материала при неизотермических процессах .....	295
5.2.6	Момент $k$ -го порядка произведения двух функций относительно системы полиномов Чебышёва второго рода .....	298
5.2.6.1	Представление уравнения притока тепла при НПОТТ .....	299
5.2.6.2	Различные представления закона теплопроводности Фурье при НПОТТ .....	300
5.3	Системы уравнений МДТТТ в моментах .....	301
5.3.1	Системы уравнений микрополярной МДТТТ в моментах контравариантных составляющих тензоров напряжений и моментных напряжений относительно полиномов Чебышёва второго рода .....	301
5.3.1.1	Система уравнений нулевого приближения ( $r = 0$ ) в моментах микрополярной МДТТТ .....	303
5.3.1.2	Система уравнений первого приближения ( $r = 1$ ) в моментах микрополярной МДТТТ .....	304
5.3.2	Системы уравнений в моментах относительно полиномов Лежандра микрополярной МДТТТ .....	305
5.3.2.1	Системы уравнений движения нулевого и первого приближений в моментах относительно системы полиномов Лежандра без учета граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях .....	307
5.3.2.2	Системы уравнений движения первого приближения в моментах относительно системы полиномов Лежандра с учетом граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях .....	307
5.3.3	Системы уравнений движения в моментах векторов перемещений и вращений .....	308

5.3.3.1	Системы уравнений в перемещениях (уравнений Ламе) нулевого и первого приближений в моментах .....	312
5.3.3.2	Системы уравнений в перемещениях нулевого и первого приближений в моментах при неизотермических процессах ..	313
5.3.3.3	Системы уравнений в перемещениях и вращениях нулевого и первого приближений в моментах при неизотермических процессах .....	315
5.3.3.4	Системы уравнений в перемещениях нулевого и первого приближений в моментах для однородного упругого анизотропного материала при неизотермических процессах ..	318
5.3.4	Системы уравнений притока тепла нулевого и первого приближений в моментах .....	319
5.3.5	Системы уравнений движения и притока тепла в моментах приближений $(0,N)$ и $(1,N)$ .....	322
5.3.6	Системы уравнений движения и притока тепла в моментах относительно системы полиномов Чебышёва приближений $(0,N)$ и $(1,N)$ ..	322
5.3.7	Системы уравнений движения и притока тепла в моментах относительно системы полиномов Лежандра приближений $(0,N)$ и $(1,N)$ ..	324
5.3.7.1	Системы уравнений движения в моментах относительно полиномов Лежандра без учета граничных условий на лицевых поверхностях приближений $(0,N)$ и $(1,N)$ .....	324
5.3.7.2	Системы уравнений движения в моментах относительно полиномов Лежандра с учетом граничных условий на лицевых поверхностях приближений $(0,N)$ и $(1,N)$ .....	324
5.4	Определяющие соотношения в моментах .....	325
5.4.1	ОС микрополярной теории упругости в моментах относительно системы ортонормированных полиномов Чебышёва второго рода .....	325
5.4.2	ОС микрополярной теории неоднородных тел в моментах .....	330
5.4.3	Представления закона теплопроводности Фурье в моментах .....	332
5.5	О граничных и начальных условиях .....	334
5.5.1	Граничные условия на лицевых поверхностях. Определение нормирующих функций кинематического и теплового содержаний .....	334
5.5.1.1	Определение нормирующих вектор-функций кинематического содержания для ОС физического содержания нулевого приближения .....	336
5.5.1.2	Определение нормирующих функций для ОС теплового содержания нулевого приближения .....	340
5.5.2	Граничные условия в моментах в теории тонких тел .....	341
5.5.2.1	Кинематические граничные условия в моментах .....	342
5.5.2.2	Граничные условия физического содержания в моментах .....	342
5.5.3	Граничные условия теплового содержания в моментах .....	348
5.5.3.1	Граничные условия первого рода в моментах .....	348
5.5.3.2	Граничные условия второго рода в моментах .....	349
5.5.3.3	Граничные условия третьего рода в моментах .....	349
5.5.4	Начальные условия в моментах .....	350
5.6	Классификация и постановка начально-краевых задач в теории тонких тел .....	351
5.6.1	Постановки задач микрополярной ТУТТ в моментах .....	352
5.7	Построение корректирующего слагаемого, позволяющего выполнение граничных условий на лицевых поверхностях при упрощенной редукции .....	354
5.7.1	Определение корректирующих слагаемых при постановках изотермических задач в перемещениях и вращениях .....	355

5.7.2	Определение корректирующих слагаемых при постановках задач относительно тензоров напряжений и моментных напряжений .....	363
5.8	Применение полуобратного метода Сен-Венана для удовлетворения граничных условий на лицевых поверхностях тонкого тела .....	366

## **ГЛАВА 6 Применение метода ортогональных полиномов к построению теории микрополярных упругих тонких тел с одним малым размером при произвольной базовой поверхности** **373**

6.1	Параметризации области тонкого тела. Представления некоторых дифференциальных операторов, системы уравнений движения и ОС .....	373
6.1.1	К параметризации области тонкого тела с одним малым размером при произвольной базовой поверхности .....	373
6.1.1.1	Векторное уравнение области тонкого тела .....	374
6.1.1.2	Двумерные семейства реперов (базисов) .....	375
6.1.1.3	Трёхмерные семейства реперов (базисов) .....	377
6.1.1.4	Представление единичного тензора второго ранга .....	381
6.1.1.5	Представления компонент переноса и компонент ЕТВР в виде степенных рядов относительно $x^3$ .....	381
6.1.2	Представления некоторых дифференциальных операторов .....	382
6.1.2.1	Представления градиента и дивергенции .....	382
6.1.2.2	Представления повторного градиента и лапласиана .....	383
6.1.3	Представления уравнений движения и притока тепла и определяющих соотношений микрополярной теории .....	383
6.1.3.1	Представления уравнений движения в микрополярной МДТТТ .....	383
6.1.3.2	Представление уравнения притока тепла в микрополярной МДТТТ .....	384
6.1.3.3	Представления законов Гука и теплопроводности Фурье .....	385
6.2	Рекуррентные соотношения систем полиномов Лежандра и Чебышёва. Моменты некоторых выражений. Различные представления системы уравнений движения и ОС в моментах. Постановки задач .....	386
6.2.1	Некоторые рекуррентные соотношения системы полиномов Лежандра и Чебышёва на сегменте $[-1, 1]$ .....	386
6.2.1.1	Основные рекуррентные соотношения .....	386
6.2.1.2	Дополнительные рекуррентные соотношения .....	387
6.2.2	Моменты некоторых выражений относительно полиномов Лежандра и Чебышёва первого и второго рода .....	392
6.2.2.1	Моменты некоторых выражений относительно системы полиномов Лежандра .....	393
6.2.2.2	Моменты некоторых выражений относительно системы полиномов Чебышёва второго рода .....	395
6.2.2.3	Моменты некоторых выражений относительно системы полиномов Чебышёва первого рода .....	397
6.2.3	Представления уравнений движения в моментах .....	398
6.2.3.1	Представления уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра .....	399
6.2.3.2	Представления системы уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Чебышёва второго рода .....	402
6.3	Представления ОС в моментах .....	403
6.4	Граничные и начальные условия в микрополярной МДТТТ .....	405
6.4.1	Граничные условия на лицевых поверхностях .....	405
6.4.2	Граничные условия в моментах в теории тонких тел .....	407
6.4.3	Кинематические граничные условия в моментах .....	407

6.4.4	Физические граничные условия в моментах .....	408
6.4.5	Граничные условия теплового содержания в моментах .....	410
6.4.5.1	Граничные условия первого рода в моментах .....	410
6.4.5.2	Граничные условия второго рода в моментах .....	410
6.4.5.3	Граничные условия третьего рода в моментах .....	410
6.4.6	Начальные условия в моментах .....	411
6.5	Постановки задач в моментах микрополярной термоупругости тонких тел .....	411
6.5.1	Постановка связанной динамической задачи в моментах приближения $(r, N)$ микрополярной ТУТТ .....	411
6.5.2	Постановка нестационарной температурной задачи в моментах приближения $(r, N)$ .....	412
6.5.3	Постановка несвязанной динамической задачи в моментах приближения $(r, N)$ микрополярной ТУТТ .....	412
<b>ГЛАВА 7 Применение метода ортогональных полиномов к математическому моделированию микрополярных упругих тонких тел с двумя малыми размерами</b> <span style="float: right;"><b>414</b></span>		
7.1	К параметризациям области тонкого тела с двумя малыми размерами. Выражения градиента и дивергенции тензора и уравнений движения. Рекуррентные соотношения полиномов Лежандра .....	414
7.1.1	К формулам Серре – Френе и параметризациям области тонкого тела с двумя малыми размерами .....	414
7.1.1.1	К классической параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами прямоугольного поперечного сечения .....	415
7.1.1.2	К новой параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами .....	417
7.1.1.3	К параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами при произвольной базовой линии .....	423
7.2	Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми размерами .....	425
7.2.1	Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения при классической параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами .....	425
7.2.2	Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения при новой параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами .....	426
7.2.3	Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения при параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами на основе произвольной базовой линии .....	427
7.3	Элементы теории моментов. Представления системы уравнений движения в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышёва второго рода при разных параметризациях области трехмерного тонкого тела с двумя малыми размерами .....	427
7.3.1	Элементы теории моментов .....	427
7.3.2	Различные представления системы уравнений движения в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышёва второго рода при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми размерами .....	431

7.3.2.1	Различные представления системы уравнений движения в моментах относительно полиномов Лежандра при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми размерами .....	433
7.3.2.2	О граничных условиях при параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами на основе произвольной базовой линии .....	436
7.3.2.3	О граничных условиях при новой параметризации области тонкого тела с двумя малыми размерами .....	445
7.3.2.4	Различные представления системы уравнений движения в моментах относительно полиномов Чебышёва второго рода при различных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми размерами .....	449
7.4	Представления закона Гука микрополярной теории упругости в моментах при разных параметризациях области тонкого тела с двумя малыми размерами .....	454
7.4.1	Метод нормированных моментов поля тензора напряжений .....	460
7.4.2	Частично упрощенный метод приведения бесконечной системы уравнений к конечной .....	465
7.4.3	Упрощенный метод приведения бесконечной системы уравнений к конечной .....	469
7.4.4	Постановки начально-краевых задач в теории тонких тел с двумя малыми размерами .....	474
7.4.4.1	Постановка связанной динамической задачи в моментах приближения $(r, M, N)$ микрополярной термоупругости тонких тел с двумя малыми размерами .....	474
7.4.4.2	Постановка нестационарной температурной задачи в моментах приближения $(r, M, N)$ микрополярной теории тонких тел с двумя малыми размерами .....	475
7.4.4.3	Постановка несвязанной динамической задачи в моментах приближения $(r, M, N)$ микрополярной ТУТТ с двумя малыми размерами .....	475
7.5	Метод разложения по одной координате .....	476
7.5.1	Представления системы уравнений движения в моментах при разложении по одной координате .....	476
7.5.2	Представление закона Гука в моментах при разложении по одной координате .....	479
7.5.3	Постановка начально-краевых задач ТУТТ с двумя малыми размерами в моментах при разложении искомых величин по одной координате .....	483

## **ГЛАВА 8 Построение теории микрополярных плоских тонких областей с помощью метода ортогональных полиномов**

		<b>486</b>
8.1	Новая параметризация плоской тонкой криволинейной области .....	486
8.2	Представления некоторых дифференциальных операторов, уравнений движения, закона Гука и граничных условий .....	495
8.2.1	Выражения градиента, повторного градиента, дивергенции и лапласиана тензора .....	495
8.2.2	Представления дифференциальных уравнений движения и закона Гука .....	496
8.2.3	О граничных условиях .....	497

8.3	Рекуррентные формулы для полиномов Лежандра. Некоторые формулы теории моментов. Выражения уравнений движения, ОС и граничных условий в моментах. Постановки начально-краевых задач .....	499
8.3.1	Рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра на сегменте $[0,1]$ .....	499
8.4	Представления дифференциальных уравнений движения, закона Гука и граничных условий в моментах относительно полиномов Лежандра .....	499
8.4.1	Представления дифференциальных уравнений движения в моментах относительно системы полиномов Лежандра .....	500
8.4.2	Закон Гука в моментах относительно полиномов Лежандра .....	501
8.4.3	Граничные условия физического содержания в моментах относительно системы полиномов Лежандра .....	502
8.4.4	Постановка динамических задач микрополярной теории упругости двумерных тонких областей в моментах .....	503

## **ГЛАВА 9 Применение метода ортогональных полиномов к построению теории многослойных тонких конструкций** **504**

9.1	Параметризация многослойной области трехмерного евклидова пространства с несколькими базовыми поверхностями .....	504
9.1.1	Векторное параметрическое уравнение слоя $\alpha$ и система векторных параметрических уравнений многослойной области .....	505
9.1.2	Двумерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризаций поверхности слоя $\alpha$ .....	506
9.1.3	Трехмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации области слоя $\alpha$ .....	506
9.1.4	Мультипликативные базисы .....	510
9.1.5	Деривационные формулы для мультипликативных базисов .....	511
9.1.6	Представление единичного тензора второго ранга .....	513
9.1.7	Представление изотропных тензоров четвертого ранга .....	514
9.1.8	О ковариантной производной от компонент тензоров .....	514
9.2	Связи между разными семействами параметризаций многослойной области .....	517
9.2.1	Связи между разными семействами мультипликативных базисов .....	517
9.2.2	Связи между разными семействами символов Кристоффеля .....	517
9.2.3	Связи между компонентами и ковариантными производными от компонент многоточечного тензора .....	518
9.3	О компонентах ЕТВР .....	519
9.4	Представления различных семейств символов Кристоффеля данного слоя через основные компоненты ЕТВР того же слоя .....	519
9.4.1	Выражение семейств символов Кристоффеля относительно базисов, связанных с лицевыми поверхностями слоя $\alpha$ , через основные компоненты ЕТВР этого слоя .....	520
9.4.2	Выражение семейства символов Кристоффеля относительно семейства базисов, связанного с эквидистантной поверхностью слоя $\alpha$ через основные компоненты ЕТВР .....	521
9.5	Системы уравнений движения в моментах многослойных тел с одним малым размером .....	522
9.5.1	Системы уравнений движения в моментах контравариантных составляющих тензоров напряжений и моментных напряжений относительно полиномов Чебышёва многослойных тел с одним малым размером .....	523

9.5.2	Системы уравнений движения в моментах контравариантных составляющих тензоров напряжений и моментных напряжений относительно полиномов Лежандра многослойных тел с одним малым размером.....	523
9.5.3	Системы уравнений в моментах вектора перемещений относительно систем полиномов Лежандра и Чебышёва многослойных тел с одним малым размером.....	524
9.5.4	Межслойные контактные условия .....	525
9.5.5	Условия спаянности (полного, идеального контакта).....	526
9.5.6	Условия при относительном перемещении точек контактирующих поверхностей слоев .....	526
9.5.6.1	Условия при относительном перемещении точек идеальных (гладких) контактирующих поверхностей слоев .....	527
9.5.6.2	Условия при относительном перемещении точек шероховатых контактирующих поверхностей слоев .....	529
9.5.6.3	Условия при частичном отслаивании контактирующих поверхностей слоев .....	531

<b>ГЛАВА 10</b>	<b>Вариационные принципы в микрополярной теории тонких тел при применении метода ортогональных полиномов</b>	<b>532</b>
10.1	О некоторых вариационных принципах в трехмерной микрополярной теории деформируемого твердого тела .....	532
10.1.1	Некоторые определения и интегральные соотношения.....	532
10.1.2	Вариационный принцип Лагранжа (теорема Лагранжа).....	537
10.1.3	Об условиях совместности в линейной микрополярной теории ...	539
10.1.4	Статическая (квазистатическая) задача в микрополярной МДТТ в напряжениях и моментных напряжениях .....	540
10.1.5	Вариационный принцип Кастильяно .....	540
10.1.6	Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера.....	542
10.2	О некоторых вариационных принципах в микрополярной теории однослойных тонких тел.....	548
10.2.1	Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в микрополярной теории тонких тел с одним малым размером при новой параметризации области тела .....	548
10.2.2	Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в микрополярной теории тонких тел с одним малым размером в моментах при новой параметризации области тела .....	549
10.3	О некоторых вариационных принципах в микрополярной теории многослойных тел.....	560
10.3.1	Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в микрополярной теории многослойных тел с одним малым размером при полном контакте слоев .....	560
10.3.2	Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в микрополярной теории многослойных тел с одним малым размером при наличии областей ослабленной адгезии .....	564
10.3.2.1	Модель типа скачка. Векторы межфазных (межслойных) перемещений и вращений. Векторы обобщенных межфазных сил и моментов .....	565
10.3.3	Обобщенный вариационный принцип типа Рейсснера в теории многослойных тел в моментах относительно систем ортогональных полиномов при наличии областей ослабленной адгезии .....	568

<b>ГЛАВА 11 Некоторые варианты уравнений микрополярных теорий оболочек и пластин. Сравнение различных теорий. Некоторые задачи</b>	<b>570</b>
11.1 К параметризации области оболочки.....	570
11.2 Уравнения микрополярной теории оболочек .....	572
11.2.1 Уравнения микрополярной теории оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов.....	575
11.2.2 Уравнения микрополярной теории оболочек класса TS в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов.....	576
11.2.3 Уравнения микрополярной теории призматических оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов.....	576
11.3 Вектор усилия и векторы моментных усилий. О граничных условиях микрополярной теории оболочек .....	577
11.4 Уравнения расширенной микрополярной теории оболочек .....	581
11.4.1 Уравнения расширенной микрополярной теории оболочек в контравариантных компонентах тензоров усилий и моментов .....	583
11.5 Некоторые вопросы классической моментной теории оболочек.....	583
11.5.1 Усилия и моменты. Тензор усилий и тензор моментов .....	583
11.5.2 Расщепляющая пара сил .....	593
11.5.3 Выражение компонент усилий и моментов через компоненты моментов вектора перемещений .....	594
11.5.4 Гипотеза о жесткости тонкого тела с одним малым размером в поперечном направлении (деформирование без обжатия).....	595
11.5.5 Система уравнений классической моментной теории оболочек в усилиях и моментах .....	597
11.5.6 Система уравнений классической моментной теории оболочек относительно компонент моментов нулевого и первого порядков вектора перемещений .....	598
11.5.7 Система уравнений классической моментной теории пластин относительно компонент моментов нулевого и первого порядков вектора перемещений .....	598
11.5.8 Уравнения мембранной (безмоментной) теории оболочек .....	599
11.6 Квазистатическая задача классической теории упругости в перемещениях .....	599
11.6.1 Квазистатическая задача теории призматических тел постоянной толщины в перемещениях и моментах вектора перемещений .....	600
11.6.2 Уравнения статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра .....	600
11.6.2.1 Система уравнений приближения порядка $N$ статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра без учета граничных условий на лицевых поверхностях .....	603
11.6.2.2 Системы уравнений нескольких первых приближений статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра без учета граничных условий на лицевых поверхностях .....	603

11.6.2.3	Система уравнений приближения порядка $N$ статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Лежандра с учетом статических граничных условий на лицевых поверхностях .....	605
11.6.2.4	Система уравнений приближения порядка $N$ статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в моментах вектора перемещений относительно системы полиномов Чебышёва второго рода при новой параметризации области рассматриваемого тела .....	606
11.6.3	Статическая (квазистатическая) задача микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях .....	607
11.6.4	Статическая (квазистатическая) задача микрополярной теории призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений .....	609
11.6.5	Статическая (квазистатическая) задача микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений при новой параметризации .....	612
11.6.6	Статическая (квазистатическая) задача микрополярной теории призматических тел с двумя малыми размерами в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений .....	613
11.6.7	О граничных условиях физического содержания в теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами .....	617
11.7	Постановки первых краевых задач пятого приближения для классической и микрополярной упругих тонких прямоугольных областей .....	619
11.7.1	Постановка первой краевой задачи пятого приближения для классической упругой тонкой прямоугольной области .....	619
11.7.2	Постановка первой краевой задачи пятого приближения для микрополярной упругой прямоугольной области .....	620
11.8	Численная реализация некоторых задач .....	622
11.8.1	Задача для равномерно нагруженной с одной стороны двумерной области .....	622
11.8.2	Задача для равномерно нагруженной с двух сторон двумерной области .....	626
11.8.3	Задача, когда на лицевые линии действуют уравновешенные поперечные сосредоточенные силы .....	627
11.8.4	Задача, когда на лицевые линии действуют сосредоточенные касательные силы .....	628
11.8.5	Задача для двухслойной двумерной области .....	628
	Список литературы .....	631