

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----------|
| Предисловие | 11 |
| Глава 1. Метрические и топологические пространства | 13 |
| § 1.1. Простейшие понятия теории множеств | 13 |
| § 1.1.1. Основные свойства множеств. Отображения. Прямое произведение множеств | 13 |
| § 1.1.2. Мощность множества | 18 |
| § 1.1.3. Частичная упорядоченность. Упорядоченность | 21 |
| § 1.1.4. Сравнения мощностей | 22 |
| § 1.2. Метрические пространства | 24 |
| § 1.2.1. Определение метрического пространства. Примеры | 24 |
| § 1.2.2. Открытые и замкнутые множества | 28 |
| § 1.2.3. Всюду плотные и совершенные множества | 31 |
| § 1.2.4. Сходимость. Непрерывные отображения | 33 |
| § 1.2.5. Компактность | 35 |
| § 1.2.6. База топологии пространства | 37 |
| <i>Задачи</i> | 40 |
| § 1.3. Свойства метрических пространств | 41 |
| § 1.3.1. Пополнение метрических пространств | 43 |
| § 1.3.2. Основные теоремы в полных метрических пространствах | 45 |
| § 1.3.3. Компактность в метрических пространствах, ε -сеть . | 51 |
| <i>Задачи</i> | 53 |
| § 1.4. Топологические пространства | 54 |
| § 1.4.1. Определение топологического пространства. Хаусдорфово топологическое пространство. Примеры | 55 |
| § 1.4.2. Замечание о топологических пространствах | 58 |
| <i>Задачи</i> | 60 |
| § 1.5. Свойства топологических пространств | 61 |
| § 1.5.1. Регулярные, вполне регулярные и нормальные пространства | 62 |
| § 1.5.2. Регулярные пространства со счётной базой. Теорема Тихонова | 64 |
| § 1.5.3. Компактные хаусдорфовы и нормальные пространства | 65 |
| § 1.5.4. Метрические и топологические пространства | 65 |
| § 1.5.5. Тихоновские произведения топологических пространств | 66 |
| § 1.5.6. Теорема Стоуна — Вейерштрасса | 68 |
| <i>Задачи</i> | 70 |

| | |
|---|------------|
| ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА | 71 |
| § 2.1. Линейные топологические пространства | 71 |
| § 2.1.1. Группа, кольцо, поле, линейное пространство | 71 |
| § 2.1.2. Линейные операторы. Пространство операторов | 77 |
| § 2.1.3. Банаховы пространства | 77 |
| § 2.1.4. Выпуклые множества, функционал Минковского, полуnormы | 79 |
| § 2.1.5. Линейные топологические пространства. Теорема А. Н. Колмогорова | 84 |
| § 2.1.6. Счётно-нормированные пространства | 89 |
| <i>Задачи</i> | 91 |
| § 2.2. Линейные ограниченные операторы в банаховых и F -пространствах. Основные принципы функционального анализа | 93 |
| § 2.2.1. Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах. Банахово пространство операторов. Понятие F -пространства | 93 |
| § 2.2.2. Принцип равномерной ограниченности | 97 |
| § 2.2.3. Теорема об обратном операторе. Принцип открытости отображения | 102 |
| § 2.2.4. Продолжение операторов и функционалов. Принцип продолжения Банаха — Хана | 106 |
| § 2.2.5. Различные топологии, различные типы сходимостей. Общие виды функционалов в конкретных пространствах | 112 |
| § 2.2.6. Компактные множества, слабая компактность | 122 |
| <i>Задачи</i> | 126 |
| ГЛАВА 3. ТЕОРИЯ МЕРЫ. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛ | 127 |
| § 3.1. Теория меры | 127 |
| § 3.2. Измеримые функции | 140 |
| § 3.3. Интеграл Лебега | 144 |
| § 3.3.1. Определение интеграла Лебега | 146 |
| § 3.3.2. Свойства интеграла Лебега | 147 |
| § 3.3.3. Предельный переход под знаком интеграла Лебега | 153 |
| § 3.3.4. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана | 156 |
| § 3.3.5. Пространство L^p | 158 |
| § 3.4. Абсолютно непрерывные функции множеств. Теорема Радона — Никодима | 161 |
| § 3.4.1. Абсолютно непрерывные функции множеств | 161 |
| § 3.4.2. Теорема Радона — Никодима | 163 |
| § 3.5. Прямое произведение мер. Теорема Фубини | 166 |
| § 3.5.1. Прямое произведение мер | 166 |
| § 3.5.2. Теорема Фубини | 170 |
| <i>Задачи</i> | 171 |

ГЛАВА 4. ГЕОМЕТРИЯ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА.

| | |
|---|------------|
| СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ | 174 |
| § 4.1. Гильбертовы пространства | 174 |
| § 4.1.1. Геометрия гильбертова пространства | 174 |
| § 4.1.2. Базисы гильбертова пространства | 179 |
| § 4.1.3. Размерность гильбертова пространства | 183 |
| § 4.1.4. Ортогональные разложения в гильбертовом пространстве | 184 |
| § 4.1.5. Биортогональные последовательности | 185 |
| § 4.1.6. Матричное представление линейного ограниченного оператора в H | 193 |
| § 4.1.7. Примеры | 193 |
| <i>Задачи</i> | 197 |
| § 4.2. Спектральные теоремы | 199 |
| § 4.2.1. Сопряжённый оператор | 200 |
| § 4.2.2. Понятие о вполне непрерывном операторе | 201 |
| § 4.2.3. Абсолютная норма оператора | 203 |
| § 4.2.4. Альтернатива Фредгольма | 206 |
| § 4.2.5. Проектирующие операторы | 210 |
| § 4.2.6. Спектр оператора | 214 |
| § 4.2.7. Симметрические операторы. Свойства квадратичной формы оператора | 216 |
| § 4.2.8. Квадратный корень из симметрического оператора | 219 |
| § 4.2.9. Спектральная теорема для симметрического оператора в n -мерном пространстве | 220 |
| § 4.2.10. Вполне непрерывные операторы. Спектральная теорема | 223 |
| § 4.2.11. Спектральная теорема для симметрического ограниченного оператора | 225 |
| § 4.2.12. Спектральная теорема для унитарного оператора | 230 |
| § 4.2.13. Неограниченные операторы | 237 |
| § 4.2.14. Спектр симметрического ограниченного оператора | 250 |
| § 4.2.15. Спектр и резольвента неограниченных операторов | 254 |
| <i>Задачи</i> | 258 |
| § 4.3. Операторные уравнения. Аналитические функции и операторы | 260 |
| § 4.3.1. Аналитические свойства резольвенты | 260 |
| § 4.3.2. Теорема Келдыша | 269 |
| § 4.3.3. Корневые векторы и корневые подпространства несамосопряжённых операторов | 272 |
| § 4.3.4. Дифференциальные операторы | 280 |

ГЛАВА 5. СЛЕДЫ ОПЕРАТОРОВ**286**

| | |
|---|-----|
| § 5.1. Теорема о следе для оператора в n -мерном пространстве | 286 |
|---|-----|

| | |
|---|------------|
| § 5.2. Ядерные операторы. Теорема о следе | 287 |
| § 5.2.1. Теорема о следе для положительного ядерного оператора | 287 |
| § 5.2.2. Свойства s -чисел вполне непрерывных операторов . | 291 |
| § 5.2.3. Оценки собственных значений вполне непрерывного оператора | 298 |
| § 5.2.4. Оценки s -чисел произведений и сумм линейных вполне непрерывных операторов | 304 |
| § 5.2.5. Теорема о следе для ядерного оператора | 306 |
| § 5.3. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций. Следы дифференциальных операторов | 313 |
| § 5.3.1. Функции класса K | 313 |
| § 5.3.2. Дзета-функция | 315 |
| § 5.3.3. Регуляризованные суммы корней функции класса K | 318 |
| <i>Задачи</i> | 322 |
| § 5.4. Следы дискретных операторов | 323 |
| ГЛАВА 6. ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ | 348 |
| § 6.1. Обобщённые функции | 348 |
| § 6.1.1. Понятие обобщённой функции | 348 |
| § 6.1.2. Основные свойства обобщённых функций | 353 |
| § 6.1.3. Дифференциальные уравнения с обобщёнными функциями | 358 |
| § 6.1.4. Прямое произведение и свёртка обобщённых функций | 361 |
| § 6.2. Преобразование Фурье | 363 |
| § 6.2.1. Преобразование Фурье функций из пространства L^1 . | 363 |
| § 6.2.2. Преобразование Фурье функций из пространства L^2 . | 366 |
| § 6.2.3. Преобразование Фурье обобщённых функций | 368 |
| ЛИТЕРАТУРА | 371 |
| ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ | 373 |