

## Содержание

Предисловие ко второму изданию . . . . .	13
От редактора . . . . .	15
Предисловие к первому изданию . . . . .	16
Перечень некоторых обозначений . . . . .	19

### Функции алгебры логики

<i>Лекция № 1.</i> Булевы функции. Задание функций таблицами. Существенные и несущественные переменные. Равенство функций. Формулы. Реализация функций формулами. Элементарные функции. Эквивалентность формул. Примеры эквивалентных формул. Теорема о разложении функции по множеству переменных. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма . . . . .	20
<i>Лекция № 2.</i> Полные системы. Достаточное условие полноты. Примеры полных систем. Полиномы Жегалкина. Представление функций полиномами. Замыкание системы функций. Замкнутые классы. Линейные функции. Лемма о нелинейной функции. Классы $T_0$ и $T_1$ . Самодвойственные функции. Лемма о несамодвойственной функции . . . . .	32
<i>Лекция № 3.</i> Монотонные функции. Лемма о немонотонной функции. Теорема о функциональной полноте. Предполные классы. Теорема о предполных классах в $P_2$ . Формулировки основных теорем Поста . . . . .	41

### Функции $k$ -значной логики

<i>Лекция № 4.</i> Функции многозначной логики. Основные понятия. Элементарные функции. Полные системы. Примеры полных систем. Замкнутые классы. Предполные классы. Алгоритм распознавания полноты конечных систем функций в $P_k$ . . . . .	48
--	----

<i>Лекция № 5.</i> Существенные функции. Лемма о трех наборах. Лемма о квадрате. Теорема Слупецкого. Теорема Яблонского . . . . .	58
<i>Лекция № 6.</i> Функции Шеффера. Критерий шефферовости функций. Особенности функций $k$ -значной логики, $k \geq 3$ . Представление функций полиномами. Пример замкнутого класса, не имеющего базиса. Пример замкнутого класса со счетным базисом. Мощностные семейства замкнутых классов. Классы сохранения множеств функций и их свойства. Теорема Кузнецова о функциональной полноте . . . . .	67

### Логические схемы

<i>Лекция № 7.</i> Графы. Основные понятия. Правильная геометрическая реализация в трехмерном пространстве. Изоморфизм графов. Гомеоморфизм графов. Графы $K_5$ и $K_{3,3}$ . Деревья. Ориентированные графы. Лемма о нумерации вершин . . . . .	77
<i>Лекция № 8.</i> Схемы из функциональных элементов. Реализация функций схемами. Реализация системы конъюнкций. Функция $L(n)$ . Простейшие методы синтеза. Теорема Шеннона . . . . .	85
<i>Лекция № 9.</i> Мощностной метод получения нижних оценок. Верхняя оценка числа схем. Порядок функции $L(n)$ . Асимптотически оптимальный метод синтеза. Выбор параметров . . . . .	96
<i>Лекция № 10.</i> Формулировка теоремы об асимптотическом поведении функции $L(n)$ . Деревья и их число. Верхняя оценка числа схем . . . . .	106
<i>Лекция № 11.</i> Нижняя оценка для функции $L(n)$ . Асимптотика функции $L(n)$ . Минимальные схемы*. Второе доказательство теоремы о нижней оценке для функции $L(n)$ * . . . . .	114

<i>Лекция № 12.</i> Контактные схемы. Функция проводимости. Функция $L_k(n)$ . Простейшие методы синтеза. Контактное дерево. Метод каскадов. Верхняя оценка для функции $L_k(n)$ . Верхняя оценка числа двухполюсных контактных схем. Порядок функции $L_k(n)$ . Метод каскадов для схем из функциональных элементов. Верхняя оценка сложности схем, построенных методом каскадов . . . . .	121
---	-----

### Конечные автоматы

<i>Лекция № 13.</i> Детерминированные функции. Информационные деревья. Эквивалентность деревьев. Ограниченно-детерминированные функции. Диаграммы переходов. Канонические уравнения. Конечные автоматы. Автоматные функции. Лемма о преобразовании периодических последовательностей . . . . .	136
--	-----

<i>Лекция № 14.</i> Схемы их функциональных элементов в произвольном базисе. Реализация функций схемами. Автоматы с $n$ входами. Схемы из автоматных элементов. Теорема об отсутствии полных конечных систем автоматных функций. Схемы из функциональных элементов и элементов задержки. Реализация автоматных функций схемами из функциональных элементов и элементов задержки . . . . .	148
---	-----

<i>Лекция № 15.</i> Эксперименты с автоматами. Словарные автоматные функции. Эквивалентные и $k$ -эквивалентные состояния. Теорема Мура. Алгоритм нахождения эквивалентных состояний*. Эквивалентность автоматов. Теорема об эквивалентности состояний автоматов. Сокращенный автомат* . . . . .	165
--	-----

## Алгоритмы и вычислимые функции

- Лекция № 16.* Машины Тьюринга. Основные понятия. Вычислимые функции. Пример машины, удваивающей слова. Тезис Тьюринга. Кодирование машин. Проблема самоприменимости. Алгоритмическая неразрешимость проблемы самоприменимости. Произведение машин. Проблема применимости. Алгоритмическая неразрешимость проблемы применимости . . . . . 180
- Лекция № 17.* Кодирование конфигураций. Проблема переводимости. Алгоритмическая неразрешимость проблемы переводимости. Ассоциативные исчисления. Проблема эквивалентности слов в ассоциативных исчислениях. Алгоритмическая неразрешимость проблемы эквивалентности для ассоциативных исчислений . . . . . 194
- Лекция № 18.* Нормальные алгорифмы. Схема нормального алгорифма. Частичные словарные функции. Вычисление словарных функций при помощи нормальных алгорифмов. Нормально вычислимые числовые функции. Принцип нормализации. Частичные числовые функции. Простейшие функции. Операции суперпозиции и примитивной рекурсии. Примитивно рекурсивные функции. Операция минимизации. Частично рекурсивные функции. Тезис Черча 207
- Лекция № 19.* Универсальные машины Тьюринга. Моделирование работы машин Тьюринга\*. Проблема распознавания нетривиальных инвариантных свойств. Формулировка теоремы Райса. Примеры. Теорема о неподвижной точке\*. Доказательство теоремы Райса\* . . . . . 217

## Исчисление высказываний

- Лекция № 20.* Логика высказываний. Высказывания. Логические связки. Сложные высказывания. Тождественно истинные высказывания. Исчисление высказываний. Аксиомы. Правило вывода. Вывод; выводимые формулы. Вывод из системы гипотез. Простые свойства выводимости. Вывод формулы  $A \rightarrow A$ . Теорема о дедукции. Вспомогательные леммы о выводимости формул. Тождественная истинность выводимых формул . . . . . 227
- Лекция № 21.* Непротиворечивость исчисления высказываний. Лемма о выводимости формулы  $A^c$ ,  $c \in \{0, 1\}$ . Теорема о полноте. Противоречивость исчисления, построенного в результате добавления к аксиомам новой схемы. Независимость схем аксиом. Теорема о независимости схем аксиом исчисления высказываний . . . . . 242

## Логика предикатов

- Лекция № 22.* Предикаты. Логические операции над предикатами. Теорема о полноте системы одноместных предикатов, заданных на конечном множестве. Кванторы. Связь между логическими и теоретико-множественными операциями. Модель. Сигнатура модели. Формула в модели; свободные и связанные переменные; значения формулы в модели. Истинность формул в модели. Эквивалентность формул в модели, на множестве. Эквивалентные формулы . . . 254
- Лекция № 23.* Правила эквивалентных преобразований. Приведенные формулы. Теорема о существовании приведенной формулы, эквивалентной заданной. Нормальная форма. Приведение формул к нормальному виду. Истинность формул на множестве. Тождественно истинные формулы . . . . . 264

<i>Лекция № 24.</i> Задача установления тождественной истинности формул, содержащих только одноместные предикаты. Гомоморфизм моделей. Лемма о значениях формул в гомоморфных моделях. Теорема о существовании модели, гомоморфной заданной. Необходимые и достаточные условия тождественной истинности формул. Алгоритм проверки тождественной истинности формул . . . . .	272
---	-----

### **Исчисление предикатов**

<i>Лекция № 25.</i> Исчисление предикатов. Аксиомы. Правила вывода. Вывод; выводимые формулы. Специальный вывод из системы гипотез. Теорема о дедукции (ослабленный вариант). Тождественная истинность выводимых формул. Формулировка теоремы Геделя о полноте. Примеры выводимых формул . . .	279
<i>Приложение.</i> А. Б. Угольников. О замкнутых классах Поста. . . . .	288