

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Некоторые часто встречающиеся обозначения	12
Глава 1. Простейшие классические вариационные задачи	13
§ 1. Уравнения экстремалей функционалов	13
§ 2. Геометрия экстремалей	17
2.1. Нульмерный и одномерный случаи (17). 2.2. Некоторые примеры простейших многомерных функционалов (18). 2.3. Классическая задача Плато в размерности 2 (26). 2.4. Вторая фундаментальная форма риманова подмногообразия (27). 2.5. Локальная минимальность (30). 2.6. Первые примеры глобально минимальных поверхностей (33).	
Глава 2. Многомерные вариационные задачи и экстраординарные теории (ко)гомологий	38
§ 3. Многомерная задача Плато	38
3.1. Классические постановки (о нахождении абсолютного минимума) (38). 3.2. Классические постановки (о нахождении относительного минимума) (40). 3.3. Трудности, возникающие при минимизации функционала объема vol_k при $k > 2$. Появление неустранимых стратов малых размерностей (40). 3.4. Постановки задачи Плато на языке обычных гомологий (43). 3.5. Классическая многомерная задача Плато (абсолютный минимум) и язык теории бордизмов (45). 3.6. Теория бордизмов — экстраординарная теория гомологий (51). 3.7. Формулировка решения спектральной задачи Плато (существование минимальной «спектральной поверхности») (53).	
§ 4. Экстраординарные теории (ко)гомологий, определенные на «поверхностях с особенностями»	54
4.1. Характеристические свойства теорий (ко)гомологий (55). 4.2. Экстраординарные теории (ко)гомологий, определенные на конечных клеточных комплексах (56). 4.3. Построение экстраординарных теорий (ко)гомологий, определенных на «поверхностях с особенностями» (на компактах) (60). 4.4. Проверка характеристических свойств построенных теорий (61). 4.5. Дополнительные свойства экстраординарных спектральных теорий (63). 4.6. Приведенные группы (ко)гомологий на «поверхностях с особенностями» (64).	
§ 5. Кограница и граница пары пространств (X, A)	65
5.1. Кограница пары (X, A) (65). 5.2. Граница пары (X, A) (66).	
§ 6. Определение классов допустимых вариаций в терминах (ко)границы пары (X, A)	67
6.1. Вариационные классы $h(A, L, L')$ и $h(A, \tilde{L})$ (67). 6.2. Устойчивость вариационных классов (68).	
§ 7. Решение задачи о нахождении глобально минимальной поверхности (абсолютного минимума) в вариационных классах $h(A, \tilde{L}, L')$ и $h(A, \tilde{L})$	69
7.1. Постановка задачи (69). 7.2. Основная теорема существования глобально минимальных поверхностей (71). 7.3. Краткая схема доказательства теоремы существования (74).	
§ 8. Комментарий	76

Глава 3. Вычисление в явном виде наименьших объемов (абсолютный минимум) топологически нетривиальных минимальных поверхностей	78
§ 9. Функции исчерпания и минимальные поверхности	78
9.1. Некоторые классические задачи (78). 9.2. Бордизмы и функции исчерпания (80). 9.3. ГМ-поверхности (81). 9.4. Постановка задачи об оценке снизу функции объема минимальной поверхности (82).	
§ 10. Определение и простейшие свойства коэффициента деформации векторного поля	83
§ 11. Формулировка основной теоремы об оценке снизу функции объема	85
11.1. Функции взаимодействия глобально минимальной поверхности с фронтом волны (85). 11.2. Формулировка основной теоремы об оценке объема (86).	
§ 12. Доказательство основной теоремы об оценке объема	87
§ 13. Некоторые геометрические следствия	93
13.1. О наименьшем объеме глобально минимальных поверхностей, проходящих через центр шара в евклидовом пространстве (93). 13.2. О наименьшем объеме глобально минимальных поверхностей, проходящих через фиксированную точку в многообразии (95). 13.3. О наименьшем объеме глобально минимальных поверхностей, образованных интегральными траекториями поля v (96).	
§ 14. Дефект риманова компактного замкнутого многообразия, геодезический дефект и наименьшие объемы глобально минимальных поверхностей реализующего типа	97
14.1. Определение дефекта многообразия (97). 14.2. Теорема о связи дефекта с наименьшими объемами поверхностей реализующего типа (100). 14.3. Доказательство гипотезы Райффенберга о существовании универсальной оценки сверху на «сложность» особых точек минимальных поверхностей реализующего типа (103).	
§ 15. Некоторые топологические следствия. Конкретные серии примеров глобально минимальных поверхностей нетривиального топологического типа	105
15.1. Глобально минимальные поверхности, реализующие нетривиальные (ко)циклы в симметрических пространствах (105). 15.2. Компактные симметрические пространства и явный вид геодезического диффеоморфизма (107). 15.3. Вычисление в явном виде коэффициента деформации радиального векторного поля на симметрических пространствах (110). 15.4. Явная формула для геодезического дефекта симметрического пространства (118). 15.5. Глобально минимальные поверхности наименьшего объема $(\text{vol}_k X_0 = \Omega_k^k)$ в симметрических пространствах являются симметрическими пространствами ранга 1 (119). 15.6. Доказательство теоремы классификации поверхностей наименьшего объема в некоторых классических симметрических пространствах (121).	
Глава 4. Локально минимальные замкнутые поверхности, реализующие нетривиальные (ко)циклы и элементы гомотопических групп симметрических пространств	129
§ 16. Постановка задачи. Вполне геодезические подмногообразия в группах Ли	129
§ 17. Сводка необходимых результатов о топологической структуре компактных групп Ли и симметрических пространств	130
17.1. Алгебры когомологий компактных групп Ли (130). 17.2. Подгруппы, вполне негомологичные нулю (132). 17.3. Циклы Понтрягина в компактных группах Ли (136). 17.4. Необходимые сведения о симметрических пространствах (137).	
§ 18. Группа Ли, содержащая вполне геодезическое подмногообразие, автоматически содержит группу изометрий этого подмногообразия	142
§ 19. Редукция задачи об описании (ко)циклов, реализуемых вполне геодезическими подмногообразиями, к задаче описания (ко)гомологических свойств картановских моделей	145

§ 20. Теорема классификации, описывающая вполне геодезические подмногообразия, реализующие нетривиальные (ко)циклы в (ко)гомологиях компактных групп Ли	148
20.1. Формулировка теоремы классификации (148). 20.2. Случай пространств типа II (149). 20.3. Случай пространств типа I. (Ко)гомологически тривиальные картановские модели. Свойства отображения возведения в квадрат симметрического пространства (150). 20.4. Случай пространств типа I. Пространства $SU(k)/SO(k)$ (153). 20.5. Случай пространств типа I. Пространства $SU(2m)/Sp(m)$ (158). 20.6. Случай пространств типа I. Пространства $S^{2l-1} = SO(2l)/SO(2l-1)$. Вычисление в явном виде коциклов, реализуемых вполне геодезическими подмногообразиями типа I (160). 20.7. Случай пространств типа I. Пространство E_6/F_4 (162).	
§ 21. Теорема классификации, описывающая коциклы в когомологиях групп Ли, реализующиеся вполне геодезическими сферами	168
21.1. Формулировка теоремы классификации (168). 21.2. Вполне геодезические сферы, реализующие периодичность Ботта (170). 21.3. Реализация элементов гомотопических групп компактных групп Ли вполне геодезическими сферами (172). 21.4. Необходимые сведения о спинорных и полуспинорных представлениях ортогональной группы (174). 21.5. Спинорное представление ортогональной группы $SO(8)$ и группа автоморфизмов чисел Кэли (176). 21.6. Описание вполне геодезических сфер, реализующих нетривиальные (ко)циклы в когомологиях простых групп Ли. Случай группы $SU(n)$ (180). 21.7. Случай групп $SO(n)$ и $Sp(2n)$ (181).	
§ 22. Теорема классификации, описывающая элементы гомотопических групп симметрических пространств типа I, реализующиеся вполне геодезическими сферами	185
22.1. Формулировка теоремы классификации (185). 22.2. Доказательство теоремы классификации. Связь между числом линейно независимых полей на сферах и числом элементов гомотопических групп, реализуемых вполне геодезическими сферами (486).	
Глава 5. Вариационные методы в некоторых топологических задачах	194
§ 23. Периодичность Ботта с точки зрения многомерного функционала Дирихле	194
23.1. Явное описание изоморфизма периодичности Ботта для унитарной группы (194). 23.2. Унитарная периодичность и одномерные функционалы (196). 23.3. Теорема периодичности для унитарной группы основана на двумерных экстремалах функционала Дирихле (196). 23.4. Теорема периодичности для ортогональной группы основана на восьмимерных экстремалах функционала Дирихле (202).	
§ 24. Три геометрические задачи вариационного исчисления	207
24.1. Минимальные конусы и особые точки минимальных поверхностей (207). 24.2. Эквивариантная задача Плато (211). 24.3. Представление эквивариантных особенностей в качестве особых точек замкнутых минимальных поверхностей, вложенных в симметрические пространства (227). 24.4. О существовании нелинейных функций, графики которых в евклидовом пространстве являются минимальными поверхностями (232). 24.5. Гармонические отображения сфер в нетривиальных гомотопических классах (234).	
Глава 6. Построение глобально минимальных поверхностей в вариационных классах $h(A, L, L')$, $h(A, \tilde{L})$	251
§ 25. Когомологический случай. Вычисление кограницы пары $(X, A) = \bigcup_r (X_r, A_r)$ через кограницы пар (X_r, A_r)	251
§ 26. Гомологический случай. Вычисление границы пары $(X, A) = \bigcup_r (X_r, A_r)$ через границы пар (X_r, A_r)	260
§ 27. Замкнутость, инвариантность и устойчивость вариационных классов	266
27.1. S-перестройки поверхностей в римановом многообразии (266). 27.2. Замкнутость вариационных классов относительно предельных переходов (267). 27.3. Инвариантность вариационных классов относительно S-перестроек поверхностей (271). 27.4. Устойчивость вариационных классов (274).	
§ 28. Общее изопериметрическое неравенство	279
28.1. Выбор специальной системы координат (279). 28.2. Симплициальные точки поверхностей (280). 28.3. Изопериметрическое неравенство (281).	

§ 29. Минимизирующий процесс в вариационных классах $h(A, L, L')$, $h(A, \check{L})$	290
29.1. Минимизирующая последовательность поверхностей. Функции плотности, связанные с поверхностями (290). 29.2. Краткая схема построения минимизирующего процесса (291). 29.3. Конструктивное построение минимизирующего процесса и доказательство его сходимости. Первый шаг (294). 29.4. Второй и последующие шаги в построении минимизирующего процесса (303). 29.5. Теорема о совпадении наименьшего стратифицированного объема с наименьшим λ -вектором в вариационном классе (307).	
§ 30. Свойства функций плотности. Минимальность каждого страта поверхности, полученной в процессе минимизации	308
30.1. Значение функции плотности всегда не меньше единицы на каждом страте и равно единице только в регулярных точках (308). 30.2. Каждый страт является гладким минимальным подмногообразием, за исключением, быть может, множества особых точек меры нуль (318).	
§ 31. Доказательство глобальной минимальности построенных стратифицированных поверхностей	319
31.1. Доказательство основной теоремы существования глобально минимальной поверхности (319). 31.2. Доказательство теоремы о совпадении наименьшего стратифицированного объема с наименьшим λ -вектором в вариационном классе (324).	
§ 32. Фундаментальные (ко)циклы глобально минимальных поверхностей. Точная реализация и точная заклейка	324
32.1. Теорема о фундаментальных (ко)циклах (324). 32.2. Точная минимальная реализация и точная минимальная заклейка (328). 32.3. Минимальные поверхности с границей, гомеоморфной сфере (330).	
Литература	336
Предметный указатель	341