

Оглавление

0.1	Краткая история возникновения аналитической геометрии	13
1	Векторная алгебра	16
1.1	Определение вектора	16
1.2	Сложение векторов, умножение вектора на число, свойства этих операций	21
1.3	Векторы на прямой. Лемма Шаля	23
1.4	Линейная зависимость векторов	24
1.5	Геометрический смысл линейной зависимости	27
1.6	Базисы и координаты	29
1.7	Скалярное произведение и его свойства	33
1.7.1	Ортогональные проекции	33
1.7.2	Угол между векторами	33
1.7.3	Определение скалярного произведения	34
1.7.4	Свойства скалярного произведения	34
1.7.5	Неравенство Коши – Буняковского	35
1.7.6	Скалярное произведение в координатах	36
1.8	Системы координат	37
1.8.1	Аффинные координаты	37
1.8.2	Прямоугольные координаты	38
1.8.3	Полярные координаты на плоскости	39
1.8.4	Сферические координаты в пространстве	40
1.9	Деление отрезка в данном отношении	41
1.10	Матрицы и определители	43
1.10.1	Матрицы и действия с ними	43
1.10.2	Определители и их свойства	45

1.10.3	Обратная матрица	47
1.10.4	Теорема о ранге матрицы	47
1.10.5	Системы линейных уравнений	47
1.11	Переход от одного базиса к другому	49
1.11.1	Матрица перехода	49
1.11.2	Преобразование координат векторов	51
1.12	Переход от одной аффинной системы координат к другой аффинной системе координат	52
1.13	Ортогональные матрицы	53
1.13.1	Ортогональные матрицы второго порядка	54
1.14	Преобразования прямоугольных координат	55
1.14.1	Прямоугольные координаты с общим началом на плоскости	57
1.15	Ориентация	58
1.15.1	Одинаково ориентированные базисы	58
1.15.2	Ориентированная длина и ее свойства	60
1.15.3	Ориентированная площадь параллелограмма и ее свойства	60
1.15.4	Ориентированная площадь треугольника	62
1.15.5	Угол от первого вектора до второго	63
1.15.6	Ориентированный объем параллелепипеда, его свойства	63
1.16	Векторное и смешанное произведения	66
1.16.1	Векторное и смешанное произведения в прямоугольных координатах	68
1.17	Векторные уравнения	70
1.17.1	Взаимное расположение двух прямых в пространстве	71
1.18	Вычисление расстояний в пространстве через операции над векторами	71
2	Линии первого порядка	74
2.1	Уравнения прямой на плоскости	74
2.2	Взаимное расположение двух прямых, заданных общими уравнениями	76
2.3	Пучок прямых	79
2.4	Полуплоскости	83
2.5	Угол между прямыми и угол от первой прямой до второй	84
2.5.1	Угол между прямыми	84

2.5.2	Угол от первой прямой до второй	85
2.6	Расстояние от точки до прямой, заданной общим уравнением	86
3	Поверхности первого порядка	89
3.1	Уравнения плоскости	89
3.2	Взаимное расположение двух плоскостей	92
3.3	Пучок плоскостей	94
3.4	Полупространства	97
3.5	Прямая в пространстве	99
3.5.1	Параметрические и канонические уравнения	99
3.5.2	Прямая как пересечение двух плоскостей	100
3.6	Угол между плоскостями	101
3.7	Угол между прямой и плоскостью	101
3.8	Расстояние от точки до плоскости, заданной общим уравнением	102
4	Линии второго порядка	104
4.1	Линии второго порядка и их матрицы	104
4.2	Ортогональные инварианты линий второго порядка	107
4.3	Преобразование уравнения линии второго порядка при повороте осей координат	109
4.4	Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду	112
4.5	Определение канонического уравнения по ортогональным инвариантам	115
4.5.1	Центральный случай, $\delta \neq 0$	116
4.5.2	Параболический случай, $\delta = 0$	117
4.5.3	Семиинвариант линии второго порядка	118
4.5.4	Пара параллельных или совпадающих прямых	120
4.6	Центры линий второго порядка	121
4.6.1	Центры симметрии	123
4.6.2	Классификация по количеству центров	125
4.7	Директориальное свойство параболы, эллипса и гиперболы	126
4.8	Фокальное свойство эллипса и гиперболы	133
4.8.1	Фокальные радиусы	133
4.8.2	Фокальное свойство	134
4.9	Фокальный параметр	137

4.10	Уравнение при вершине	138
4.11	Эллипс, гипербола и парабола в полярных координатах	141
4.12	Пересечение линии второго порядка с прямой	145
4.12.1	Асимптотические направления	145
4.13	Асимптоты. Уравнение гиперболы в асимптотах	149
4.13.1	Асимптоты	149
4.13.2	Уравнение гиперболы в асимптотах	151
4.13.3	Асимптоты в смысле математического анализа	151
4.14	Диаметры линий второго порядка	152
4.15	Сопряженные направления. Особые направления	155
4.15.1	Сопряженные направления	155
4.15.2	Особые направления	156
4.16	Диаметры центральных линий. Сопряженные диаметры	157
4.17	Главные направления	160
4.18	Главные диаметры	161
4.18.1	Оси симметрии и главные диаметры	163
4.19	Ось и вершина параболы, выбор угла	164
4.20	Решение задач на определение вида и расположения линий второго порядка	168
4.21	Касательные к линиям второго порядка	175
4.21.1	Касательная и диаметр, проведенный в точку касания	179
4.21.2	Касательная и производная	180
4.22	Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы	181
4.23	Теоремы единственности	184
4.24	Пучок линий второго порядка	186
4.25	Определение и свойства аффинных преобразований	189
4.26	Аналитическая запись аффинного преобразования	193
4.27	Движения и изометрии	195
4.28	Классификация движений прямой и плоскости. Теорема Шаля	198
4.28.1	Классификация движений прямой	198
4.28.2	Классификация движений плоскости	199
4.29	Аффинная классификация линий второго порядка	202

4.30	Основная теорема об аффинных преобразованиях плоскости	207
5	Поверхности второго порядка	209
5.1	Поверхности второго порядка и их матрицы	209
5.2	Характеристический многочлен поверхности второго порядка	212
5.3	Цилиндрические поверхности	213
5.4	Канонические уравнения поверхностей второго порядка	215
5.5	Прямолинейные образующие однополостного гиперboloида	217
5.6	Прямолинейные образующие гиперболического параболоида	220
5.7	Конические сечения. Теорема Аполлония	221
5.8	Сечения эллипсоида	227
5.9	Сечения однополостного гиперboloида	229
5.10	Сечения двуполостного гиперboloида	232
5.11	Сечения гиперболического параболоида	234
5.12	Сечения эллиптического параболоида	237
5.13	Эскизы поверхностей второго порядка	239
5.14	Центры поверхностей второго порядка	241
	5.14.1 Центры симметрии	243
5.15	Аффинная классификация поверхностей второго порядка	248
6	Элементы проективной геометрии	252
6.1	Модели проективной плоскости. Перспективное соответствие	253
	6.1.1 Общее определение проективной плоскости	253
	6.1.2 Пополненная плоскость	254
	6.1.3 Связка	255
	6.1.4 Изоморфизм проективных плоскостей. Перспективное соответствие	255
6.2	Однородные координаты	256
	6.2.1 Однородные координаты в связке	256
	6.2.2 Однородные координаты на плоскости	257
	6.2.3 Связь однородных координат на плоскости с однородными координатами в связке	258
	6.2.4 Арифметическая модель проективной плоскости	260

6.3	Принцип двойственности.	
	Теорема Дезарга	260
6.3.1	Теорема Дезарга	261
6.4	Проективные системы координат	263
6.4.1	Проективная система координат в связке	263
6.4.2	Переход от одной проективной системы координат к другой	265
6.5	Проективные преобразования	267
6.6	Линии второго порядка в однородных координатах	269
6.7	Проективная классификация линий второго порядка	271
6.8	Проективно-аффинные преобразования	274
6.9	Проективно-аффинная классификация линий второго порядка	276
6.10	Историческое развитие взглядов на геометрию	277
6.11	Проективная прямая. Двойное отношение	278
6.11.1	Однородные координаты в пучке	279
6.11.2	Однородные координаты на прямой	279
6.11.3	Связь однородных координат на прямой с однородными координатами в пучке	279
6.11.4	Проективная система координат на проективной прямой	280
6.11.5	Переход от одной проективной системы координат к другой	281
6.11.6	Проективные преобразования проективной прямой	282
6.11.7	Простое отношение	283
6.11.8	Двойное отношение	284