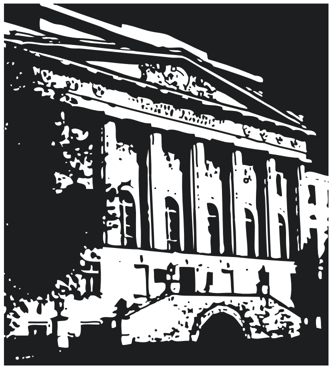
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова



Классический университетский учебник

Серия основана в 2002 г.

Издательство Московского университета

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

А. А. Кулешов

Анализ I
КРАТКИЙ КУРС

Учебник

Издательство Московского университета | 2024

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
К90

Работа над книгой поддержана Московским центром фундаментальной и прикладной математики

Рецензенты:

Ш. А. Алимо — доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Республики Узбекистан

А. Л. Семено — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, академик Российской академии наук

Кулешов, А. А.

К90 Анализ I. Краткий курс : учебник / А. А. Кулешов. — Москва : Издательство Московского университета, 2024. — 407, [1] с.: ил. — (Классический университетский учебник).

ISBN 978-5-19-012036-3 (e-book)
ISBN 978-5-19-011980-0 (print)

Учебник соответствует программе первого курса дисциплины «Математический анализ». В книге автор стремился дать полное, последовательное, математически строгое и при этом максимально компактное изложение всех основных входящих в программу этого курса определений, формулировок и доказательств. Автор также стремился сделать курс по возможности самодостаточным, поэтому в него включены некоторые сведения из других разделов математики: теории множеств, алгебры, общей топологии. В книгу также включены дополнительные параграфы, не входящие в стандартные программы курса.

Для студентов университетов и вузов с углубленным изучением математики. Может быть полезен аспирантам, преподавателям и научным работникам.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73

ISBN 978-5-19-012036-3 (e-book)
ISBN 978-5-19-011980-0 (print)

В 2025 году Московскому университету — старейшему университету России — исполняется 270 лет. За без малого три века он выучил, вырастил и выпустил в жизнь огромную плеяду выдающихся ученых и педагогов. Люди Московского университета сформировали всемирно признанные научные школы, разработали эффективные методики преподавания разных дисциплин, внеся тем самым весомый вклад в успешное научно-технологическое и духовно-нравственное развитие нашей страны. Многие из них создали замечательные книги, в которых ярко отражены как научные и педагогические достижения, так и история самого университета.

Готовясь к юбилею, мы издаем и переиздаем книги, которые дают наилучшее представление об интеллектуальном богатстве Московского университета, о его вкладе в науку и образование. Издательские серии «Классический университетский учебник», «Труды выдающихся ученых МГУ», «История Московского университета», «Из сокровищницы Московского университета» включают ставшие классикой учебники, на которых выросло не одно поколение студентов, фундаментальные научные монографии, книги, повествующие об истории и современности старейшего и крупнейшего университета России.

Посвящая этот издательский проект 270-летию нашей Альма-матер, мы надеемся привлечь внимание читателей к достижениям университетских ученых в разных областях знания, к многогранному научно-образовательному наследию Московского университета, чья книжная сокровищница продолжает пополняться фундаментальными трудами, становясь к юбилею еще богаче.

Ректор Московского университета *В. А. Садовничий*
академик

Светлой памяти
моего дорогого Учителя
Владимира Александровича Ильина

Кулешов Александр Андреевич

1986–2023

Родился 18 января 1986 года в Москве. В 2003 году окончил московский Лицей информационных технологий № 1533. В том же году поступил и в 2009 году с отличием окончил факультет вычислительной математики и кибернетики (ВМК) Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. В 2009–2012 гг. обучался в аспирантуре того же факультета. Научный руководитель — академик РАН В.А. Ильин.

Кандидат физико-математических наук (2012), тема диссертации: «Аналитический вид обобщенных решений смешанных задач для волнового уравнения в случае нелокальных граничных условий и разрывных коэффициентов».

2012–2022 гг. ассистент, 2022–2023 гг. доцент кафедры общей математики факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. По совместительству в 2016–2018 гг. старший научный сотрудник отдела теории функций Математического института имени В.А. Стеклова Российской академии наук, в 2018–2023 гг. старший научный сотрудник лаборатории «Многомерная аппроксимация и приложения» механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Лауреат медали Российской академии наук с премией в области математики для студентов высших учебных заведений (2009) за цикл работ о начально-краевых задачах для уравнения колебаний струны и оптимизации граничного управления процессом колебаний.

Автор 23 работ, опубликованных в ведущих российских и зарубежных журналах. В 2015–2022 гг. опубликовал цикл статей по теории ридж-функций (`https://www.mathnet.ru/php/person.phtml`).

Скоропостижно скончался 27.04.2023.

Оглавление

Предисловие **13**

Глава 0. О множествах **17**

§ 0.1. Общие понятия и логическая символика 17
§ 0.2. Парадоксы наивной теории множеств 20
§ 0.3. Об аксиоматических теориях множеств 21
§ 0.4. О множестве натуральных чисел 22
§ 0.5. Упорядоченные пары, декартовы произведения и функции . . 23
§ 0.6. Упорядоченные множества и лемма Цорна 28
§ 0.7. Понятие мощности множества и арифметика кардинальных чисел. Теоремы Кантора и Кантора–Бернштайна 35
§ 0.8. Свойства кардиналов $\aleph_0$ и $\mathcal{C}$ 41

Глава 1. Вещественные числа **48**

§ 1.1. Определение множества вещественных чисел и правила их сравнения 48
§ 1.2. О приближении вещественных чисел рациональными 54
§ 1.3. Ограниченные числовые множества 55
§ 1.4. Арифметические операции над вещественными числами и их основные свойства 59

Глава 2. Предел числовой последовательности **66**

§ 2.1. Сходящиеся последовательности и их основные свойства . . . 66
§ 2.2. Монотонные последовательности и число e 70
§ 2.3. О гармоническом ряде 75
§ 2.4. Теорема Штольца 79
§ 2.5. Принцип вложенных отрезков и лемма Гейне–Бореля 82
§ 2.6. Подпоследовательности и частичные пределы 85
§ 2.7. Критерий Коши существования предела последовательности . 90
§ 2.8. О полноте поля вещественных чисел 93

Глава 3. Предел и непрерывность функции одной переменной **95**

§ 3.1. Определение предела функции по Коши и по Гейне, основные свойства предела 95
§ 3.2. Непрерывность функции в точке и на множестве. Основные свойства непрерывных функций 101

§ 3.3. Монотонная функция. Обратная функция . . . 105
§ 3.4. Классификация точек разрыва. О точках разрыва монотонной функции . . . 109
§ 3.5. Простейшие элементарные функции . . . 111
3.5.1. Показательная, логарифмическая и степенная функции 111
3.5.2. Об углах, их мере и тригонометрических функциях . . 112
3.5.3. Обратные тригонометрические функции . . . 117
§ 3.6. Определение и основные свойства о-малых . . . 118
§ 3.7. Два замечательных предела . . . 121
§ 3.8. Асимптотические представления некоторых элементарных функций в нуле . . . 123
§ 3.9. Равномерная непрерывность . . . 128

Глава 4. Дифференцируемость функции одной переменной **132**
§ 4.1. Основные определения и свойства . . . 132
§ 4.2. О касательной прямой . . . 138
§ 4.3. Производные высших порядков . . . 141
§ 4.4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях . . . 147
§ 4.5. О производных простейшей неявно заданной функции . . . 156
§ 4.6. Формула Тейлора . . . 158
§ 4.7. Исследование функций методами дифференциального исчисления . . . 164
4.7.1. Достаточные условия экстремума . . . 164
4.7.2. О выпуклых функциях . . . 166
4.7.3. Неравенства Йенсена, Янга, Гёльдера, Коши-Буняковского, Минковского . . . 173
4.7.4. Об асимптотах и точках перегиба графика функции . . 178

Глава 5. Первообразная **183**
§ 5.1. Основные свойства первообразной и неопределённого интеграла 183
§ 5.2. О комплексных числах, многочленах и рациональных функциях 188
5.2.1. Комплексные числа . . . 188
5.2.2. Многочлены . . . 193
5.2.3. Разложение рациональной функции на простейшие дроби 199
§ 5.3. Неопределённые интегралы рациональных функций . . . 202
§ 5.4. Неопределённые интегралы некоторых тригонометрических и иррациональных функций . . . 204
5.4.1. Гиперболическая тригонометрия . . . 204
5.4.2. Нахождение интегралов вида $\int R(\sin t, \cos t)dt$, $\int R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)dt$ . . . 207
5.4.3. Нахождение интегралов вида $\int R\left(t, \sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)dt$ . . . 209
5.4.4. Нахождение интегралов вида $\int R(t, \sqrt{at^2+bt+c})dt$. 210

Глава 6. Интеграл Римана **215**
§ 6.1. Определённый интеграл 215
6.1.1. Основные определения 215
6.1.2. Свойства сумм Дарбу 219
6.1.3. Классы интегрируемых функций 224
6.1.4. Свойства интеграла Римана 229
6.1.5. Формула Ньютона–Лейбница и теоремы о среднем . . . 233
6.1.6. Теорема Тейлора с остаточным членом в интегральной форме 240
§ 6.2. Несобственный интеграл 241

Глава 7. Некоторые приложения дифференциального и интегрального исчислений **250**
§ 7.1. Вычисление корней уравнений 250
§ 7.2. Численное интегрирование 253

Глава 8. Спрямляемые кривые, мера Жордана и её связь с интегралом Римана **257**
§ 8.0. О нормированных пространствах 257
§ 8.1. Спрямляемые кривые 265
§ 8.2. Мера Жордана 270
§ 8.3. Связь меры Жордана с интегралом Римана 282

Глава 9. Функции многих переменных **290**
§ 9.1. Предел и непрерывность 290
9.1.1. Предел последовательности 290
9.1.2. Предел функции 292
9.1.3. Непрерывность 296
§ 9.2. Дифференцируемость 301
9.2.0. О линейных операторах 301
9.2.1. Дифференциал и производная 303
9.2.2. Частные производные 307
9.2.3. Дифференциалы и частные производные высших порядков 316
9.2.4. Формула Тейлора 331
§ 9.3. Теоремы о неявной функции 337
§ 9.4. Экстремум 346
9.4.1. Безусловный экстремум 346
9.4.2. Условный экстремум 349
§ 9.5. Функциональная зависимость 354

Глава 10. Дополнения **358**
§ 10.1. Критерий Лебега интегрируемости по Риману 358
§ 10.2. О метрических и топологических пространствах.
Универсальное топологическое пространство $\widetilde{\mathbb{R}}$ 361
10.2.1. Метрические пространства 361
10.2.2. Топологические пространства 364
§ 10.3. Об инвариантности меры Жордана относительно изометрий . 379
§ 10.4. Основная теорема алгебры 385
§ 10.5. О композициях многократно дифференцируемых функций . . 387
§ 10.6. Обобщённая теорема Янга 394

Список литературы **396**

Предметный указатель **399**

Список обозначений **405**

Предисловие

Данный курс математического анализа создан на основе лекций, прочитанных автором на факультете вычислительной математики и кибернетики (ВМК) Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и в его филиале в г. Ереване. Несмотря на обилие замечательных монографий (О.В. Бесов [3], В.А. Зорич [8, 9], В.А. Ильин, Э.Г. Позняк [10, 11], В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов [12, 13], С.М. Никольский [17, 18], Ю.Г. Решетняк [20, 21, 22, 23], У. Рудин [24], Г.М. Фихтенгольц [26, 27, 28], Т. Апостол [32], Т. Тао [53, 54] и другие), автор счёл необходимым создание нового курса, основная цель которого предельно проста: дать полное, последовательное, математически строгое и при этом максимально компактное изложение всех основных входящих в программу этого курса определений, формулировок и доказательств. Особое внимание уделяется снятию лишних требований при формулировках утверждений, а также общности и применимости этих формулировок. Автор также стремился сделать курс по возможности самодостаточным, поэтому в него включены некоторые сведения из других разделов математики: теории множеств, алгебры, общей топологии. Для достижения поставленных целей использовались материалы большого числа классических и современных монографий, статей, а также интернет-заметок, опубликованных в последние годы. Ряд определений и теорем данного курса принадлежат автору (см., в частности, [45, 46]).

Наряду с отмеченными выше идейными соображениями, перечислим некоторые конкретные особенности данного курса:

- Натуральные числа вводятся при помощи аксиоматики теории множеств. Вещественные числа строятся на основе натуральных при помощи той же аксиоматики теории множеств, при этом уделяется особое внимание аксиоматике *полного упорядоченного поля*, вполне определяющей множество вещественных чисел.
- Особое внимание уделяется группе утверждений, эквивалентных принципу полноты вещественных чисел, где эквивалентность понимается в структуре (архимедова) упорядоченного поля.
- Для определения всех *пределов* мы придерживаемся единой концепции предела функции в *топологических пространствах*. Это позволяет последовательно развивать теорию, не привлекая при этом альтернативные определения предела (например, *предел по базе*).

- Особое внимание уделяется аккуратному определению тригонометрических функций с сохранением концепций, принятых в курсе элементарной математики. При этом приходится определять эти функции как на множестве *геометрических углов на плоскости*, так и на множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Такой подход, хотя и требует знаний, выходящих за рамки курса Анализа I, позволяет разорвать порочный круг при выводе первого замечательного предела.
- Даны аккуратные определения и формулировки основных свойств о-малых, старших производных неявной параметрически заданной функции, выпуклых функций, точек перегиба графика функции, комплексных чисел, многочленов и рациональных функций.
- При формулировке теорем и изложении методов интегрирования конкретизируются промежутки, на которых ищется та или иная первообразная. В частности, теорема о замене переменной доказана для пары произвольных невырожденных промежутков.
- Продемонстрирована тесная связь понятия *спрямляемости* кривой с классом *функций ограниченной вариации*, при этом непрерывность отнесена на второй план в силу её неадекватности понятию спрямляемости.
- Мера Жордана введена в пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности, и особое внимание уделяется её свойствам, которые от размерности не зависят. При изложении этой теории были сведены к минимуму ссылки на геометрические утверждения, не входящие в обязательную школьную программу. Также доказана теорема о представлении меры Жордана интегралом от характеристических функций, устанавливающая связь между мерой Жордана и интегралом Римана.
- Так как одним из основных разделов данного курса является изложение теории *дифференциального исчисления*, центральным объектом изучения выбраны функции, действующие в *нормированных* (а не в метрических или топологических) пространствах. В связи с этим кратко изложены основные определения и свойства нормированных пространств. Понятие дифференцируемости функции многих переменных, как и во многих известных монографиях (например, [8, 21, 24, 32, 54]), вводится с использованием *линейных операторов*.
- Вместо индуктивных определений для частных производных и дифференциалов высших порядков даны определения в терминах *композиций операторов дифференцирования*, что автоматически позволяет пользоваться *ассоциативностью* композиции при рассмотрении этих объектов. Также при таком подходе нет необходимости ссылаться на «мнемонические правила» и «условные обозначения», так как все символы однозначно определены в операторной алгебре.

- Приведено предложенное Валле–Пуссеном (см. [6], [10], [12]) определение k-кратной дифференцируемости функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{x}_0$ через дифференцируемость её частных производных порядка $k-1$ в этой точке. Показано, что для k раз дифференцируемых по этому определению функций верна обобщённая теорема Янга, а также теорема Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
- Предложено изложение теории условного экстремума, включающее необходимое, а также достаточное условие 2-го порядка с новым более компактным обоснованием.
- Даны оригинальные (и наиболее компактные из всех известных автору) доказательства теорем о критериях интегрируемости по Риману, о замене переменной в несобственном интеграле (в формулировке которой отсутствует излишнее требование монотонности функции, осуществляющей соответствующую замену), о площади следа спрямляемой плоской кривой, об эквивалентности двух определений многократной дифференцируемости функции в точке, теоремы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, в формулировке которой удалось ослабить требование k-кратной дифференцируемости по Фреше, а также ряда других.

В качестве дополнительного материала присутствуют:

- Наиболее компактное из всех известных автору доказательство критерия Лебега интегрируемости функции по Риману, основанное на лемме о существовании разбиения Хенстока.
- Определение некоторого универсального топологического пространства, включающего в себя несобственные точки как элементы. С его помощью можно обойтись без рассмотрения $6^3 = 216$ различных *баз* для определения предела функции $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\big($например при $(x, y, z) \to (3+, -\infty, 27)\big)$. В силу того, что построенное пространство удовлетворяет *первой аксиоме счётности*, мы автоматически получаем справедливость определения Гейне для всех типов пределов, которые рассматриваются в стандартных курсах анализа.
- Доказательство инвариантности жордановой меры не только относительно сдвигов, но и относительно любых изометрических преобразований любого измеримого множества.
- Полное доказательство основной теоремы алгебры, которая существенно используется в главе, посвящённой нахождению первообразных. Это доказательство использует лишь материал, изложенный в этом курсе.
- Аккуратные определения классов $D^k(\Omega, H, N)$ и $C^k(\Omega, H, N)$ k раз дифференцируемых и непрерывно дифференцируемых функций $f\colon H \to N$, где H, N — *нормированные пространства* и $\Omega \subset H$. Доказаны теоремы о принадлежности композиций функций из рассмотренных выше классов при

фиксированном k тем же классам гладкости. Для композиции дважды дифференцируемых функций в явном виде получена формула вычисления второго дифференциала в терминах первого и второго дифференциалов от функций, образующих рассматриваемую композицию (известная автору работа [37], в которой выводится общая формула типа Фаа-ди-Бруно, использует технику, требующую свободного владения университетским курсом функционального анализа, и, кроме того, сформулирована при излишних предположениях банаховости соответствующих пространств и принадлежности исходных функций классам C^k на соответствующих *открытых* множествах).

- Формулировка и доказательство теоремы, являющейся прямым обобщением теоремы Янга на случай частных производных произвольного порядка, доказательство (или хотя бы точную формулировку) которой в известных источниках автору обнаружить не удалось.

Теоремы нумеруются в пределах параграфа. При ссылке на теорему другого параграфа той же главы первая цифра означает номер параграфа, при ссылке на теорему другой главы первая цифра означает номер главы, вторая — номер параграфа. Так, теорема 2 — это теорема 2 из того же параграфа, теорема 3.2 — это теорема 2 § 3 из той же главы, а теорема 6.3.2 — это теорема 2 § 3 из главы 6. То же относится ко всем определениям, леммам, утверждениям, примерам, следствиям и замечаниям. Формулы нумеруются в пределах параграфа, нумерация рисунков сквозная. Также мы придерживаемся соглашения $0^0 = 1$ во всех формулах, где подобное выражение возникает.

Данный учебник издается в печатном и электронном форматах. При создании электронной версии особое внимание уделялось интерактивности: все элементы оглавления, предметного указателя, списка обозначений, а также все ссылки при нажатии на них отсылают читателя на соответствующий элемент в тексте, что полностью соответствует современной тенденции создания электронных учебников.

Автор выражает благодарность студентам факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова Б. Валиахметову, О. Васянину, С. Данилову, М. Мордвинцеву, А. Репину, М. Чернявскому за помощь в оформлении текста. Особую благодарность автор выражает А. Владимирову, О. Кудрявцевой и А. Михайлову, фактически взявшему на себя роль технического редактора первоначальной электронной версии.

А. Кулешов

Глава 0
О множествах

§ 0.1. Общие понятия и логическая символика

Всюду в этой книге мы будем использовать символы $\exists$ («существует» или «найдётся») и $\forall$ («для любого»), называемые соответственно ***кванторами*** существования и всеобщности. Символ $\nexists$ читается как «не существует».

К высказываниям P_1 и P_2 мы будем применять логические символы:

$$\overline{P_1} \text{ (не } P_1\text{)},$$
$$P_1 \vee P_2 \text{ (} P_1 \text{ или } P_2\text{)},$$
$$P_1 \mathbin{\&} P_2 \text{ или } P_1 \wedge P_2 \text{ (} P_1 \text{ и } P_2\text{)},$$
$$P_1 \implies P_2 \text{ (из } P_1 \text{ следует } P_2\text{)},$$
$$P_1 \iff P_2 \text{ (} P_1 \text{ равносильно } P_2\text{)}.$$

Запись $A := B$ (или $A \overset{def}{\iff} B$ в случае, когда A и B — высказывания) означает, что мы определяем новый объект A через уже определённый объект B. Множества мы будем обозначать либо буквами, либо заключая в фигурные скобки описание их элементов. Например, запись $\Omega := \{1, 2, 3\}$ означает: «назовём множество, состоящее из чисел $1, 2, 3$, буквой Ω». При этом числа $1, 2, 3$ называются ***элементами*** множества Ω. Высказывание «x ***принадлежит*** множеству Ω» («x есть элемент множества Ω») обозначается как $x \in \Omega$, а его отрицание как $x \notin \Omega$. Таким образом, запись

$$S := \big\{n\colon \exists k\, (k \in \Omega \ \& \ n = 2k)\big\}$$

означает, что $S = \{2, 4, 6\}$, но чаще используется сокращённая запись $S :=$ $:= \{2k\colon k \in \Omega\}$.

Высказывание P, содержащее *переменную* x, будем обозначать $P(x)$. Для высказывания «существует и притом единственный объект x, обладающий свойством P» будем использовать общепринятое сокращение $\exists!\, x\, P(x)$. Таким образом,

$$\exists!\, x\, P(x) \overset{def}{\iff} \exists x\, \Big(P(x) \ \& \ \forall y\, \big(P(y) \implies y = x\big)\Big).$$

Также будем применять следующие общепринятые сокращения:

$$\forall x \in \Omega \;\; P(x) \overset{def}{\iff} \forall x \, \big(x \in \Omega \implies P(x)\big),$$
$$\exists\, x \in \Omega \;\; P(x) \overset{def}{\iff} \exists\, x \, \big(x \in \Omega \;\&\; P(x)\big).$$

Отрицание к высказыванию «для некоторого x истинно $P(x)$» есть высказывание «для любого x неверно $P(x)$», а отрицание к высказыванию «для любого x истинно $P(x)$» — высказывание «найдётся x, для которого неверно $P(x)$». Таким образом,

$$\overline{\exists\, x\, P(x)} \iff \forall x\, \overline{P(x)},$$
$$\overline{\forall x\, P(x)} \iff \exists\, x\, \overline{P(x)}.$$

Напомним также некоторые утверждения логики:

$$\overline{P_1 \vee P_2} \iff \overline{P_1} \,\&\, \overline{P_2},$$
$$\overline{P_1 \,\&\, P_2} \iff \overline{P_1} \vee \overline{P_2},$$
$$\overline{P_1 \implies P_2} \iff P_1 \,\&\, \overline{P_2} \iff \overline{\overline{P_1} \vee P_2}.$$

Пример 1. $\overline{\forall x > a \;\; P(x)} \iff \exists\, x > a \;\; \overline{P(x)}$.

Действительно,

$$\overline{\forall x > a \;\; P(x)} := \overline{\forall x \, \big(x > a \implies P(x)\big)} \iff \exists\, x \, \overline{\big(x > a \implies P(x)\big)} \iff$$
$$\iff \exists\, x \, \big(x > a \;\&\; \overline{P(x)}\big) \iff \exists\, x > a \;\; \overline{P(x)}. \qquad \blacktriangleleft$$

Более подробно об исчислении высказываний см. [14, 30]. ***Пустое множество*** будем обозначать символом $\varnothing$. По определению никакой объект не принадлежит пустому множеству, то есть $\nexists x\,(x \in \varnothing)$ или же $\forall x\,(x \notin \varnothing)$. Далее пусть A и B суть произвольные множества. Если множества A и B ***совпадают***, то будем коротко писать $A = B$, то есть

$$A = B \overset{def}{\iff} \forall x\,(x \in A \iff x \in B).$$

Запись $A \subset B$ означает, что A является ***подмножеством*** множества B, то есть

$$A \subset B \overset{def}{\iff} \forall x\,(x \in A \implies x \in B) = \forall x \in A\,(x \in B).$$

Таким образом,

$$A = B \iff A \subset B \;\&\; B \subset A.$$

Если A является ***собственным подмножеством*** B, то будем использовать обозначение $A \Subset B$, то есть

$$A \Subset B \overset{def}{\iff} A \subset B \;\&\; A \neq B.$$

Теперь перечислим основные операции над множествами.

1. ***Пересечением*** множеств A и B называется множество

$$(A \cap B) \coloneqq \{x \colon x \in A \ \& \ x \in B\}.$$

Пересечением *семейства* множеств Ω_α, где $\alpha \in A \neq \varnothing$, называется множество

$$\bigcap_{\alpha \in A} \Omega_\alpha \coloneqq \{x \colon \forall \alpha \in A \ (x \in \Omega_\alpha)\}.$$

Также используется обозначение

$$\bigcap \Omega \coloneqq \{x \colon \forall \omega \in \Omega \ (x \in \omega)\}.$$

2. ***Объединением*** множеств A и B называется множество

$$(A \cup B) \coloneqq \{x \colon x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Дизъюнктное объединение, то есть объединение *непересекающихся* множеств A и B, будем также обозначать $A \sqcup B$ в тех случаях, когда необходимо подчеркнуть, что $A \cap B = \varnothing$.

Объединением *семейства* множеств Ω_α, где $\alpha \in A$, называется множество

$$\bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha \coloneqq \{x \colon \exists \, \alpha \in A \ (x \in \Omega_\alpha)\}.$$

Если $\Omega_{\alpha_1} \cap \Omega_{\alpha_2} = \varnothing$ для всех индексов $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то

$$\bigsqcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha \coloneqq \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha.$$

Также используется обозначение

$$\bigcup \Omega \coloneqq \{x \colon \exists \, \omega \in \Omega \ (x \in \omega)\}.$$

Если $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$ для всех $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ таких, что $\omega_1 \neq \omega_2$, то

$$\bigsqcup \Omega \coloneqq \bigcup \Omega.$$

3. ***Разностью*** множеств A и B называется множество

$$(A \setminus B) \coloneqq \{x \colon x \in A \ \& \ x \notin B\} = \{x \in A \colon x \notin B\}.$$

Замечание 1 (об использовании двоеточия). Двоеточие часто используется как синоним фразы «такой, что» или «для которого», например, во фразе «выберем $\varepsilon > 0 \colon \varepsilon^2 < 2$». Для логических высказываний вида $\forall x \in A \ (x \in B)$ также иногда используется запись $\forall x \in A \colon x \in B$ или просто $\forall x \in A \ \ x \in B$.

§ 0.2. Парадоксы наивной теории множеств

Что есть множество в математике? Ответ на этот вопрос наподобие «некоторая совокупность любых объектов» на протяжении многих столетий считался естественным и общепринятым. Однако в конце девятнадцатого века были опубликованы первые парадоксы (например Бурали-Форти, Кантора), к которым привёл такой, называемый в наше время ***наивным***, подход к понятию множества. В начале двадцатого века были построены ещё более простые и изящные парадоксы (например Рассела, Ришара, Берри). Ниже мы приведём некоторые из этих парадоксов, для более подробного ознакомления (см. [29]).

Парадокс Рассела

Рассматривая множества с наивной точки зрения, мы допускаем существование множества Ω, являющегося *множеством всех множеств*. В частности, это множество по определению содержит себя как элемент, то есть $\Omega \in \Omega$.

Также ничто не мешает нам рассмотреть *множество* $\mathcal{S} \subset \Omega$ *всех множеств, не содержащих себя как элемент*:

$$\mathcal{S} := \big\{X \in \Omega \colon X \notin X\big\}.$$

Из определения множества $\mathcal{S}$ вытекает, например, что $\Omega \notin \mathcal{S}$, однако $\varnothing \in \mathcal{S}$, так как $\varnothing \notin \varnothing$. Суть парадокса Рассела заключается в том, что если $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$, то $\mathcal{S} \notin \mathcal{S}$ по определению множества $\mathcal{S}$; вместе с этим если $\mathcal{S} \notin \mathcal{S}$, то $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$ по тому же определению. Таким образом мы доказали, что одновременно $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$ и $\mathcal{S} \notin \mathcal{S}$, чего быть не может. Присваивая истинным высказываниям значение 1, а ложным — 0, мы получаем, что $0 = 1$.

Парадокс Ришара–Берри

В парадоксе Рассела рассматривается специфическое множество $\mathcal{S}$, а потому некоторым читателям он может показаться неубедительным. Ниже мы приводим парадокс Ришара–Берри, в котором речь идёт о куда более естественном объекте — некотором множестве целых чисел.

Рассмотрим множество $\mathcal{D}$, состоящее из всех целых чисел, которые можно однозначно определить фразой на русском языке, состоящей не более чем из ста слов некоторого конечного словаря (к примеру, словаря Даля). Фраза «количество дней в одном из месяцев», например, никакое число однозначно не определяет. Заметим, что множество всех фраз, состоящих не более чем из ста слов из словаря Даля, является конечным, а следовательно, конечным является и множество $\mathcal{D}$. Также множество $\mathcal{D}$ является непустым (так как фраза «количество дней в мае» однозначно определяет число $31 \in \mathcal{D}$), а значит, в нём существует максимальный элемент, который мы обозначим $M := \max \mathcal{D}$.

Теперь рассмотрим следующую фразу: «число, равное сумме максимального элемента множества, состоящего из всех натуральных чисел, которые можно однозначно определить фразой на русском языке, состоящей не более чем из ста слов из словаря Даля, и числа один». В этой фразе меньше ста слов, а значит, $M + 1 \in \mathcal{D}$. Но тогда $M + 1 \leqslant M$, ведь M является максимальным элементом $\mathcal{D}$, поэтому $1 \leqslant 0$, что вместе с известным неравенством $0 \leqslant 1$ влечёт $0 = 1$.

§ 0.3. Об аксиоматических теориях множеств

Там, где есть парадоксы, нет логики, а математику без логики трудно себе вообразить. Столкнувшись с парадоксами наивной теории множеств, в начале XX века математики стали предпринимать попытки переосмысления наивного понятия множества. В результате появился ряд аксиоматических теорий множеств, например: аксиоматика фонНоймана–Бернайса–Гёделя (обозначается NBG), Морса–Келли (MK), Куайна (NF) и самая популярная и общепринятая на сегодняшний день аксиоматика Цермело–Френкеля (ZF), на которую мы и будем чаще всего ссылаться.

Лежащая в основе аксиоматических теорий идея проста. Нужно создать такую аксиоматику, чтобы *типичные* множества, использующиеся в математике (к примеру, множество натуральных чисел, множество чисел отрезка $[0, 1]$), были допустимы и с ними можно было работать так же легко, как и в наивной теории множеств. В то же время необходимо исключить возможность построения множеств типа расселовских или ришаровских. Аксиоматика ZF решает эту задачу.

Добавляя к системе ZF так называемую *аксиому выбора* (см. формулировку в конце параграфа), получаем аксиоматику, называемую системой Цермело–Френкеля с аксиомой выбора и обозначаемую ZFC. Эта аксиома выделяется отдельно, поскольку до сих пор не всеми принимается безоговорочно. Среди следствий аксиомы выбора есть довольно парадоксальные утверждения. Так, парадокс Банаха–Тарского о том, что шар можно разделить на пять непересекающихся частей, перенести эти части при помощи движения (то есть при помощи сдвига и вращения) в соседнюю область пространства и получить ровно два таких же шара, доказывается с помощью аксиомы выбора. В специализированной литературе часто оговаривается то, какие утверждения доказуемы средствами ZF, а для доказательства каких требуется аксиома выбора и, соответственно, ZFC.

Аксиоматика ZF позволяет работать со всеми множествами, используемыми в современной математике, наивными методами, поэтому для большинства математиков нет необходимости подробно изучать ZF. Но при этом необходимо понимать, что для того, чтобы избежать ситуаций типа парадокса Рассела, нельзя относиться ко множествам совсем уж вольно. В дальнейшем всюду со множествами мы будем работать в наивном ключе, не фиксируя конкретной аксиоматической системы, но помня, что какая-то аксиоматика неявно используется.

К примеру, множеств, состоящих ровно из одного элемента, столько же, сколько и произвольных множеств вообще, так как каждому множеству A можно поставить в соответствие одноэлементное множество $\{A\}$. Таким образом, рассматривая множество всех множеств, состоящих ровно из одного элемента, мы получим парадоксы типа расселовского. В этом случае, следуя аксиоматике NBG, говорят о *классе* всех множеств, состоящих ровно из одного элемента. Более подробно об аксиоматических теориях множеств см. [29].

В заключение сформулируем *аксиому выбора*: Для всякого семейства A непустых множеств существует функция f, которая каждому множеству семейства сопоставляет один из элементов этого множества. При этом f называется *функцией выбора* для заданного семейства. На формальном языке аксиома выбора записывается следующим образом:

$$\forall A \left[\varnothing \notin A \implies \exists f\colon A \to \bigcup A \left(\forall \alpha \in A\ f(\alpha) \in \alpha\right)\right].$$

Отметим, что в случае $A = \varnothing$ функция выбора автоматически существует и имеет вид $f = \varnothing$.

Во времена, предшествующие открытию парадоксов и созданию современных аксиоматических теорий множеств, многие математики пользовались аксиомой выбора неявно, не формулируя её отдельно и считая очевидным фактом. Сейчас этой аксиоме посвящены целые монографии (см., например, [40]), а споры по поводу её справедливости не затихают и по сей день.

§ 0.4. О множестве натуральных чисел

В аксиоматике ZF все объекты (будь то число, функция, точка или прямая) являются *множествами*. Существует первичное отношение принадлежности $\in$, то есть $A \in B$ означает, что множество A есть элемент множества B. Аксиоматически постулируется существование пустого множества $\varnothing$, то есть множества, не содержащего никакого множества. *Аксиома бесконечности* ZF постулирует существование такого множества $\mathcal{I}$, что $\varnothing \in \mathcal{I}$ и что для любого множества X из условия $X \in \mathcal{I}$ следует, что $X \cup \{X\} \in \mathcal{I}$, называемого ***индуктивным*** множеством.

Определение 1 (множества целых неотрицательных чисел). Пересечение

$$\mathbb{N}_0 := \bigcap \{\mathcal{I}\} := \{x : x \in \mathcal{I} \text{ для любого индуктивного множества } \mathcal{I}\}$$

всех *индуктивных* множеств также является *индуктивным*. Это наименьшее *индуктивное* множество: оно содержится в любом *индуктивном* множестве. Множество $\mathbb{N}_0$ называется множеством ***целых неотрицательных чисел***.

Определение 2. Для любого числа $n \in \mathbb{N}_0$ число

$$n{+}{+} = n + 1 := n \cup \{n\}$$

называется ***следующим за*** числом n. Таким образом:

$0 := \varnothing$

$1 := 0{+}{+} = 0 \cup \{0\} = \varnothing \cup \{0\} = \{0\} = \{\varnothing\}$

$2 := 1{+}{+} = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} = \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}$

$3 := 2{+}{+} = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\big\}$

$\ldots$

Определение 3 (множества натуральных чисел). Множество $\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \setminus \setminus \{0\}$ называется множеством ***натуральных чисел***.

Замечание 1. В современной литературе (см., например, [38]) именно множество $\mathbb{N}_0$ (а не $\mathbb{N}$) всё чаще называют множеством *натуральных* чисел. Это со многих точек зрения удобно и естественно, однако в этой книге мы придерживаемся классической концепции, согласно которой 0 не является натуральным.

Замечание 2 (об определении натурального числа). Отметим, что в определении индуктивного множества (а значит, и в определениях 1, 3) используется $\{X\}$, то есть множество, состоящее из *одного* элемента. Таким образом, первичное представление о числе 1 необходимо для формального определения множества натуральных чисел, элементом которого число 1 является. Это наводит на мысль, что понятие натурального числа является настолько первичным, что любое его формальное определение будет неявно использовать некоторые свойства натуральных чисел.

Теорема 1 [Принцип индукции]. *Пусть $M \subset \mathbb{N}$, $1 \in M$ и $m+1 \in M$ для всех $m \in M$. Тогда $M = \mathbb{N}$.*

Доказательство. Множество $M_0 := M \cup \{0\} \subset \mathbb{N}_0$ является *индуктивным*, так как $\varnothing =: 0 \in M_0$ и $0 \cup \{0\} = 0 + 1 =: 1 \in M \subset M_0$, поэтому $\mathbb{N}_0 \subset M_0$ по определению 1. Получили $M_0 = \mathbb{N}_0$, а следовательно, $M = \mathbb{N}$. ◀

§ 0.5. Упорядоченные пары, декартовы произведения и функции

Определение 1 (упорядоченной пары (Куратовский)). Множество

$$(x, y) := \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$$

называется ***упорядоченной парой*** элементов x и y. При этом элементы x и y называются соответственно первой и второй ***компонентами*** упорядоченной пары (x, y).

Замечание 1 (об определении упорядоченной пары). По определению 1 проверяется ***характеристическое свойство упорядоченной пары***:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \,\&\, y_1 = y_2.$$

Можно предложить и другие определения упорядоченной пары, удовлетворяющие этому свойству, например $(x, y) := \big\{\{0, x\}, \{1, y\}\big\}$. Определение 1 отличается тем, что не использует явно число $2 := \{0, 1\}$. Однако, умея различать символы x и y, мы автоматически мыслим себе *два* различных объекта, поэтому от первичной интуиции числа 2 никуда не деться (см. аналогичное замечание 4.2 об определении натурального числа).

В заключение отметим, что в наивной теории множеств из характеристического свойства для любой упорядоченной пары $z = (x, y)$ вытекают равенства

$$\mathrm{pr}_1(z) := \bigcup \{u : \exists v \ (u, v) = (x, y)\} = x,$$

$$\mathrm{pr}_2(z) := \bigcup \{v : \exists u \ (u, v) = (x, y)\} = y.$$

Определение 2 (декартова произведения). Множество

$$A \times B := \big\{(a, b)\colon a \in A \,\&\, b \in B\big\}$$

всевозможных *упорядоченных пар* называется ***декартовым произведением*** множеств A и B.

Определение 3 (функции). Множество $f \subset A \times B$ называется ***функцией*** (***отображением***), определённой на множестве A и действующей во множество B, и обозначается $f\colon A \to B$, если
1. $\forall x \in A \ \exists y \in B\colon (x, y) \in f$;
2. $\forall x \ \forall y_1 \ \forall y_2\colon (x, y_1) \in f \ \& \ (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$.

Множество A называется ***областью определения функции*** f и обозначается $\mathrm{Dom}(f)$. Таким образом, для любой функции f имеем

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x : \exists y \ (x, y) \in f\}.$$

Для любого $x \in A$ существует единственный $y \in B$ такой, что $(x, y) \in f$, называемый ***значением функции*** f ***в точке*** x. Если $(x, y) \in f$, то для y используется стандартное обозначение $f(x)$, которым мы и будем пользоваться в дальнейшем. Более формально

$$f(x) := \bigcup \{y : (x, y) \in f\}.$$

Определение 4 (множества-степени). Множество всех функций $f\colon B\to A$ будем обозначать A^B, то есть
$$A^B \coloneqq \{f\colon B\to A\}.$$

Замечание 2. Если $A=\varnothing$ и $f\colon A\to B$, то $f=\varnothing$, то есть $B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$ для любого множества B. Если $A\neq\varnothing$ и $B=\varnothing$, то не существует функции $f\colon A\to B$, то есть $\varnothing^A=\varnothing$ при $A\neq\varnothing$.

Замечание 3. При определении функции f вместо $(x,y)\in f$ часто используется обозначение $x\mapsto y$.

Замечание 4 (о равенстве функций). Из определения 3 функции вытекает, что для любых функций $f : A\to B$ и $g : C\to D$ равенство $f=g$ имеет место тогда и только тогда, когда $A=C$ и $f(x)=g(x)$ для всех $x\in A$.

Определение 5 (последовательности). Функцию $x\colon \mathbb{N}\to A$ ($x\colon \mathbb{N}_0\to A$) будем называть ***последовательностью*** элементов множества A. Для значений этой функции вместо $x(n)$ будем использовать обозначение x_n. Саму функцию x будем обозначать $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (соответственно $(x_n)_{n=0}^{\infty}$) или сокращённо x_n в случаях, когда не возникает двоякого прочтения. ***Элементом последовательности*** x_n будем называть упорядоченную пару (n,x_n) при $n\in\mathbb{N}$ ($n\in\mathbb{N}_0$) либо, в зависимости от контекста, второй элемент этой пары — x_n.

Определение 6 (сужения функции). Пусть $\Omega\subset A$. Функция $g\colon \Omega\to B$ называется ***сужением*** функции $f\colon A\to B$ на множество Ω, если $g(x)=f(x)$ для всех $x\in\Omega$. При этом для функции g используется обозначение $f\big|_{\Omega}$.

Определение 7 (образа и прообраза). Пусть $f : A\to B$ и $X\subset A$. Множество
$$f(X)\coloneqq\{f(x) : x\in X\}$$
называется ***образом*** множества X под действием функции f. Множество
$$f^{-1}[Y]\coloneqq\{x\in A : f(x)\in Y\}$$
называется ***прообразом*** множества Y для функции f .

Определение 8 (композиции функций). Для любых функций f и g определим множество
$$\Omega\coloneqq\{x\in \mathrm{Dom}(g) : g(x)\in\mathrm{Dom}(f)\}.$$
Функция $f\circ g$, определённая формулой
$$(f\circ g)(x)\coloneqq f\bigl(g(x)\bigr)$$
для всех $x\in\Omega=\mathrm{Dom}(f\circ g)$, называется ***композицией*** (суперпозицией) *функций* g и f.

Утверждение 1 (об ассоциативности композиции функций). *Для любых функций f, g, h выполнено*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h). \tag{1}$$

Доказательство. Из определения 8 композиции функций вытекают равенства

$$\operatorname{Dom}\big((f \circ g) \circ h\big) = \operatorname{Dom}\big(f \circ (g \circ h)\big) =$$
$$= \{x : x \in \operatorname{Dom}(h) \;\&\; h(x) \in \operatorname{Dom}(g) \;\&\; g\big(h(x)\big) \in \operatorname{Dom}(f)\} =: \Omega.$$

Для любого $x \in \Omega$ по определению 8 композиции функций выполнено

$$\big((f \circ g) \circ h\big)(x) := (f \circ g)\big(h(x)\big) := f\Big(g\big(h(x)\big)\Big) =:$$
$$=: f\big((g \circ h)(x)\big) =: \big(f \circ (g \circ h)\big)(x),$$

отсюда следует равенство (1) (см. замечание 4 о равенстве функций). ◀

Определение 9 (инъекции). Функция f называется ***инъективной*** (***инъекцией***), если

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

для всех $x_1, x_2 \in \operatorname{Dom}(f)$.

Определение 10 (сюръекции). Функция $f\colon A \to B$ называется ***сюръективной*** (***сюръекцией***), если $f(A) = B$, то есть если для любого $y \in B$ найдётся $x \in A$, для которого $y = f(x)$.

Определение 11 (биекции). Функция $f\colon A \to B$ называется ***биективной*** (***биекцией***), если f *инъективна* и *сюръективна*. Обозначение: $f\colon A \xrightarrow{\sim} B$.

Определение 12 (обратной функции). Пусть $f : A \to B$. Функция $f^{-1} : f(A) \to A$ называется ***обратной*** к функции f, если $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$ для всех $(x, y) \in A \times f(A)$. В случае существования обратной функции f^{-1} функция f называется ***обратимой***.

Замечание 5. Определение 12 обратной функции можно записать в эквивалентном виде: функция $f^{-1} : f(A) \to A$ называется обратной к функции $f : A \to B$, если выполнены следующие равенства

$$x = f^{-1}\big(f(x)\big) \text{ для всех } x \in A, \tag{2}$$

$$y = f\big(f^{-1}(y)\big) \text{ для всех } y \in f(A). \tag{3}$$

Из (2) вытекает равенство $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$, то есть функция f^{-1} всегда является *сюръективной*.

Утверждение 2. *Функция $f : A \to B$ обратима тогда и только тогда, когда она инъективна. Если обратная функция f^{-1} существует, то она единственна, биективна, и функция f является обратной к ней (то есть $(f^{-1})^{-1} = f$).*

Доказательство. Если функция f инъективна, то для любого $y \in f(A)$ положим $f^{-1}(y) := x \in A$, где x — единственный элемент такой, что $f(x) = y$. Если функция f обратима, $x_1, x_2 \in A$ и $f(x_1) = f(x_2) =: y$, то $x_1 = x_2 = f^{-1}(y)$ в силу равенства (2), то есть f инъективна. Если функции $f_1^{-1}, f_2^{-1} : f(A) \to A$ являются обратными к функции f, то для любого элемента $y \in f(A)$ и элемента $x \in A$ такого, что $y = f(x)$, имеем $x = f_1^{-1}(y) = f_2^{-1}(y)$, то есть $f_1^{-1} = f_2^{-1}$. В силу сюръективности функции f^{-1} (см. замечание 5), меняя местами x и y, по определению 12 обратной функции можно проверить, что функция f является обратной к функции f^{-1}. По доказанному выше из обратимости функции f^{-1} следует её инъективность, а значит, и биективность. ◀

Замечание 6. Если функция $f\colon A \to B$ *обратима*, то для любого множества Y выполнено $f^{-1}[Y] = f^{-1}\big(Y \cap f(A)\big)$. Таким образом, в случае $Y \subset f(A)$ получаем $f^{-1}[Y] = f^{-1}(Y)$, то есть совпадение *прообраза* множества Y с *его образом под действием обратной функции*.

В заключение дадим определение декартова произведения произвольного семейства множеств, обобщающего определение 2 декартова произведения.

Определение 13 (декартова произведения семейства множеств). ***Декартовым произведением*** *семейства множеств* Ω_α, где $\alpha \in A$, называется множество

$$\prod_{\alpha \in A} \Omega_\alpha := \Big\{ f\colon A \to \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha\colon\ \forall \alpha \in A\ \big(f(\alpha) \in \Omega_\alpha\big) \Big\}.$$

Замечание 7. Из определения 13 декартова произведения семейства множеств вытекает, что

$$\prod_{\alpha \in \varnothing} \Omega_\alpha = \{\varnothing\},$$

и что в случае существования $\alpha_0 \in A$, для которого $\Omega_{\alpha_0} = \varnothing$, имеем

$$\prod_{\alpha \in A} \Omega_\alpha = \varnothing.$$

Также нетрудно проверить, что *аксиома выбора* (см. § 0.3) эквивалентна утверждению о том, что *декартово произведение произвольного семейства непустых множеств не пусто.*

§ 0.6. Упорядоченные множества и лемма Цорна

Определение 1 (бинарного отношения). ***Бинарным отношением*** между множествами A и B называется произвольное множество $R \subset A \times B$. Вместо $(x, y) \in R$ будем использовать обозначение $x\,R\,y$. В случае $A = B$ бинарное отношение R называется ***бинарным отношением на множестве*** A. Множество $\mathrm{Dom}(R) = \{x : \exists y\ (x, y) \in R\}$ называется ***областью определения бинарного отношения*** R.

Замечание 1. Отметим, что в случае $\Omega \subset A$ любая *функция* $f : \Omega \to B$ (см. определение 5.3) является *бинарным отношением* между множествами A и B.

Определение 2 (отношения эквивалентности). Бинарное отношение $\sim$ на множестве A называется ***отношением эквивалентности***, если для любых $a, b, c \in A$ выполнено:

1) $a \sim a$ (*рефлексивность*);
2) $a \sim b \implies b \sim a$ (*симметричность*);
3) $a \sim b \;\&\; b \sim c \implies a \sim c$ (*транзитивность*).

Определение 3 (класса эквивалентности). Пусть на множестве A определено некоторое *отношение эквивалентности* $\sim$. ***Классом эквивалентности*** на множестве A по отношению $\sim$ называется любое *непустое* множество $S \subset A$ такое, что $x \sim y$ для всех $x, y \in S$ и $x \nsim z$ для всех $x \in S$, $z \in A \setminus S$.

Определение 4 (разбиения множества). ***Разбиением множества*** A называется любое множество Ω, состоящее из *непустых попарно непересекающихся подмножеств* A и такое, что $\bigsqcup \Omega = A$.

Замечание 2. Пусть S_1, S_2 — некоторые *пересекающиеся классы эквивалентности* на множестве A, то есть существует $a \in S_1 \cap S_2$. Если существует $x_0 \in S_1 \setminus S_2$, то $S_2 \ni a \sim x_0 \notin S_2$, что противоречит определению 3 класса эквивалентности. Таким образом, $S_1 \setminus S_2 = \varnothing$ и $S_1 \subset S_2$. Аналогично устанавливается вложение $S_2 \subset S_1$, а значит, $S_1 = S_2$. Таким образом, *классы эквивалентности на множестве A либо не пересекаются, либо совпадают.*

Теорема 1 (о классах эквивалентности). *Пусть на множестве $A \neq \varnothing$ определено некоторое отношение эквивалентности $\sim$, тогда множество Ω всех классов эквивалентности на множестве A по отношению $\sim$ является разбиением множества A.*

Доказательство. По определению 3 класса эквивалентности множество Ω состоит из непустых подмножеств A, попарно непересекающихся в силу замечания 2. По тому же определению проверяется, что для любого $x_0 \in A$ множество $[x_0] := \{x \in A : x \sim x_0\}$ является *классом эквивалентности*, а следовательно, $\{[x] : x \in A\} \subset \Omega$ (на самом деле $\{[x] : x \in A\} = \Omega$, что легко проверяется в силу замечания 2). Так как $x \in [x]$ для всех $x \in A$, то

$$A \subset \bigsqcup \{[x] : x \in A\} \subset \bigsqcup \Omega.$$

Из очевидного вложения $\bigsqcup \Omega \subset A$ получаем равенство $\bigsqcup \Omega = A$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Определение 5. Бинарное отношение $\preccurlyeq$ на множестве A называется ***отношением частичного порядка*** (или ***частичным порядком*** на множестве A), если для любых $a, b, c \in A$ выполнено:

1) $a \preccurlyeq a$ (*рефлексивность*);
2) $a \preccurlyeq b \;\&\; b \preccurlyeq a \implies a = b$ (*антисимметричность*);
3) $a \preccurlyeq b \;\&\; b \preccurlyeq c \implies a \preccurlyeq c$ (*транзитивность*).

При этом пару $(A, \preccurlyeq)$ называют ***частично упорядоченным множеством***. Если для любых $a, b \in A$ выполнено $a \preccurlyeq b$ или $b \preccurlyeq a$, то отношение $\preccurlyeq$ называется ***линейным порядком***. Для линейного порядка на множестве A будем использовать обозначение $\leqslant$, а пару $(A, \leqslant)$ называть ***линейно упорядоченным*** (или просто ***упорядоченным***) ***множеством***.

Определение 6 (строгого частичного порядка). Бинарное отношение $\prec$ на множестве A называется ***отношением строгого частичного порядка*** (или ***строгим частичным порядком*** на множестве A), если для любых $a, b, c \in A$ выполнено:

1) $a \not\prec a$ (*антирефлексивность*);
2) $a \prec b \implies b \not\prec a$ (*асимметричность*);
3) $a \prec b \;\&\; b \prec c \implies a \prec c$ (*транзитивность*).

Замечание 3. Любое отношение $\preccurlyeq$ частичного порядка на множестве A порождает соответствующее ему отношение $\prec$ строгого частичного порядка по правилу

$$a \prec b \overset{def}{\iff} a \preccurlyeq b \;\&\; a \neq b.$$

Обратно, любое отношение $\prec$ строгого частичного порядка на множестве A порождает соответствующее ему отношение $\preccurlyeq$ частичного порядка по правилу

$$a \preccurlyeq b \overset{def}{\iff} a \prec b \;\vee\; a = b.$$

Определение 7 (цепи). Пусть $(A, \preccurlyeq)$ — *частично упорядоченное множество*. Любое множество $C \subset A$, *линейно упорядоченное* по отношению $\preccurlyeq$ (то есть для любых $x, y \in C$ выполнено $x \preccurlyeq y$ или $y \preccurlyeq x$), называется ***цепью*** в $(A, \preccurlyeq)$.

Определение 8 (начального сегмента). Пусть $(A, \preccurlyeq)$ — *частично упорядоченное множество*, C — *цепь* в $(A, \preccurlyeq)$ и $x_0 \in C$. Множество $\operatorname{Seg}(C, x_0) := := \{x \in C : x \prec x_0\}$ будем называть ***начальным сегментом*** цепи C.

Определение 9. Пусть $(A, \preccurlyeq)$ — *частично упорядоченное множество*. Множество $\Omega \subset A$ называется ***ограниченным сверху [снизу]*** в $(A, \preccurlyeq)$, если существует элемент $M \in A$ $[m \in A]$ такой, что $x \preccurlyeq M$ $[m \preccurlyeq x]$ для всех $x \in \Omega$. При этом элемент M $[m]$ называется ***верхней [нижней] границей*** множества Ω.

Определение 10. Пусть $(A, \preccurlyeq)$ — *частично упорядоченное множество*. Элемент $M \in A$ $[m \in A]$ называется ***максимальным [минимальным] элементом*** в $(A, \preccurlyeq)$, если

$$M \preccurlyeq a \implies a = M \; [a \preccurlyeq m \implies a = m] \text{ для всех } a \in A.$$

Замечание 4. Отметим, что в *линейно* упорядоченном множестве может существовать лишь один максимальный [минимальный] элемент, тогда как в *частично* упорядоченном множестве таких элементов, вообще говоря, может быть много. Элемент M $[m]$ частично упорядоченного множества $(A, \preccurlyeq)$, для которого при всех $x \in A$ выполнено $x \preccurlyeq M$ $[m \preccurlyeq x]$, называется ***наибольшим [наименьшим]***. Наибольший [наименьший] элемент автоматически является максимальным [минимальным], при этом для *линейно* упорядоченных множеств эти понятия *совпадают*. Также из антисимметричности отношения $\preccurlyeq$ вытекает, что наибольший [наименьший] элемент в случае его существования всегда единственен. Для максимального [минимального] элемента *линейно упорядоченного множества* Ω будем использовать обозначение $\max \Omega$ $[\min \Omega]$.

Определение 11 (вполне упорядоченного множества). *Линейно упорядоченное множество* $(A, \leqslant)$ называется ***вполне упорядоченным***, если в любом непустом множестве $\Omega \subset A$ найдётся *минимальный элемент* (то есть элемент $m \in \Omega$ такой, что $m \leqslant x$ для всех $x \in \Omega$).

Теорема 2 (Куратовского [Лемма Цорна]). *Пусть $(A, \preccurlyeq)$ — частично упорядоченное множество, в котором любая цепь ограничена сверху. Тогда в $(A, \preccurlyeq)$ существует максимальный элемент.*

Доказательство. Обозначим через $\prec$ *строгий частичный порядок, порождённый частичным порядком* $\preccurlyeq$ (см. замечание 3). Предположим, что в $(A, \preccurlyeq)$ не существует максимального элемента (то есть для любого $x \in A$ найдётся $y \in A$ такой, что $x \prec y$). По условию теоремы у любой *цепи* $C \subset A$ существует верхняя граница $M \in A$, а следовательно (согласно нашему предположению), и элемент $y \in A$ такой, что $M \prec y$. В силу транзитивности и антисимметричности отношения $\preccurlyeq$, получаем $x < y$ для всех $x \in C$. Таким образом, для любой цепи C

множество $\Omega_c := \{y : \forall x \in C\ (x \prec y)\}$ её строгих верхних границ *непусто*. Применяя для множества $\{\Omega_c : C$ — цепь в $(A, \preccurlyeq)\}$ *аксиому выбора* (см. § 0.3), получим функцию f такую, что $f(C) \in \Omega_c$ для любой цепи C. Цепь $C \subset A$, вполне упорядоченную по отношению $\preccurlyeq$ (то есть такую, что в любом множестве $S \subset C$ существует элемент $m \in S$ (называемый *минимальным* в S) такой, что $m \preccurlyeq x$ для всех $x \in S$), будем называть ***согласованной*** с f, если для любого $x \in C$ выполнено $x = f\big(\operatorname{Seg}(C, x)\big)$ (см. определение 8 начального сегмента).

Далее рассмотрим две произвольные цепи $C \neq D$, *согласованные* с f. Покажем, что одна из этих цепей является *начальным сегментом* другой.

Если $C \subset D$ и $D \subset C$, то $C = D$, поэтому, не ограничивая общности, рассмотрим случай $C \not\subset D$, что равносильно $C \setminus D \neq \varnothing$. Обозначим $x := \min(C \setminus D)$, существующий по определению 11 вполне упорядоченного множества. Предположим, что $\operatorname{Seg}(C, x) \neq D$. По определению x имеем $\operatorname{Seg}(C, x) \subset D$, поэтому $D \setminus \operatorname{Seg}(C, x) \neq \varnothing$. По определению 11 вполне упорядоченного множества существует $y := \min\big(D \setminus \operatorname{Seg}(C, x)\big)$, причём $y \in D$. Так как $C \setminus \operatorname{Seg}(D, y) \supset C \setminus D \neq \varnothing$, то по тому же определению существует $z := \min\big(C \setminus \operatorname{Seg}(D, y)\big)$, причём $z \in C$ и $z \preccurlyeq x$ по определению x. Если $u \in C$ и $u \prec z$, то $u \in \operatorname{Seg}(D, y)$ по определению z. Таким образом, установлено вложение $\operatorname{Seg}(C, z) \subset \operatorname{Seg}(D, y)$. Если $v \in D$ и $v \prec y$, то $v \in \operatorname{Seg}(C, x)$ по определению y, то есть $v \in C$ и $v \prec x$. В случае $z \preccurlyeq v$ по транзитивности получаем $z \prec x$ и $z \prec y$, а значит, $z \in D$ по определению x и $z \in \operatorname{Seg}(D, y)$, что противоречит определению z. В случае $v \prec z$ имеем $v \in \operatorname{Seg}(C, z)$, а следовательно, установлено вложение $\operatorname{Seg}(D, y) \subset \operatorname{Seg}(C, z)$ и равенство $\operatorname{Seg}(D, y) = \operatorname{Seg}(C, z)$. Так как C и D согласованы с f, то

$$y = f\big(\operatorname{Seg}(D, y)\big) = f\big(\operatorname{Seg}(C, z)\big) = z,$$

а значит, $D \not\ni x \neq z = y \in D$, поэтому $z \prec x$. Таким образом, получили $y = z \in \operatorname{Seg}(C, x)$, что противоречит определению y. Полученное противоречие означает, что наше исходное предположение неверно, следовательно, $\operatorname{Seg}(C, x) = D$.

Теперь рассмотрим произвольную цепь C, *согласованную* с f, произвольный $x \in C$ и произвольный $y \prec x$. Покажем, что либо $y \in C$, либо y не принадлежит никакому *согласованному* с f множеству.

Пусть это не так, тогда $y \notin C$ и $y \in D$, где D *согласовано* с f. По доказанному выше выполнено $D \subset C$ или $C \subset D$. В первом случае получаем противоречие с тем, что $y \notin C$. Во втором случае для некоторого $z \in D$ имеем $C = \operatorname{Seg}(D, z)$, поэтому $x \in D$ и $x \prec z$, а значит, и $y \prec z$ по транзитивности. Так как $y \in D$, имеем $y \in \operatorname{Seg}(D, z) = C$, снова получили противоречие.

Далее рассмотрим множество U, являющееся *объединением всех подмножеств A, согласованных* с f. Покажем, что U является *цепью, согласованной* с f.

Если $x, y \in U$, то для некоторых *согласованных* с f множеств C и D имеем $x \in C$ и $y \in D$. Так как $D \subset C$ или $C \subset D$, то $x, y \in C$ или $x, y \in D$. В силу линейной упорядоченности цепей C и D это означает, что $x \preccurlyeq y$ или $y \preccurlyeq x$. Таким образом проверено, что U — *цепь*.

Теперь для любого непустого множества $S \subset U$ рассмотрим его произвольный элемент $s_0 \in S$. Так как $s_0 \in U$, то $s_0 \in C$, где C *согласовано* с f. Так как C вполне упорядочено, то существует $m := \min(C \cap S)$. Далее рассмотрим произвольный $x \in S$ и покажем, что $m \preccurlyeq x$. Если $x \in C$, то требуемое неравенство выполнено по определению m. Если $x \notin C$, то $x \in D$, где D *согласовано* с f и $D \not\subset C$, а значит, для некоторого $z \in D$ имеем $C = \operatorname{Seg}(D, z)$ и $z \preccurlyeq x$. Так как $C \ni m \prec z$, то по транзитивности получаем $m \prec x$, и требуемое неравенство установлено. Так как $m \in S$, то $m = \min S$, а следовательно, множество U *вполне упорядочено*.

Далее для произвольного $x \in U$ имеем $x \in C$, где C *согласовано* с f, а значит, $x = f\big(\operatorname{Seg}(C, x)\big)$. Так как $C \subset U$ по определению U, то $\operatorname{Seg}(C, x) \subset \operatorname{Seg}(U, x)$. Если $y \prec x$, то по доказанному выше $y \in C$ или $y \notin U$, отсюда вытекает вложение $\operatorname{Seg}(U, x) \subset \operatorname{Seg}(C, x)$, а следовательно, и равенство $\operatorname{Seg}(U, x) = \operatorname{Seg}(C, x)$. Таким образом,

$$f\big(\operatorname{Seg}(U, x)\big) = f\big(\operatorname{Seg}(C, x)\big) = x$$

и нами доказано, что U *согласовано* с f.

Для завершения доказательства рассмотрим $x := f(U)$ и $\Omega := U \cup \{x\}$. Из того, что U вполне упорядочено и $y \prec x$ для всех $y \in U$ вытекает, что Ω *вполне упорядочено*. Также для любого $y \in U$ имеем $\operatorname{Seg}(\Omega, y) = \operatorname{Seg}(U, y)$, а следовательно, $f\big(\operatorname{Seg}(\Omega, y)\big) = f\big(\operatorname{Seg}(U, y)\big) = y$ в силу того, что U согласовано с f. Так как $\operatorname{Seg}(\Omega, x) = U$, то $f\big(\operatorname{Seg}(\Omega, x)\big) = f(U) = x$, а значит равенство $f\big(\operatorname{Seg}(\Omega, z)\big) = z$ проверено для всех $z \in \Omega$. Таким образом, множество Ω *согласовано* с f, а значит, по определению U имеем $\Omega \subset U$ и $f(U) = x \in U$, что противоречит определению функции f и завершает доказательство теоремы. ◄

Замечание 5. При доказательстве леммы Цорна мы пользовались *аксиомой выбора* (см. § 0.3). Оказывается, что в аксиоматике ZF утверждение аксиомы выбора вытекает из леммы Цорна (см., например, [34, с. 54]), следовательно, эти утверждения *эквивалентны*. С другими утверждениями, эквивалентными аксиоме выбора, а также с некоторыми её следствиями можно ознакомиться, например, в [40].

Лемма 1. *Если множество $\Omega := \{f \subset A \times B : f$ – инъективная функция$\}$ имеет максимальный элемент F по отношению $\subset$, то либо $F : A \to B$ является инъекцией, либо $F^{-1} : B \to A$* (см. определение 5.12 обратной функции) *является инъекцией.*

Доказательство. Тривиально проверяется, что бинарное отношение $f \preccurlyeq g \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f \subset g$ на множестве Ω является *отношением частичного порядка* согласно определению 5. Если $\mathrm{Dom}(F) = A$, то $F : A \to B$ является инъекцией, так как $F \in \Omega$. Если $\mathrm{Dom}(F) \Subset A$, то существует $a_0 \in A \setminus \mathrm{Dom}(F)$. Так как элемент F является максимальным, то для любого $b \in B$ имеем $F_1 := F \cup \{(a_0, b)\} \notin \Omega$, то есть F_1 *не является инъективной функцией*. Так как F_1 является *функцией* по определению 5.3, то она *не инъективна*, а следовательно, существует $a_1 \in \mathrm{Dom}(F)$ такой, что $F(a_1) = b$. В силу произвольности $b \in B$ получаем $F\big(\mathrm{Dom}(F)\big) = B$. Так как F инъективна, то функция $F^{-1} : B \to \mathrm{Dom}(F) \subset A$ является инъективной по утверждению 5.2. ◄

Теорема 3. *Для произвольных множеств A и B существует инъекция $f : A \to B$ или инъекция $g : B \to A$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\Omega := \{f \subset A \times B : f$ — инъективная функция$\}$. В силу леммы 1 для доказательства теоремы достаточно проверить, что частично упорядоченное множество $(\Omega, \subset)$ имеет *максимальный элемент*. Рассмотрим *произвольную цепь* C в $(\Omega, \subset)$. В силу теоремы 2 Куратовского [Лемма Цорна] нам достаточно доказать, что C ограничена сверху в $(\Omega, \subset)$. Так как для любого $f \in C$ выполнено $f \subset \bigcup C$, то для завершения доказательства остаётся проверить, что $\bigcup C \in \Omega$.

Из того, что $f \subset A \times B$ для всех $f \in C$ вытекает, что $\bigcup C \subset A \times B$. Если $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \bigcup C$, то для некоторых инъективных функций $f, g \in C$ имеем $(x_1, y_1) \in f$ и $(x_2, y_2) \in g$. Так как C — цепь, то $f \subset g$ или $g \subset f$, а следовательно, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in g$ или $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$. Если $x_1 = x_2$, то $y_1 = y_2$ по определению 5.3 функции, а следовательно, $\bigcup C$ — *функция*. Если $y_1 = y_2$, то $x_1 = x_2$ по определению 5.9 инъекции, а следовательно, $\bigcup C$ — *инъекция*. Получили $\bigcup C \in \Omega$ по определению Ω, что и завершает доказательство теоремы. ◄

Определение 12 (линейной независимости). Пусть V — *линейное пространство над полем* $\mathcal{R}$. Множество $S \subset V$ будем называть ***линейно независимым***, если для любого $n \in \mathbb{N}$, любых *попарно различных* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in S$ и любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{R}$ из равенства $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ следует, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Определение 13 (линейного базиса). Пусть V — *линейное пространство над полем* $\mathcal{R}$. *Линейно независимое* множество $B \subset V$ будем называть ***линейным базисом*** (***базисом Гамеля***) пространства V, если для любого $\mathbf{x} \in V$ существуют $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in B$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{R}$ такие, что $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n$.

Лемма 2. *Пусть V — линейное пространство над полем $\mathcal{R}$ и $V \supset S_0$ — линейно независимое множество. Если множество $\Omega := \{S : S_0 \subset S \subset V$ и S линейно независимо$\}$ имеет максимальный элемент B по отношению $\subset$, то множество B является линейным базисом пространства V.*

Доказательство. Так как $B \in \Omega$, то B линейно независимо. Далее предположим, что B не является базисом V, то есть существует $\mathbf{x} \in V$ такой, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in B$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{R}$ выполнено

$$\mathbf{x} \neq \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n. \tag{1}$$

Очевидно, что $\mathbf{x} \notin B$, а следовательно, $B \Subset B \cup \{\mathbf{x}\}$. Для доказательства леммы достаточно показать, что множество $B \cup \{\mathbf{x}\}$ линейно независимо, а это противоречит максимальности B в $(\Omega, \subset)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$, элементы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in B \cup \{\mathbf{x}\}$ попарно различны, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{R}$ и

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Если $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in B$, то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ в силу линейной независимости множества B. Если $\mathbf{v}_i \notin B$ для некоторого $i \in \overline{1,k}$, то $\mathbf{v}_i = \mathbf{x}$ и $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_k \in B$. Если при этом $\alpha_i = 0$, то снова получаем $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ в силу линейной независимости B. Если $\alpha_i \neq 0$, то

$$\mathbf{x} = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\right)\mathbf{v}_1 + \ldots + \left(-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right)\mathbf{v}_{i-1} + \left(-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right)\mathbf{v}_{i+1} + \ldots + \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_i}\right)\mathbf{v}_k,$$

что противоречит (1). Получили линейную независимость множества $B \cup \{\mathbf{x}\}$, что и завершает доказательство леммы. ◀

Теорема 4 (о линейном базисе). *Пусть V — линейное пространство над полем $\mathcal{R}$ и $V \supset S_0$ — линейно независимое множество, тогда существует линейный базис B пространства V такой, что $S_0 \subset B$ (то есть любое линейно независимое множество можно дополнить до базиса). В частности, у любого линейного пространства существует линейный базис.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\Omega := \{S : S_0 \subset S \subset V$ и S линейно независимо$\}$. В силу леммы 2 для доказательства теоремы достаточно проверить, что частично упорядоченное множество $(\Omega, \subset)$ имеет *максимальный элемент*. Рассмотрим *произвольную цепь* C в $(\Omega, \subset)$. В силу теоремы 2 Куратовского [Лемма Цорна] нам достаточно доказать, что C ограничена сверху в $(\Omega, \subset)$. Если $C = \varnothing$, то C ограничена сверху элементом $S_0 \in \Omega$. Так как для любого $S \in C$ выполнено $S \subset \bigcup C$, то для завершения доказательства остаётся проверить, что $\bigcup C \in \Omega$ для любой цепи $C \neq \varnothing$.

Так как $S_0 \subset S \subset V$ для всех $S \in C$ и $C \neq \varnothing$, имеем $S_0 \subset \bigcup C \subset V$. Пусть элементы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \bigcup C$ попарно различны, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{R}$ и

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Имеем $\mathbf{x}_1 \in S_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in S_n$, где $S_1, \ldots, S_n \in C$, а следовательно, конечное множество $\{S_1, \ldots, S_n\} \subset C$ линейно упорядочено по отношению $\subset$. По индукции легко проверить, что *в любом конечном упорядоченном множестве найдётся максимальный элемент*, а следовательно, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in S_i$, где $i \in \overline{1,n}$. В силу линейной независимости множества S_i из равенства (2) следует, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, а значит, множество $\bigcup C$ линейно независимо. Получили $\bigcup C \in \Omega$ по определению Ω, что и завершает доказательство теоремы. ◀

§ 0.7. Понятие мощности множества и арифметика кардинальных чисел. Теоремы Кантора и Кантора–Бернштайна

> **Определение 1 (эквивалентных множеств).** Множества A и B называются ***эквивалентными (изоморфными)***, если существует *биекция* $\varphi\colon A \xrightarrow{\sim} B$. Обозначение: $A \sim B$.

Замечание 1. Введённое в определении 1 отношение $\sim$ действительно является *отношением эквивалентности* (см. определение 6.2) на *классе всех множеств*: *рефлексивность* вытекает из биективности тождественного отображения, *симметричность* — из того, что обратная функция к биекции также является биекцией (см. утверждение 5.2), *транзитивность* — из того, что композиция биекций является биекцией.

Далее приведём первичное наивное определение кардинального числа, исходящее от Кантора и Фреге. Современные определения кардинальных чисел зависят от выбранной аксиоматики теории множеств (см. § 0.3), и их обсуждение выходит за рамки нашего курса.

> **Определение 2 (кардинального числа).** ***Кардинальным числом (кардиналом)*** называется любой *класс эквивалентности* (см. определение 6.3) по отношению $\sim$, введённому в определении 1. Класс всех множеств, эквивалентных множеству A, называется *соответствующим* ему кардинальным числом (***мощностью*** множества A) и обозначается $\operatorname{card}(A)$ или $\#A$ в случае, когда множество A *конечно* (иногда в литературе используется обозначение $|A|$, но мы не будем им пользоваться во избежание путаницы). При этом множество A называется ***представителем кардинала*** $\operatorname{card}(A)$.

Замечание 2. Эквивалентным множествам A и B соответствуют равные кардинальные числа, а у равных кардиналов все представители попарно эквивалентны:

$$\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B) \iff A \sim B.$$

Замечание 3. Можно показать, что для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$ выполнено

$$m \sim n \iff m = n,$$

поэтому функция $n \mapsto \operatorname{card}(n)$ является *биекцией*

$$\mathbb{N}_0 \to \widetilde{\mathbb{N}}_0 := \{\operatorname{card}(n) : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Кардинальное число $\operatorname{card}(n)$, соответствующее посредством этой биекции целому неотрицательному числу $n \in \mathbb{N}_0$ (см. определение 4.1), обычно обозначают тем же символом n там, где не возникает двоякого прочтения. При этом именно $\operatorname{card}(n)$ корректно отражает саму суть понятия «число»: произвольное множество с определённым количеством элементов. Отметим также, что в аксиоматике ZFC (см. § 0.3) кардинальное число определяется таким образом, что $\operatorname{card}(n) := n$ по определению, а следовательно, $\widetilde{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}_0$.

Определение 3 (счётного кардинала $\aleph_0$). *Мощность* $\aleph_0 := \operatorname{card}(\mathbb{N})$ (читается «алеф-нуль») множества натуральных чисел называется ***счётным кардиналом (счётной мощностью)***.

Пример 1. Рассмотрим множество $E := \{2n \colon n \in \mathbb{N}\}$ чётных натуральных чисел. Заметим, что существует биекция $\varphi \colon \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} E$, определённая равенством $\varphi(n) := 2n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\mathbb{N} \sim E$ и

$$\operatorname{card}(E) \overset{\text{з. 2}}{=} \operatorname{card}(\mathbb{N}) \overset{\text{о. 3}}{=:} \aleph_0,$$

то есть чётных натуральных чисел «столько же», сколько и натуральных чисел вообще.

Определение 4 (континуума $\mathcal{C}$). *Мощность* $\mathcal{C} := \operatorname{card}\big([0,1]\big)$ множества вещественных чисел отрезка $[0,1]$ называется ***континуумом (континуальной мощностью)***.

Определение 5 (неравенства для кардиналов). Для произвольных кардинальных чисел α и β положим $\alpha \leqslant \beta$ тогда и только тогда, когда для некоторых множеств A, B и $B_1 \subset B$ выполнено: $\alpha = \operatorname{card}(A)$, $\beta = \operatorname{card}(B)$ и $A \sim B_1$. Далее для любых кардиналов α, β положим

$$\alpha < \beta \overset{def}{\iff} \alpha \leqslant \beta \;\&\; \alpha \neq \beta,$$

$$\alpha \geqslant \beta \overset{def}{\iff} \beta \leqslant \alpha,$$

$$\alpha > \beta \overset{def}{\iff} \beta < \alpha.$$

Ниже будет проверено (см. замечание 9), что введённое в определении 5 *бинарное отношение* $\leqslant$ на классе кардинальных чисел является *отношением линейного порядка* по определению 6.5 (то есть оно *рефлексивно, антисимметрично, транзитивно*, и любые два кардинала сравнимы).

Замечание 4. Из определения 5 вытекает, что неравенство $\operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(B)$ равносильно существованию такого множества $B_1 \subset B$, что $A \sim B_1$. Это, в свою очередь, равносильно существованию *инъективной* функции $\varphi\colon A \to B$ (в этом случае часто говорят, что A ***инъективно вкладывается*** в B).

Определение 6 (суммы, произведения и степени кардиналов). Пусть α и β суть произвольные *кардинальные числа*. Выберем для этих чисел *непересекающиеся представители* A и B соответственно. То есть $\alpha = \operatorname{card}(A)$, $\beta = \operatorname{card}(B)$ и $A \cap B = \varnothing$ (последнего всегда можно добиться, определив $A := \{0\} \times \widetilde{A}$ и $B := \{1\} \times \widetilde{B}$, где, вообще говоря, пересекающиеся множества $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ являются представителями кардиналов α и β соответственно). Тогда

1. ***суммой*** чисел α и β называется кардинальное число
$$\alpha + \beta := \operatorname{card}(A \sqcup B);$$
2. ***произведением*** чисел α и β называется кардинальное число
$$\alpha\beta := \operatorname{card}(A \times B);$$
3. ***степенью*** β числа α называется кардинальное число
$$\alpha^{\beta} := \operatorname{card}(A^{B}).$$

Замечание 5. По определению 2 проверяется, что сумма, произведение и степень кардиналов α и β не зависят от выбора конкретных представителей A и B этих кардиналов. Также для определения произведения и степени требование $A \cap B = \varnothing$ является несущественным.

Теорема 1 (о свойствах степеней кардинальных чисел). *Для любых кардинальных чисел α, β, γ выполнены равенства*
$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} = \gamma^{\alpha+\beta}, \tag{1}$$
$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}. \tag{2}$$

Доказательство. Докажем, например, равенство (1) (доказательство равенства (2) проводится аналогично). Выберем множества A, B, C так, что $\alpha = \operatorname{card}(A)$, $\beta = \operatorname{card}(B)$ и $\gamma = \operatorname{card}(C)$, причём, как и в определении 6, $A \cap B = \varnothing$.

Обозначим

$$\begin{aligned}\Omega_1 &\coloneqq C^A \times C^B = \{f_1\colon A \to C\} \times \{f_2\colon B \to C\},\\ \Omega_2 &\coloneqq C^{A\sqcup B} = \{g\colon A \sqcup B \to C\}.\end{aligned}$$

Заметим, что кардинальное число, стоящее в левой части равенства (1), соответствует множеству Ω_1, а в правой — множеству Ω_2. В силу замечания 2 равенство (1) равносильно тому, что $\Omega_1 \sim \Omega_2$. Теперь рассмотрим функцию $\varphi\colon \Omega_1 \to \Omega_2$, определённую равенством $\varphi(f_1, f_2) \coloneqq g$ для всех $(f_1, f_2) \in \Omega_1$, где

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} f_1(x), \text{ если } x \in A;\\ f_2(x), \text{ если } x \in B;\end{cases}$$

и докажем её биективность.

Пусть

$$\begin{aligned}\Omega_1 \ni (f_1, f_2) \neq (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2) &\in \Omega_1,\\ g &\coloneqq \varphi(f_1, f_2),\\ \widetilde{g} &\coloneqq \varphi(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2).\end{aligned}$$

Тогда либо $f_1 \neq \widetilde{f}_1$, либо $f_2 \neq \widetilde{f}_2$. Если $f_1 \neq \widetilde{f}_1$, то найдётся $x \in A$, для которого $f_1(x) \neq \widetilde{f}_1(x)$, поэтому

$$g(x) = f_1(x) \neq \widetilde{f}_1(x) = \widetilde{g}(x),$$

и $g \neq \widetilde{g}$. В случае $f_2 \neq \widetilde{f}_2$ аналогично получаем $g(y) \neq \widetilde{g}(y)$ для некоторого $y \in B$, поэтому снова $g \neq \widetilde{g}$. Таким образом установлено, что функция φ инъективна.

Далее для произвольной функции $g \in \Omega_2$ определим функции $f_1\colon A \to C$ и $f_2\colon B \to C$ равенствами $f_1(x) \coloneqq g(x)$ для всех $x \in A$ и $f_2(x) \coloneqq g(x)$ для всех $x \in B$. Тогда $(f_1, f_2) \in \Omega_1$ и $\varphi(f_1, f_2) = g$ по определению функции φ. Таким образом установлено, что функция φ сюръективна, и, в итоге, биективна, а значит, равенство (1) справедливо. ◀

Замечание 6. Отождествляя каждое натуральное число n с соответствующим ему кардинальным числом $\operatorname{card}(n)$ (см. замечание 3), определение 6 можно использовать в качестве определения суммы, произведения и степени для *натуральных чисел*. Также по определению 6 для любого кардинала γ элементарно проверяется равенство $\gamma^1 = \gamma$, где символом 1 обозначен кардинал $\operatorname{card}(1)$. Используя теорему 1, по индукции получим

$$\underbrace{\gamma\gamma\ldots\gamma}_{n \text{ штук}} = \underbrace{\gamma^1\gamma^1\ldots\gamma^1}_{n \text{ штук}} = \gamma^n,$$

что полностью согласуется с определением степени для натуральных чисел, известным из курса элементарной математики. По нашему мнению, именно определение 6 для натуральных чисел является самым естественным и элементарным из всех возможных.

Определение 7 (характеристической функции множества). Пусть $\Omega \subset A$. Функция $\mathbb{1}_\Omega = \chi_\Omega \colon A \to \{0,1\}$, определённая равенством

$$\mathbb{1}_\Omega(x) = \chi_\Omega(x) := \begin{cases} 0 \text{ при } x \notin \Omega; \\ 1 \text{ при } x \in \Omega; \end{cases}$$

называется ***характеристической функцией (индикатором)*** множества Ω.

Замечание 7. Для произвольного множества A множество 2^A состоит из всех функций $f \colon A \to \{0,1\}$, принимающих значения 0 или 1.

Замечание 8. Для произвольного множества A множество 2^A эквивалентно множеству $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств множества A: действительно, функция $\varphi \colon \mathcal{P}(A) \to 2^A$, определённая равенством $\varphi(\Omega) := \chi_\Omega$ для всех $\Omega \subset A$, биективна.

Теорема 2 (Кантора). *Для произвольного кардинала α выполнено неравенство*

$$\alpha < 2^\alpha, \tag{3}$$

то есть мощность любого множества строго меньше мощности множества всех его подмножеств.

Доказательство. Пусть $\alpha = \operatorname{card}(A)$, тогда $2^\alpha \overset{\text{О. }6}{=} \operatorname{card}\left(2^A\right)$. Рассмотрим функцию $\psi \colon A \to 2^A$, определённую равенством $\psi(x) := \chi_{\{x\}}$ для всех $x \in A$. Легко видеть, что ψ инъективна, поэтому согласно замечанию 4 имеем $\alpha \leqslant 2^\alpha$.

Далее для произвольной функции $\varphi \colon A \to 2^A$ рассмотрим функцию $f_\varphi \in 2^A$, определённую равенством

$$f_\varphi(x) := \overline{\varphi(x)(x)}$$

для всех $x \in A$ (черта сверху означает отрицание, то есть $\overline{0} = 1$ и $\overline{1} = 0$). Заметим, что $\varphi(x) \neq f_\varphi$ для всех $x \in A$, так как $\varphi(x)(x) \neq \overline{\varphi(x)(x)} = f_\varphi(x)$. Мы получили, что функция φ не является сюръективной, а следовательно, не является и биективной. В силу произвольности выбора $\varphi \colon A \to 2^A$ это означает, что $A \not\sim 2^A$, а следовательно, $\alpha \overset{\text{З. }2}{\neq} 2^\alpha$, и неравенство (3) выполнено по определению 5 неравенства для кардиналов. ◀

Теорема 3 (Кантора–Бернштайна). *Для произвольных кардиналов α и β выполнено*

$$(\alpha \leqslant \beta \ \&\ \beta \leqslant \alpha) \implies \alpha = \beta.$$

Доказательство. Фиксируем такие множества A и B, что $\alpha = \mathrm{card}(A)$ и $\beta = \mathrm{card}(B)$. Из условий $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)$ и $\mathrm{card}(B) \leqslant \mathrm{card}(A)$ в силу замечания 4 существуют такие подмножества $A_1 \subset A$ и $B_1 \subset B$, что $A \sim B_1$ и $B \sim A_1$. Но тогда существует и такое подмножество $A_2 \subset A_1$, что $B_1 \sim A_2$, а значит $A \sim A_2$. Пусть функция $\varphi\colon A \xrightarrow{\sim} A_2$ биективно отображает A на A_2. В силу замечаний 1 и 2 для доказательства теоремы достаточно показать, что $A \sim A_1$.

Обозначив $A_0 \coloneqq A$, имеем

$$A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 = \varphi\bigl(A_0\bigr). \tag{4}$$

Определим множества A_k последовательно для всех $k = 2, 3, \ldots$ равенством $A_k \coloneqq \varphi\bigl(A_{k-2}\bigr)$. Для любого $k \in \mathbb{N}_0$ из вложения $A_k \supset A_{k+1}$ справедливо

$$A_{k+2} = \varphi\bigl(A_k\bigr) \supset \varphi\bigl(A_{k+1}\bigr) = A_{k+3}.$$

Поэтому из (4) по индукции получим, что $A_k \supset A_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$ (см. рис. 1).

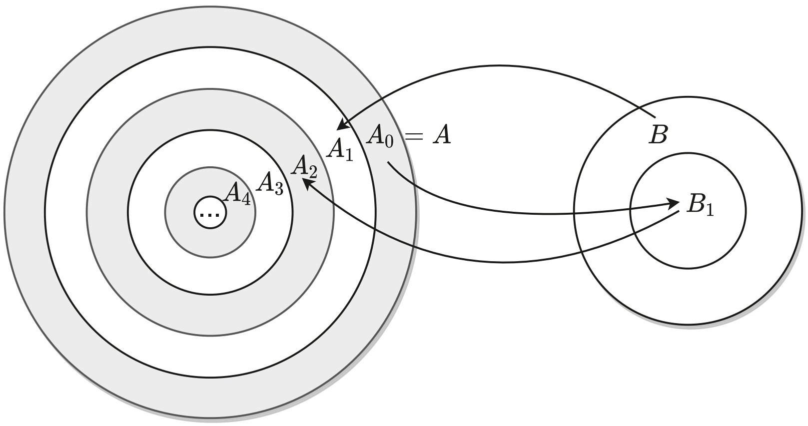


Рис. 1

Далее для всех $k \in \mathbb{N}_0$ обозначим $C_k \coloneqq A_k \setminus A_{k+1}$. Заметим, что для любых $i, j \in \mathbb{N}_0$ при $i < j$ выполнено $C_j \subset A_j \subset A_{i+1}$, а значит, $C_i \cap C_j = \varnothing$. Так как образ объединения произвольного семейства множеств всегда совпадает с объединением образов множеств этого семейства, и функция φ инъективна, а также выполнено равенство

$$A_k = (A_k \setminus A_{k+1}) \sqcup A_{k+1} = C_k \sqcup A_{k+1},$$

то выполнено

$$A_{k+2} = \varphi(A_k) = \varphi(C_k) \sqcup \varphi(A_{k+1}) = \varphi(C_k) \sqcup A_{k+3},$$

а следовательно,

$$C_{k+2} = A_{k+2} \setminus A_{k+3} = \varphi(C_k) \tag{5}$$

для всех $k \in \mathbb{N}_0$.

Обозначим $\mathcal{D} := \bigsqcup\limits_{k=0}^{\infty} C_{2k}$ (на рис. 1 множество $\mathcal{D}$ обозначено серым цветом) и из формулы (5) получим

$$\varphi(\mathcal{D}) = \varphi\Big(\bigsqcup_{k=0}^{\infty} C_{2k}\Big) = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} \varphi(C_{2k}) = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} C_{2k+2} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_{2k},$$

отсюда следует равенство

$$\mathcal{D} = C_0 \sqcup \varphi(\mathcal{D}). \tag{6}$$

Определим функцию $\psi\colon A_0 \to A_1$ равенством

$$\psi(x) := \begin{cases} \varphi(x) \text{ при } x \in \mathcal{D}; \\ x \text{ при } x \in A_0 \setminus \mathcal{D}. \end{cases}$$

Так как

$$\psi(\mathcal{D}) \cap \psi(A_0 \setminus \mathcal{D}) = \varphi(\mathcal{D}) \cap (A_0 \setminus \mathcal{D}) \overset{(6)}{=} \varnothing$$

и функция φ инъективна, то и функция ψ является инъективной. В то же время

$$\psi(A_0) = \varphi(\mathcal{D}) \sqcup (A_0 \setminus \mathcal{D}) \overset{(6)}{=} \varphi(\mathcal{D}) \sqcup \Big(A_0 \setminus \big(C_0 \sqcup \varphi(\mathcal{D})\big)\Big) =$$
$$= \varphi(\mathcal{D}) \sqcup \big((A_0 \setminus C_0) \setminus \varphi(\mathcal{D})\big) = A_0 \setminus C_0 = A_0 \setminus (A_0 \setminus A_1) = A_1,$$

следовательно, функция ψ является сюръективной, а значит, и биективной. Таким образом, $A = A_0 \sim A_1$ и теорема полностью доказана. ◀

Замечание 9. Из теоремы 3 Кантора–Бернштайна вытекает, что отношение $\leqslant$, введённое в определении 5 неравенства для кардиналов, является *отношением частичного порядка* (см. определение 6.5). Из теоремы 6.3 и замечания 4 вытекает, что для произвольных кардинальных чисел α, β выполнено $\alpha \leqslant \beta$ или $\beta \leqslant \alpha$. Таким образом, класс всех кардинальных чисел *линейно упорядочен* по отношению $\leqslant$, а отношение $<$ является *отношением строгого порядка, порождённым отношением* $\leqslant$ (см. замечание 6.3).

§ 0.8. Свойства кардиналов $\aleph_0$ и $\mathcal{C}$

В этом параграфе мы будем использовать некоторые свойства *вещественных чисел*. Отметим, что строгое определение вещественного числа со всеми вытекающими свойствами будет дано ниже в главе 1, при этом материал текущего параграфа никак не используется при выводе обозначенных свойств.

Утверждение 1.

$$\aleph_0^2 = \aleph_0.$$

Доказательство. Построим отображение $\varphi\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ по формуле

$$\varphi(m,n) := \begin{cases} (n-1)^2 + m, & \text{если } m \leqslant n;\\ (m-1)^2 + m + n, & \text{если } m > n \end{cases}$$

и докажем его инъективность. Заметим, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$

$$\big(\max(m,n) - 1\big)^2 < \varphi(m,n) \leqslant \big(\max(m,n)\big)^2.$$

Поэтому из условия $\max(m_1,n_1) < \max(m_2,n_2)$ следует, что

$$\varphi(m_1,n_1) \leqslant \big(\max(m_1,n_1)\big)^2 \leqslant \big(\max(m_2,n_2) - 1\big)^2 < \varphi(m_2,n_2).$$

А если $\max(m_1,n_1) = \max(m_2,n_2) =: M$, то

$$\big|\varphi(m_1,n_1) - \varphi(m_2,n_2)\big| = \\ = \begin{cases} |m_1 - m_2|, & \text{при } n_1 = n_2 = M;\\ |n_1 - n_2|, & \text{при } m_1 = m_2 = M;\\ |m_1 - m_2 - n_2|, & \text{при } n_1 = m_2 = M. \end{cases}$$

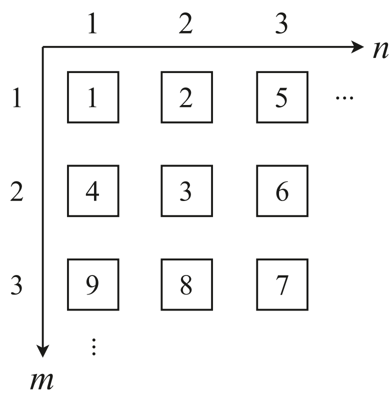


Рис. 2

В итоге получим, что $\varphi(m_1,n_1) \neq \varphi(m_2,n_2)$ при $(m_1,n_1) \neq (m_2,n_2)$ и отображение φ инъективно. Более того, φ биективно «обходит» бесконечную матрицу $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, выделяя квадрат за квадратом (см. рис. 2).

В силу инъективности φ и естественного инъективного вложения $\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ по замечанию 7.4 выполнены неравенства

$$\operatorname{card}(\mathbb{N}) \leqslant \operatorname{card}\big(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\big) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{N}),$$

и по теореме 7.3 Кантора–Бернштайна получим равенство

$$\aleph_0 \overset{\text{О. }7.3}{:=} \operatorname{card}(\mathbb{N}) = \operatorname{card}\big(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\big).$$

Теперь заметим, что

$$\operatorname{card}\big(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\big) \overset{\text{О. }7.6}{=} \aleph_0\aleph_0 \overset{\text{Т. }7.1}{=} \aleph_0^2,$$

и утверждение доказано. ◄

Следствие 1 утверждения 1. *По индукции для любого натурального кардинала n (см. замечание 7.3) получим*

$$\aleph_0^n = \aleph_0.$$

Следствие 2 утверждения 1. *Для любого натурального кардинала n из естественных вложений вытекают неравенства*

$$\aleph_0 \leqslant n\aleph_0 \leqslant \aleph_0^2 \overset{\text{Утв. 1}}{=} \aleph_0,$$

отсюда по теореме 7.3 Кантора–Бернштайна получаем

$$n\aleph_0 = \aleph_0.$$

Следствие 3 утверждения 1. *Множество $\mathbb{Z}$ целых чисел является счётным, так как*

$$\aleph_0 \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0 + \aleph_0 + 1 \leqslant 3\aleph_0 \overset{\text{С. 2}}{=} \aleph_0,$$

отсюда по теореме 7.3 Кантора–Бернштайна получаем

$$\operatorname{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0.$$

Следствие 4 утверждения 1. *Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является счётным, так как*

$$\aleph_0 \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{Q}) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}) \overset{\text{С. 3}}{=} \aleph_0^2 \overset{\text{Утв. 1}}{=} \aleph_0,$$

отсюда по теореме 7.3 Кантора–Бернштайна получаем

$$\operatorname{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0.$$

Утверждение 2.

$$\operatorname{card}\big((0,1)\big) = \operatorname{card}\big((0,1]\big) = \operatorname{card}\big([0,1)\big) = \mathcal{C}.$$

Доказательство. Положим $A \coloneqq (0,1) \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Тогда

$$(0,1) = A \sqcup \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\},$$

$$[0,1] = A \sqcup \left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Существует *биекция* $\varphi\colon (0,1) \xrightarrow{\sim} [0,1]$, действующая по формуле $\varphi(x) := x$ для всех $x \in A$, $\varphi(1/2) := 0$, $\varphi(1/3) := 1$, $\varphi(1/4) := 1/2, \ldots$, поэтому

$$\operatorname{card}\bigl((0,1)\bigr) \overset{\text{З. }7.2}{=} \operatorname{card}\bigl([0,1]\bigr) \overset{\text{О. }7.4}{=:} \mathcal{C}.$$

В силу вложений

$$(0,1) \subset (0,1], \ \ [0,1) \subset [0,1]$$

по замечанию 7.4 выполнены неравенства

$$\mathcal{C} = \operatorname{card}\bigl((0,1)\bigr) \leqslant \operatorname{card}\bigl((0,1]\bigr), \ \operatorname{card}\bigl([0,1)\bigr) \leqslant \operatorname{card}\bigl([0,1]\bigr) =: \mathcal{C}.$$

Таким образом, по теореме 7.3 Кантора–Бернштайна утверждение полностью доказано. ◀

Утверждение 3.

$$\aleph_0\mathcal{C} = \mathcal{C}.$$

Доказательство. Заметим, что отображение $(0,1) \to (1,+\infty)$, действующее по правилу $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, в силу свойств вещественных чисел является биективным, поэтому

$$\operatorname{card}\bigl((1,+\infty)\bigr) \overset{\text{З. }7.2}{=} \operatorname{card}\bigl((0,1)\bigr) \overset{\text{Утв. }2}{=} \mathcal{C}.$$

Теперь построим биекцию $\mathbb{N} \times (0,1] \xrightarrow{\sim} (1,+\infty)$ по правилу $(n,x) \mapsto n+x$ (см. рис. 3). В итоге получим

$$\aleph_0\mathcal{C} \overset{\text{О. }7.6\text{, Утв. }2}{=} \operatorname{card}\bigl(\mathbb{N} \times (0,1]\bigr) \overset{\text{З. }7.2}{=} \operatorname{card}\bigl((1,+\infty)\bigr) = \mathcal{C}. \qquad ◀$$

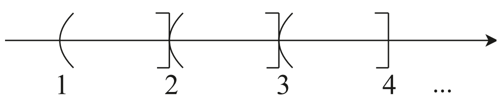


Рис. 3

Следствие 5 утверждения 3. *Для любого натурального кардинала n из естественных вложений вытекают неравенства*

$$\mathcal{C} \leqslant n\mathcal{C} \leqslant \aleph_0\mathcal{C} \overset{\textit{Утв. }3}{=} \mathcal{C},$$

отсюда по теореме 7.3 Кантора–Бернштайна получим

$$n\mathcal{C} = \mathcal{C}.$$

Следствие 6 утверждения 3. *Построив биекцию* $\mathbb{Z} \times (0,1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ *по правилу* $(z,x) \mapsto z+x$, *получим*

$$\operatorname{card}(\mathbb{R}) = \operatorname{card}\big(\mathbb{Z} \times (0,1]\big) = \aleph_0\mathcal{C} \overset{\text{Утв. } 3}{=} \mathcal{C}.$$

Теорема 1. *Множество всех подмножеств множества счётной мощности континуально, то есть имеет место равенство*

$$2^{\aleph_0} = \mathcal{C}.$$

Доказательство. Будем отождествлять числа полуинтервала $[0,1)$ с их представлениями бесконечными двоичными дробями вида $0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, не содержащими периода 1 (о различных эквивалентных определениях множества $\mathbb{R}$ вещественных чисел см. далее замечание 1.4.4). Имеем $\operatorname{card}\big([0,1)\big) \overset{\text{Утв. } 2}{=} \mathcal{C}$ и $\operatorname{card}\big(2^{\mathbb{N}}\big) \overset{\text{О. } 7.6}{=} 2^{\aleph_0}$. При этом $2^{\mathbb{N}}$ является множеством всевозможных *двоичных последовательностей* (см. замечание 7.7 и определение 5.5). Так как существует тривиальная инъекция $[0,1) \to 2^{\mathbb{N}}$, действующая по правилу $0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \mapsto \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, то $\mathcal{C} \overset{\text{З. } 7.4}{\leqslant} 2^{\aleph_0}$. В силу теоремы 7.3 Кантора–Бернштайна для завершения доказательства достаточно показать, что $2^{\aleph_0} \leqslant \mathcal{C}$.

Определим функцию $\varphi\colon 2^{\mathbb{N}} \to 2 \times [0,1)$ для всех $x \in 2^{\mathbb{N}}$ равенством

$$\varphi(x) := \begin{cases} (0;\ 0,x), & \text{если в последовательности } x \text{ не содержится период } 1; \\ (1;\ 0,\widetilde{x}), & \text{если в последовательности } x \text{ содержится период } 1; \end{cases}$$

где $\widetilde{x} := \alpha_1\ldots\alpha_n100\ldots$ при $x = \alpha_1\ldots\alpha_n011\ldots$ и $\widetilde{x} := 00\ldots$ при $x = 11\ldots$. Теперь убедимся в том, что функция φ инъективна. Пусть $x,y \in 2^{\mathbb{N}}$ и $x \neq y$. Если в одной из последовательностей x или y период 1 есть, а в другой его нет, то $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ автоматически по первой компоненте. Если в последовательностях x и y не содержится период 1, то $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ по второй компоненте, так как $0,x \neq 0,y$. Если в последовательностях x и y содержится период 1, то легко убедиться в том, что $\widetilde{x} \neq \widetilde{y}$, а следовательно, $0,\widetilde{x} \neq 0,\widetilde{y}$ и снова $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ по второй компоненте, что и завершает проверку инъективности функции φ. Так как

$$\operatorname{card}\big(2 \times [0,1)\big) \overset{\text{О. } 7.6}{=} 2\operatorname{card}\big([0,1)\big) \overset{\text{Утв. } 2}{=} 2\mathcal{C} \overset{\text{С. } 5}{=} \mathcal{C},$$

то $2^{\aleph_0} \overset{\text{З. } 7.4}{\leqslant} \mathcal{C}$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 1 (о континуум-гипотезе). Из теоремы 1 и теоремы 7.2 Кантора получаем неравенство

$$\aleph_0 < \mathcal{C} = 2^{\aleph_0}.$$

Многие годы открыто стоял вопрос: существует ли такой кардинал α, что

$$\aleph_0 < \alpha < \mathcal{C}?$$

В 1878 году Г. Кантор высказал гипотезу (называемую ***континуум-гипотезой***) о том, что такой кардинал α не существует. В 1939 году К. Гёдель доказал, что отрицание континуум-гипотезы недоказуемо в ZFC (следовательно, и множество промежуточной мощности α средствами ZFC построить невозможно), а в 1963 году П. Коэн доказал, что и сама континуум-гипотеза недоказуема в ZFC. Таким образом, предполагая непротиворечивость аксиоматики ZFC, к ней можно добавить как саму континуум-гипотезу, так и её отрицание, снова получая при этом непротиворечивую аксиоматику.

Утверждение 4.

$$\mathcal{C}^{\aleph_0} = \mathcal{C}.$$

Доказательство.

$$\mathcal{C}^{\aleph_0} \overset{\text{Т. 1}}{=} \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} \overset{\text{Т. 7.1}}{=} 2^{\aleph_0^2} \overset{\text{Утв. 1}}{=} 2^{\aleph_0} \overset{\text{Т. 1}}{=} \mathcal{C}. \qquad \blacktriangleleft$$

Следствие 7 утверждения 4. *Для любого натурального кардинала n из естественных вложений вытекают неравенства*

$$\mathcal{C} \leqslant \mathcal{C}^n \leqslant \mathcal{C}^{\aleph_0} \overset{\textit{Утв. 4}}{=} \mathcal{C},$$

отсюда по теореме 7.3 Кантора–Бернштайна получим

$$\mathcal{C}^n = \mathcal{C}.$$

Следствие 8 утверждения 4. *В силу неравенств*

$$\mathcal{C} = 2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} \leqslant \mathcal{C}^{\aleph_0} \overset{\textit{Утв. 4}}{=} \mathcal{C}$$

по теореме 7.3 Кантора–Бернштайна получим

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \mathcal{C}.$$

Определение 1 (гиперконтинуума). Кардинал $2^{\mathcal{C}}$ называется ***гиперконтинуумом***.

Утверждение 5.

$$\mathcal{C}^{\mathcal{C}} = 2^{\mathcal{C}}.$$

Доказательство.

$$\mathcal{C}^{\mathcal{C}} \overset{\text{Т. 1}}{=} \left(2^{\aleph_0}\right)^{\mathcal{C}} \overset{\text{Т. 7.1}}{=} 2^{\aleph_0 \mathcal{C}} \overset{\text{Утв. 3}}{=} 2^{\mathcal{C}} \qquad \blacktriangleleft$$

Следствие 9 утверждения 5. *Из естественных вложений вытекают неравенства*

$$2^{\mathcal{C}} \leqslant \aleph_0^{\mathcal{C}} \leqslant \mathcal{C}^{\mathcal{C}} \overset{\text{Утв. } 5}{=} 2^{\mathcal{C}},$$

отсюда по теореме 7.3 Кантора–Бернштайна получим

$$\aleph_0^{\mathcal{C}} = 2^{\mathcal{C}}.$$

Пример 1. В силу утверждения 5, определения 7.6 и следствия 6 множество

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

всех вещественных функций *гиперконтинуально*.

Глава 1

Вещественные числа

§ 1.1. Определение множества вещественных чисел и правила их сравнения

На основании некоторой аксиоматики (например ZF, см. § 0.3) определяется множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел (см. § 0.4), обладающее некоторыми базовыми свойствами, которые называются ***аксиомами Пеано***:

Существует элемент $1 \in \mathbb{N}$ и *инъективная* (см. определение 0.5.9) функция $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (называемая ***функцией следования***) такие, что выполнено:
1. $S(n) \neq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
2. Если $M \subset \mathbb{N}$, $1 \in M$ и $S(n) \in M$ для всех $n \in M$, то $M = \mathbb{N}$ (*принцип индукции*).

Замечание 1. В § 0.4 роль $S(n)$ играет элемент n++ (см. определение 0.4.2).

Далее на множестве $\mathbb{N}$ определяются *отношение порядка* $\leqslant$ (см. определение 0.6.5) и арифметические операции сложения $(+) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и умножения $(\cdot) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Затем на основании свойств натуральных чисел строится множество $\mathbb{Z}$ целых чисел, а уже потом — множество рациональных чисел. Все эти построения традиционно относятся к курсу элементарной математики, хотя строгое их обоснование должно опираться на некоторую аксиоматику теории множеств, а следовательно, выходит за рамки стандартного школьного курса. Более подробно о натуральных числах написано в [38]. Ниже мы приводим определение и основные свойства рациональных чисел.

Пусть $\dfrac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ — *несократимая дробь*. Класс $r := \left\{ \dfrac{pn}{qn} : n \in \mathbb{N} \right\}$ будем называть *рациональным числом*, множество всех рациональных чисел будем обозначать символом $\mathbb{Q}$. Из курса элементарной математики известны определения *отношения порядка* $\leqslant$ (см. определение 0.6.5), арифметических операций сложения $(+) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ и умножения $(\cdot) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, а также основные свойства: существуют *различные* элементы $0, 1 \in \mathbb{Q}$ такие, что для любых $a, b, c \in \mathbb{Q}$ выполнено:

1. $a + b = b + a$ (*коммутативность* сложения).
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*ассоциативность* сложения).

3. $a + 0 = a$.
4. $\exists -a \in \mathbb{Q} : a + (-a) = 0$.
5. $ab = ba$ (*коммутативность* умножения).
6. $(ab)c = a(bc)$ (*ассоциативность* умножения).
7. $a \cdot 1 = a$.
8. Если $a \neq 0$, то $\exists a^{-1} \in \mathbb{Q} : aa^{-1} = 1$.
9. $(a+b)c = ac+bc$ (*дистрибутивность* умножения относительно сложения).
10. $a \leqslant a$ (*рефлексивность отношения* $\leqslant$).
11. Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$ (*антисимметричность отношения* $\leqslant$).
12. Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$ (*транзитивность отношения* $\leqslant$).
13. Одно из соотношений $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$ всегда имеет место.
14. Если $a \leqslant b$, то $a + c \leqslant b + c$.
15. Если $0 \leqslant a$ и $0 \leqslant b$, то $0 \leqslant ab$.
16. Существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ штук}} = n > a$ (*принцип Архимеда*).

При этом соотношение $a < b$ означает, что $a \leqslant b$ и $a \neq b$, а запись $a > b$ ($a \geqslant b$) по определению означает, что $b < a$ ($b \leqslant a$).

Замечание 2. Отметим, что описанные выше свойства 1–9 определяют на множестве $\mathbb{Q}$ структуру ***поля***, свойства 10–13 — структуру ***линейно упорядоченного множества*** (см. определение 0.6.5), а все вместе свойства 1–15 — структуру ***упорядоченного поля***. Упорядоченное поле, в котором выполнено свойство 16 (принцип Архимеда), называется ***архимедовым упорядоченным полем***.

Определение 1. Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$. В случае $m \leqslant n$ будем использовать обозначение

$$\overline{m, n} := \{m, \ldots, n\}.$$

Если $m > n$, то

$$\overline{m, n} := \varnothing.$$

Далее рассмотрим множество $\widehat{\mathbb{R}}$, состоящее из всевозможных *бесконечных десятичных дробей* вида $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, где $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i \in \overline{0, 9}$ при всех $i \in \mathbb{N}$ (знак $+$, как правило, будем опускать). Для *десятичных дробей* $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \in \widehat{\mathbb{R}}$ и $b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots \in \widehat{\mathbb{R}}$ равенство $a = b$ по определению означает, что знаки этих дробей совпадают и $\alpha_k = \beta_k$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Из курса элементарной математики известно, что каждому рациональному числу r с помощью алгоритма деления в столбик можно однозначно поставить в соответствие *бесконечную десятичную дробь*, причём полученная дробь всегда будет *периодической*, например, $-\dfrac{1}{6} = -0,1(6)$, $\dfrac{1}{7} = 0,(142857)$, где в круглые скобки взят соответствующий период. Если десятичная дробь $a \in \widehat{\mathbb{R}}$ имеет вид $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_k(0)$, то мы будем называть её *конечной* и сокращённо писать $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_k$, автоматически подразумевая, что дальше идёт бесконечная последовательность нулей. Известно, например, что для рациональных чисел вида $\dfrac{p}{2^s 5^l}$ (и только для них, если дробь *несократимая*) деление в столбик порождает конечную десятичную дробь. Тут возникает *основная трудность рассмотрения чисел как бесконечных десятичных дробей*: десятичные дроби вида $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_k(0)$, где $\alpha_k \geqslant 1$, и $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots (\alpha_k - 1)(9)$ определяют одно и то же число (предположив, что эти числа различны, мы не сможем вставить между ними никакое число, отличное от них обоих, что противоречит интуиции и невозможно в архимедовых полях). Эта ситуация вполне аналогична той, которая вынуждает нас отождествлять рациональные числа $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{2}{4}$. В связи с этим дадим следующее естественное определение.

Определение 2. Десятичные дроби

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \in \widehat{\mathbb{R}} \ \text{ и } \ b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \in \widehat{\mathbb{R}}$$

будем называть ***эквивалентными*** либо если $\alpha_k = \beta_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$, либо если они одного знака и $\alpha_k = \beta_k$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$, либо если a и b суть различные десятичные представления одного и того же числа, в одном из которых содержится период 0, а в другом — период 9. Обозначение: $a \sim b$.

Нетрудно проверить, что введённое в определении 2 *бинарное отношение* $\sim$ на $\widehat{\mathbb{R}}$ действительно является *отношением эквивалентности* по определению 0.6.2 (то есть оно *рефлексивно, симметрично и транзитивно*).

Таким образом, мы подошли к основному определению.

Определение 3 (вещественного числа). ***Вещественным*** (или ***действительным***) ***числом*** называется любой *класс эквивалентности* (см. определение 0.6.3) на множестве $\widehat{\mathbb{R}}$ бесконечных десятичных дробей по отношению $\sim$, введённому в определении 2. Класс x всех десятичных дробей, эквивалентных десятичной дроби $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$, называется *соответствующим* ей вещественным числом. При этом a называется ***десятичным представлением*** числа x. Вместо $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \in x$ будем использовать запись $x = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ (при этом понимая, что эта условная запись *не есть равенство двух объектов в теоретико-множественном смысле*). Множество всех вещественных чисел будем обозначать символом $\mathbb{R}$.

Замечание 3. Согласно определениям 2 и 3 у каждого вещественного числа существует либо одно (например $x = 0,121122111222\ldots$), либо два *эквивалентных десятичных представления* (например $x = 0,1$ и $x = 0,0999\ldots$).

Замечание 4. Как отмечалось выше, каждому рациональному числу $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ по алгоритму деления в столбик ставится в соответствие некоторая десятичная дробь $a \in \widehat{\mathbb{R}}$, а ей по определению 3 вещественного числа ставится в соответствие вещественное число $x \in \mathbb{R}$. В этом случае наряду с записью $x = a$ будем также пользоваться записью $x = \dfrac{p}{q}$. Также отметим, что мы построили некоторое отображение $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

Определение 4 (неравенства для вещественных чисел). Для любых двух *десятичных дробей* $a, b \in \widehat{\mathbb{R}}$ вида $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, $b = \beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ положим $a < b$ тогда и только тогда, когда существует индекс $k \in \mathbb{N}_0$ такой, что $\alpha_i = \beta_i$ для всех $i \in \overline{0, k-1}$ и $\alpha_k < \beta_k$.

Пусть числа $x, y \in \mathbb{R}$ имеют *десятичные представления* a, b соответственно. Положим $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда выполнено либо $x = y$, либо одно из следующих условий:

- $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, $b = \beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ и $a < b$;
- $a = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, $b = -\beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ и $\beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots < \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$;
- $a = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, $b = \beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\ldots$

Далее для любых $x, y \in \mathbb{R}$ положим

$$x < y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \leqslant y \;\&\; x \neq y,$$

$$x \geqslant y \overset{def}{\Longleftrightarrow} y \leqslant x,$$

$$x > y \overset{def}{\Longleftrightarrow} y < x.$$

Нетрудно убедиться в корректности данного определения, то есть в его независимости от того, какие из возможных десятичных представлений a, b для чисел x, y были использованы. Требуется рассмотреть девять возможных случаев: у каждого из чисел x, y могут быть либо 1) двоичные представления лишь со знаком $+$, либо 2) двоичные представления лишь со знаком $-$, либо 3) двоичные представления как со знаком $+$, так и со знаком $-$ (и в этом случае, очевидно, соответствующее число равно нулю). Достаточно рассмотреть лишь случай 1)–1) (см. лемму 1 ниже), так как случай 2)–2) к нему сводится, а рассмотрение оставшихся семи случаев тривиально и предоставляется читателю.

Лемма 1. *Для любых десятичных дробей a, b, $\widetilde{b}$ вида*

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}\alpha_m\alpha_{m+1}\ldots,$$

$$b = \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_{m-1}\beta_m 000\ldots, \qquad \widetilde{b} = \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_{m-1}(\beta_m - 1)999\ldots$$

таких, что $b, \widetilde{b} \neq a$, имеем:

(а) $a < b \iff a < \widetilde{b}$;

(б) $b < a \iff \widetilde{b} < a$.

Доказательство. Докажем утверждение (а), утверждение (б) проверяется аналогично.

$\Longrightarrow$: Обозначим через k первый из номеров, в котором дроби a и b различаются. Если $k \leqslant m-1$, то мы автоматически получаем $a < \widetilde{b}$. Пусть $k = m$, тогда $\alpha_m \leqslant \beta_m - 1$. Если $\alpha_m < \beta_m - 1$, то снова получаем $a < \widetilde{b}$. Если $\alpha_m = \beta_m - 1$, то среди десятичных знаков $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2} \dots$ найдётся отличный от 9, так как по условию леммы $a \neq \widetilde{b}$. Снова получили $a < \widetilde{b}$. Случай $k \geqslant m+1$ невозможен, так как тогда мы имели бы $\alpha_k < 0$.

$\Longleftarrow$: Обозначим через k первый из номеров, в котором дроби a и $\widetilde{b}$ различаются. Если $k \leqslant m-1$, то мы автоматически получаем $a < b$. Если $k \geqslant m$, то мы имеем $\alpha_0 = \beta_0, \dots, \alpha_{m-1} = \beta_{m-1}$ и $\alpha_m \leqslant \beta_m - 1 < \beta_m$, что по определению означает $a < b$. ◀

Далее по определению 4 неравенства для вещественных чисел элементарно проверяется выполнение для любых $a, b \in \mathbb{R}$ свойств 10, 11 и 13. Проверим свойство 12 транзитивности.

Лемма 2 (о транзитивности отношения порядка на множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел). *Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}$ и $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, тогда $x \leqslant z$.*

Доказательство. Пусть $a, b, c \in \widehat{\mathbb{R}}$ и $x = a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$, $y = b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3\dots$, $z = c = \pm\gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\dots$. Рассмотрим возможные случаи:

1^0: a имеет знак $+$;

2^0: a имеет знак $-$, c имеет знак $+$;

3^0: a и c имеют знак $-$.

1^0. По определению 4 неравенства для вещественных чисел из того, что b имеет знак $-$ вытекает, что $a = +0$, $b = -0$, а значит, $x = y \leqslant z$. Если b имеет знак $+$, а c имеет знак $-$, совершенно аналогично получим, что $x \leqslant y = z = 0$. Теперь рассмотрим случай, когда дроби a, b, c имеют знак $+$. В случае если либо $x = y$, либо $y = z$, утверждение, конечно же, выполняется. Осталось рассмотреть случай, в котором по определению 4 неравенства для вещественных чисел найдутся номера $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ такие, что $\alpha_i = \beta_i$ для всех $i \in \overline{0, k_1 - 1}$ и $\alpha_{k_1} < \beta_{k_1}$; $\beta_i = \gamma_i$ для всех $i \in \overline{0, k_2 - 1}$ и $\beta_{k_2} < \gamma_{k_2}$. Полагая $k := \min\{k_1, k_2\}$, получим $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i$ для всех $i \in \overline{0, k-1}$ и либо $\alpha_k = \beta_k < \gamma_k$, либо $\alpha_k < \beta_k = \gamma_k$, либо $\alpha_k < \beta_k < \gamma_k$. Во всех трёх случаях имеем $\alpha_k < \gamma_k$, что и означает $x \leqslant z$.

2^0. В этом случае $x \leqslant z$ по определению 4 неравенства для вещественных чисел.

3^0. По определению 4 неравенства для вещественных чисел из того, что b имеет знак $+$ вытекает, что $b = +0$, $c = -0$, а значит, $x \leqslant y = z = 0$. По тому же определению в случае, когда b имеет знак $-$, имеем $\widehat{y} := \beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \leqslant \widehat{x} :=$ $:= \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ и $\widehat{z} := \gamma_0, \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ldots \leqslant \widehat{y}$, отсюда по пункту 1^0 получаем $\widehat{z} \leqslant \widehat{x}$, что и означает $x \leqslant z$ по определению 4 неравенства для вещественных чисел. ◀

Установленные выше свойства 10–13 в точности означают, что введённое в определении 4 неравенства для вещественных чисел *бинарное отношение* $\leqslant$ на множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел является *отношением линейного порядка* по определению 0.6.5 (то есть оно *рефлексивно, антисимметрично, транзитивно*, и любые два вещественных числа сравнимы). Таким образом, отношение $<$ является *отношением строгого порядка, порождённым отношением* $\leqslant$ (см. замечание 0.6.3).

Определение 5. Множество неотрицательных вещественных чисел будем обозначать
$$\mathbb{R}^+ := [0, +\infty).$$

Замечание 5. Выше в замечании 4 было определено отображение $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим множество $\mathbb{Q}' := \varphi(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$. Из алгоритма деления в столбик вытекает, что
$$r_1 < r_2 \implies \varphi(r_1) < \varphi(r_2)$$
для всех $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Из этого следует, что функция φ — это *биекция*, отображающая множество $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{Q}'$. Далее определим на множестве $\mathbb{Q}'$ арифметические операции $+, -, \cdot, / : \mathbb{Q}' \times \mathbb{Q}' \to \mathbb{Q}'$ естественным образом: для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}'$ положим $x_1 \pm x_2 := \varphi\big(\varphi^{-1}(x_1) \pm \varphi^{-1}(x_2)\big)$, $x_1 x_2 := \varphi\big(\varphi^{-1}(x_1)\varphi^{-1}(x_2)\big)$, $x_1/x_2 := \varphi\big(\varphi^{-1}(x_1)/\varphi^{-1}(x_2)\big)$ (операция деления, конечно же, определяется при $x_2 \neq 0$). Отметим, что достаточно было бы определить только операции сложения и умножения, а вычитание и деление определить как обратные к ним, результат был бы тем же самым. Множество $\mathbb{Q}'$ с определёнными выше арифметическими операциями $(+, \cdot)$ обретает структуру *упорядоченного поля* (см. свойства 1–15), а функция φ является *изоморфизмом упорядоченных полей* $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}'$ $\big($то есть для всех $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ выполнено: $\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$, $\varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_1)\varphi(r_2)$ и $r_1 < r_2 \implies \varphi(r_1) < \varphi(r_2)\big)$. В дальнейшем мы будем *отождествлять* множество $\mathbb{Q}'$ со множеством $\mathbb{Q}$ (посредством изоморфизма φ), а его элементы называть просто ***рациональными*** числами, однако при использовании неравенств и арифметических операций иногда всё же приходится различать, в качестве элемента какого из этих двух множеств рассматривается то или иное рациональное число в каждой конкретной формуле. Совершенно аналогично множества $\varphi(\mathbb{Z})$ и $\varphi(\mathbb{N})$ будем называть соответственно множествами ***целых и натуральных*** чисел.

Далее убедимся в том, что для вещественных чисел выполнено свойство 16 (принцип Архимеда).

Лемма 3 [Принцип Архимеда для вещественных чисел]. *Для любого $a \in \mathbb{R}$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что* $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ штук}} = n > a$.

Доказательство. В случае $a < 0$ утверждение леммы выполнено при $n := 1$, в случае $0 \leqslant a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ — при $n := \alpha_0 + 2$. ◀

§ 1.2. О приближении вещественных чисел рациональными

Лемма 1. *Для любого числа $a \in \mathbb{R}$ и любого рационального числа $0 < \varepsilon \in$ $\in \mathbb{Q}$ найдутся числа $l, r \in \mathbb{Q}$ (рассмотренные как вещественные) такие, что $l \leqslant a \leqslant r$ и $r - l < \varepsilon$ (знак “$-$” здесь понимается как разность рациональных дробей).*

Доказательство. Пусть $0 \leqslant a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ (случай $a < 0$ рассматривается аналогично). По определению 1.4 неравенства для вещественных чисел устанавливается справедливость неравенств

$$l := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \leqslant a \leqslant \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n} =: r$$

(знак “+” здесь понимается как *сумма рациональных дробей*).

Итак, для любого номера n нашлись два рациональных числа l и r такие, что $l \leqslant a \leqslant r$ и $r - l = 10^{-n}$. Убедимся, что для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$ найдётся индекс n такой, что $10^{-n} < \varepsilon$.

Согласно свойству 16 рациональных чисел (принцип Архимеда) найдётся лишь конечное число натуральных чисел, не превосходящих числа $1/\varepsilon$. Значит, лишь для конечного числа номеров n справедливо неравенство $10^n \leqslant 1/\varepsilon$. Для всех остальных номеров n верно противоположное неравенство $10^{-n} < \varepsilon$, что и требовалось доказать. ◀

Лемма 2. *Для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ таких, что $a < b$, найдётся число $q \in \mathbb{Q}$ (рассмотренное как вещественное) такое, что $a < q < b$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ (случай, когда $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$, рассматривается аналогично, а случай, когда $a < 0$, $b > 0$, тривиален — достаточно положить $q := 0$).

Итак, пусть $0 \leqslant a$, $0 \leqslant b$ и $a < b$. Рассмотрим то из двух возможных десятичных представлений числа $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, в котором отсутствует период 9, а также десятичное представление числа $b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n \ldots$. По определению 1.4 найдётся индекс $k \in \mathbb{N}_0$ такой, что $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\ldots$, $\alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$,

$\alpha_k < \beta_k$. При $n \geqslant k+1$ не все десятичные знаки $\alpha_n = 9$, поэтому найдётся $p :=$ $:= \min\{n \in \mathbb{N} : n \geqslant k+1, \alpha_n \neq 9\}$. Тогда $a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k 9 \ldots 9 \alpha_p \alpha_{p+1} \alpha_{p+2} \ldots$, где $\alpha_p \leqslant 8$, причём среди десятичных знаков $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots$ найдётся отличный от 9. По определению 1.4 проверяется, что число

$$q := \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k 9 \ldots 9(\alpha_p + 1)00 \ldots \in \mathbb{Q}$$

удовлетворяет неравенствам $a < q < b$, что и завершает доказательство леммы. ◀

Лемма 3. *Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$ найдутся числа $l, r \in \mathbb{Q}$ (рассмотренные как вещественные) такие, что $l \leqslant x_1 \leqslant r$, $l \leqslant x_2 \leqslant r$, $r - l < \varepsilon$. Тогда $x_1 = x_2$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $x_1 \neq x_2$. Не нарушая общности, будем считать, что $x_1 < x_2$. По лемме 2 найдутся $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $x_1 < q_1 < q_2 < x_2$.

Возьмём произвольные числа $l, r \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющие неравенствам $l \leqslant x_1 \leqslant r$, $l \leqslant x_2 \leqslant r$. В силу свойств 11 и 12 (см. лемму 1.2 о транзитивности отношения порядка на множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел) для вещественных чисел получим $l < q_1 < q_2 < r$. Но тогда $r - l > q_2 - q_1 =: \varepsilon_0 \in \mathbb{Q}$, что противоречит условию леммы и завершает её доказательство. ◀

§ 1.3. Ограниченные числовые множества

Определение 1. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ называется ***ограниченным сверху*** [***снизу***], если существует $M \in \mathbb{R}$ [$m \in \mathbb{R}$] такое, что $x \leqslant M$ [$m \leqslant x$] для всех $x \in \Omega$. При этом число M [m] называется ***верхней*** [***нижней***] ***границей*** множества Ω.

Множество Ω называется ***ограниченным***, если оно ограничено сверху и снизу.

Замечание 1. Любое ограниченное сверху [снизу] множество $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{R}$ имеет бесконечно много верхних [нижних] границ.

Определение 2. Число $M \in \Omega$ называется ***максимумом*** множества Ω и обозначается $\mathbf{max}\, \boldsymbol{\Omega}$, если $x \leqslant M$ для всех $x \in \Omega$. Число $m \in \Omega$ называется ***минимумом множества*** Ω и обозначается $\mathbf{min}\, \boldsymbol{\Omega}$, если $m \leqslant x$ для всех $x \in \Omega$.

Определение 3. Минимальная из всех верхних границ ограниченного сверху множества Ω называется ***точной верхней границей*** (или ***верхней гранью***, или ***супремумом***) этого множества и обозначается $\mathbf{sup}\, \boldsymbol{\Omega}$. Если $f : I \to \mathbb{R}$, то обычно используют обозначение $\sup\limits_{x \in I} f(x) := \sup f(I) = \sup\{f(x) : x \in I\}$.

Максимальная из всех нижних границ ограниченного снизу множества Ω называется ***точной нижней границей*** (или ***нижней гранью***, или ***инфимумом***) этого множества и обозначается $\mathbf{inf\,\Omega}$. Если $f\colon I \to \mathbb{R}$, то обычно используют обозначение $\inf\limits_{x\in I} f(x) := \inf f(I) = \inf\{f(x) : x \in I\}$.

Замечание 2. Из определений 2 и 3 вытекает, что если $\sup\Omega \in \Omega$, то $\sup\Omega = \max\Omega$, а если $\inf\Omega \in \Omega$, то $\inf\Omega = \min\Omega$.

Определение 3 допускает эквивалентную формулировку.

Определение 3′. Число Ω^* $[\Omega_*]$ называется ***верхней*** [***нижней***] ***гранью*** ограниченного сверху [снизу] множества Ω, если

(1) $\forall x \in \Omega\ x \leqslant \Omega^*$ $[\Omega_* \leqslant x]$;

(2) $\forall x' < \Omega^*$ $[\forall x' > \Omega_*]$ $\exists x \in \Omega : x > x'$ $[x < x']$.

Определение 4. Если множество Ω не ограничено сверху [снизу], то по определению $\sup\Omega := +\infty$ $[\inf\Omega := -\infty]$.

Из принципа 0.4.1 индукции вытекает следующая теорема.

Теорема 1 [Любое непустое подмножество натуральных чисел содержит минимальный элемент]. *Пусть* $\varnothing \neq K \subset \mathbb{N}$, *тогда* $\exists \min K$.

Доказательство. Пусть $\nexists \min K$. Рассмотрим множество

$$\Omega := \{n \in \mathbb{N} : \forall k \in K\ (n \leqslant k)\}$$

натуральных нижних границ множества K. Заметим, что $1 \in \Omega$ и что если $n \in \Omega$, то $n + 1 \in \Omega$, так как если $n + 1 \notin \Omega$, то найдётся $k_0 \in K$, для которого $n \leqslant k_0 < n+1$, а следовательно, $k_0 = n$ и $\min K = n$. Таким образом, $\Omega = \mathbb{N}$ по принципу 0.4.1 индукции, а следовательно, $K = \varnothing$, что противоречит условию леммы. ◀

Замечание 3. В качестве иллюстрации к теореме 1 отлично подходит парадокс Берри — изящная модификация парадокса Ришара: существует ли число, определённое фразой «минимальное натуральное число, которое нельзя описать менее чем одиннадцатью словами»?

Оказывается, что принцип 0.4.1 индукции также вытекает из теоремы 1.

Утверждение 1. *Пусть справедлива теорема 1, тогда выполнен принцип 0.4.1 индукции.*

Доказательство. Пусть множество M удовлетворяет условиям теоремы 0.4.1 [Принцип индукции] и $M \neq \mathbb{N}$. Тогда $\mathbb{N} \setminus M \neq \varnothing$ и по теореме 1 существует $\min(\mathbb{N} \setminus M) =: n_0$. Так как $1 \in M$, то $n_0 \neq 1$, а следовательно, $n_0 \geqslant 2$ и $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. Так как $n_0 - 1 \notin \mathbb{N} \setminus M$, то $n_0 - 1 \in M$, а следовательно, $n_0 \in M$ по свойству множества M. Получили противоречие с тем, что $n_0 \in \mathbb{N} \setminus M$. ◀

Для множеств рациональных и тем более вещественных чисел теорема 1, конечно же, неверна (достаточно рассмотреть множество всех рациональных чисел интервала $(0, 1)$ и убедиться, что в этом множестве нет ни минимального, ни максимального элемента). При этом верна следующая фундаментальная теорема.

Теорема 2 (о существовании точных границ у ограниченных множеств). *Если числовое множество $\Omega \neq \varnothing$ ограничено сверху [снизу], то у него существует конечная верхняя [нижняя] грань.*

Доказательство. Пусть множество $\Omega \neq \varnothing$ ограничено сверху, то есть $\exists M \in \in \mathbb{R} : x \leqslant M$ для всех $x \in \Omega$. Рассмотрим два возможных случая:
1^0: среди элементов множества Ω есть *хотя бы одно* неотрицательное число;
2^0: *все элементы* множества Ω являются отрицательными числами.

1^0. Рассмотрим только неотрицательные числа множества Ω и обозначим через A_0 множество всех десятичных дробей, представляющих эти числа. По определению 1.4 неравенства для вещественных чисел все целые части дробей из множества A_0 не превосходят некоторого числа $N \in \mathbb{N}_0$, а значит, среди них найдётся *максимальная целая часть* (это прямое следствие теоремы 1), обозначим её через $\overline{x}_0$. Выделим из множества A_0 подмножество $A_1 \subset A_0$ всех десятичных дробей, у которых целая часть равна $\overline{x}_0$. У дробей множества A_1 рассмотрим первые десятичные знаки после запятой и обозначим максимальный из них через $\overline{x}_1$. Далее выделим из множества A_1 подмножество $A_2 \subset A_1$ всех дробей вида $\overline{x}_0, \overline{x}_1\alpha_2 \ldots$. Действуя аналогично, мы последовательно определим все знаки десятичного представления некоторого числа $\overline{x} \in \mathbb{R}$: $\overline{x} := \overline{x}_0, \overline{x}_1\overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n \ldots$. Пользуясь определением $3'$, покажем, что $\overline{x} = \sup \Omega$.

Так как по построению число $\overline{x}$ является неотрицательным, то неравенство $x \leqslant \overline{x}$ выполнено для любого отрицательного элемента $x \in \Omega$. Покажем, что любой неотрицательный элемент $x \in \Omega$ удовлетворяет условию $x \leqslant \overline{x}$. Предположим, что это не так: пусть существует $x \in \Omega : 0 \leqslant x = x_0, x_1x_2 \ldots x_n \ldots$, не удовлетворяющий неравенству $x \leqslant \overline{x}$. Тогда $x > \overline{x}$ и по определению 1.4 неравенства для вещественных чисел найдётся индекс k такой, что $x_0 = \overline{x}_0$, $x_1 = \overline{x}_1, \ldots, x_{k-1} = \overline{x}_{k-1}$, $x_k > \overline{x}_k$. Но последние соотношения противоречат тому, что в качестве $\overline{x}_k$ берётся *максимальный* из α_k — элементов десятичных представлений чисел множества Ω вида $\overline{x}_0, \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_{k-1}\alpha_k \ldots$. Полученное противоречие доказывает выполнение условия (1) определения $3'$.

Покажем, что выполнено условие (2) определения 3$'$. Возьмём любое $x' < \overline{x}$. Если $x' < 0$, то неравенству $x > x'$ удовлетворяет любой неотрицательный элемент $x \in \Omega$ (по предположению хотя бы один такой элемент существует).

Далее перейдём к случаю $x' \geqslant 0$ и рассмотрим десятичное представление $x' = x'_0, x'_1 x'_2 \ldots$ без периода 9. Из условия $x' < \overline{x}$ и определения 1.4 неравенства для вещественных чисел следует, что найдётся индекс m такой, что

$$x'_0 = \overline{x}_0,\ x'_1 = \overline{x}_1, \ldots, x'_{m-1} = \overline{x}_{m-1},\ x'_m < \overline{x}_m. \tag{1}$$

С другой стороны, по построению числа $\overline{x}$ найдётся элемент $x = \overline{x}_0, \overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots$ $\ldots \overline{x}_m \alpha_{m+1} \ldots \in \Omega$. По определению 1.4 неравенства для вещественных чисел из (1) получаем неравенство $x' \leqslant x$, при этом равенство $x' = x$ может выполняться лишь в случае $x'_m = \overline{x}_m - 1, x'_{m+1} = x'_{m+2} = \ldots = 9$, который мы исключили. Таким образом, $x' < x$, условие (2) определения 3$'$ выполнено, и теорема для случая 1^0 доказана.

2^0. Рассмотрим всевозможные представления элементов $x \in \Omega$ отрицательными бесконечными десятичными дробями и обозначим через $\overline{x}_0$ минимальную из целых частей этих дробей, через $\overline{x}_1$ — минимальный из первых десятичных знаков тех дробей, целая часть которых равна $\overline{x}_0$, через $\overline{x}_2$ — минимальный из вторых десятичных знаков тех дробей, целая часть и первый десятичный знак которых соответственно равны $\overline{x}_0$ и $\overline{x}_1$ и т.д. Таким образом мы определим неположительное число $\overline{x} = -\overline{x}_0, \overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n \ldots$. Аналогично случаю 1^0 доказывается, что $\overline{x} = \sup \Omega$.

Если множество $\Omega \neq \varnothing$ ограничено снизу, то множество $-\Omega$, состоящее из элементов множества Ω, знаки десятичных представлений которых изменены на противоположные, ограничено сверху. По доказанному выше существует $\sup(-\Omega) = \pm \overline{y}_0, \overline{y}_1 \overline{y}_2 \ldots$. По определению проверяется, что $\mp \overline{y}_0, \overline{y}_1 \overline{y}_2 \ldots =$ $= \inf \Omega$. ◀

Определение 5. ***Расширенной числовой прямой*** будем называть множество $\overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, для элементов которого помимо стандартного упорядочения на $\mathbb{R}$ по определению выполнено: $-\infty \leqslant a \leqslant +\infty$ для всех $a \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

Замечание 4. Из определений 3, 4 и теоремы 2 о существовании точных границ у ограниченных множеств вытекает, что у *произвольного непустого числового множества* Ω существуют и притом единственные $\inf \Omega \in [-\infty, +\infty) \subset \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ и $\sup \Omega \in (-\infty, +\infty] \subset \overline{\overline{\mathbb{R}}}$. Единственность вытекает соответственно из единственности максимума и минимума.

§ 1.4. Арифметические операции над вещественными числами и их основные свойства

Определение 1 (суммы вещественных чисел). ***Суммой*** чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ называется такое число $x \in \mathbb{R}$, которое для любых чисел l_1, r_1, l_2, $r_2 \in \mathbb{Q}$ (рассмотренных как вещественные), удовлетворяющих соотношениям $l_1 \leqslant a \leqslant r_1$, $l_2 \leqslant b \leqslant r_2$, удовлетворяет неравенствам $l_1 + l_2 \leqslant x \leqslant r_1 + r_2$, где суммы рациональных чисел понимаются согласно замечанию 1.5. Сумму чисел a и b обозначают символом $a + b$.

Теорема 1 (существования суммы вещественных чисел). *Для любых чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ существует число $x \in \mathbb{R}$, являющееся их суммой.*

Доказательство. Фиксируем произвольные числа $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $a \leqslant r_1$, $b \leqslant r_2$ (их существование вытекает из леммы 2.1). Рассмотрим всевозможные числа $l_1, l_2 \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющие неравенствам $l_1 \leqslant a$, $l_2 \leqslant b$ (их существование снова вытекает из леммы 2.1). Проверим, что множество $\{l_1 + l_2\}$ всевозможных сумм таких чисел ограничено сверху.

В силу свойства 12 транзитивности отношения $\leqslant$ (см. лемму 1.2) из неравенств $l_1 \leqslant a$ и $a \leqslant r_1$ следует, что $l_1 \leqslant r_1$, а из неравенств $l_2 \leqslant b$ и $b \leqslant r_2$ следует, что $l_2 \leqslant r_2$. Складывая полученные неравенства почленно, имеем $l_1 + l_2 \leqslant r_1 + r_2$. Последнее неравенство означает ограниченность непустого множества $\{l_1 + l_2\}$ сверху и тот факт, что число $r_1 + r_2$ является одной из верхних границ этого множества.

По теореме 3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств существует $\sup\{l_1 + l_2\} =: x$. Осталось убедиться, что $x = a + b$, то есть что всегда выполнено $l_1 + l_2 \leqslant x \leqslant r_1 + r_2$. Справедливость левого неравенства следует из того, что x является верхней границей множества $\{l_1 + l_2\}$, а правого — из того, что число $r_1 + r_2$ является одной из верхних границ множества $\{l_1 + l_2\}$, а число x — минимальная из них (см. определение 3.3). ◀

Теорема 2 (единственности суммы вещественных чисел). *Может существовать только одно число $x \in \mathbb{R}$, являющееся суммой двух данных чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и

$$\begin{cases} l_1 + l_2 \leqslant x_1 \leqslant r_1 + r_2, \\ l_1 + l_2 \leqslant x_2 \leqslant r_1 + r_2 \end{cases} \tag{1}$$

для всевозможных чисел $l_1, r_1, l_2, r_2 \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющих неравенствам

$$l_1 \leqslant a \leqslant r_1, \qquad l_2 \leqslant b \leqslant r_2. \tag{2}$$

Фиксируем $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$. По лемме 2.1 для $\varepsilon/2$ и для $a \in \mathbb{R}$ найдутся числа $l_1, r_1 \in \mathbb{Q}$ такие, что $l_1 \leqslant a \leqslant r_1$, причем $r_1 - l_1 < \varepsilon/2$. Аналогично найдутся числа $l_2, r_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $l_2 \leqslant b \leqslant r_2$, причем $r_2 - l_2 < \varepsilon/2$. Взяв в (2) указанные l_1, r_1, l_2, r_2, получим, что x_1 и x_2 удовлетворяют неравенствам (1), которые можно переписать в виде $l \leqslant x_1 \leqslant r$, $l \leqslant x_2 \leqslant r$, где $l := l_1 + l_2$, $r := r_1 + r_2$.

Осталось заметить, что $r - l = (r_1 + r_2) - (l_1 + l_2) = (r_1 - l_1) + (r_2 - l_2) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. По лемме 2.3 имеем $x_1 = x_2$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 1. Вместо числа x в теореме 1 можно также взять число $x' := \inf\{r_1 + r_2\}$, где $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ — всевозможные числа, удовлетворяющие неравенствам $a \leqslant r_1$, $b \leqslant r_2$. Из теоремы 2 единственности суммы следует равенство $x = x'$.

Утверждение 1. *Если числа $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ рациональны, то определение 1 их суммы эквивалентно определению суммы рациональных чисел, данному в замечании 1.5.*

Доказательство. Пусть число x является суммой чисел a и b по определению 1 суммы вещественных чисел. Полагая $l_1 = r_1 := a$ и $l_2 = r_2 := b$, по тому же определению получим выполнение неравенства

$$a + b \leqslant x \leqslant a + b,$$

в котором сумма $a + b$ понимается согласно замечанию 1.5. Из свойства 11 вещественных чисел вытекает, что $x = a + b$, что и завершает доказательство утверждения. ◀

Отметим, что из справедливости свойств 1 и 2 для рациональных чисел и из определения 1 суммы вещественных чисел вытекает справедливость тех же свойств для вещественных чисел. Также для вещественных чисел непосредственно проверяются свойства 3 и 4, то есть равенства $a + 0 = a$ и $a + (-a) = 0$, где $0 := 0,(0)$ и $(-a)$ является числом, образованным десятичными представлениями числа a, взятыми с противоположным знаком. Далее проверим свойство 14, то есть докажем, что если $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \leqslant b$, то $a + c \leqslant b + c$.

Если $a = b$, то утверждение очевидно. Если $a < b$, то по лемме 2.2 найдутся числа $r_1, l_2 \in \mathbb{Q}$ такие, что $a < r_1 < l_2 < b$. По лемме 2.1 для положительного

$\varepsilon := l_2 - r_1 \in \mathbb{Q}$ найдутся числа $l_3, r_3 \in \mathbb{Q}$ такие, что $l_3 \leqslant c \leqslant r_3$ и $r_3 - l_3 < \varepsilon = l_2 - r_1$. По определению 1 суммы вещественных чисел имеем

$$a + c \leqslant r_1 + r_3, \qquad l_2 + l_3 \leqslant b + c.$$

Из неравенства $r_3 - l_3 < l_2 - r_1$ для рациональных чисел непосредственно вытекает неравенство $r_1 + r_3 \leqslant l_2 + l_3$. Рассмотрев теперь эти числа как вещественные и воспользовавшись свойством 12 транзитивности отношения $\leqslant$ на множестве вещественных чисел (см. лемму 1.2), окончательно получим $a + c \leqslant b + c$.

Определение 2 (модуля вещественного числа). ***Модулем*** числа $a \in \mathbb{R}$ будем называть число

$$|a| := \begin{cases} a & \text{при } 0 \leqslant a, \\ -a & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Замечание 2. Из определения 2 модуля вещественного числа и свойства 14 заключаем, что $0 \leqslant |a|$ для всех $a \in \mathbb{R}$.

Определение 3 (произведения вещественных чисел). ***Произведением*** чисел $0 < a \in \mathbb{R}$ и $0 < b \in \mathbb{R}$ называется такое число $x \in \mathbb{R}$, которое для любых чисел l_1, r_1, l_2, $r_2 \in \mathbb{Q}$ (рассмотренных как вещественные), удовлетворяющих соотношениям $0 < l_1 \leqslant a \leqslant r_1$, $0 < l_2 \leqslant b \leqslant r_2$, удовлетворяет неравенствам $l_1 l_2 \leqslant x \leqslant r_1 r_2$, где произведения рациональных чисел понимаются согласно замечанию 1.5. Произведение чисел a и b обозначают символом ab.

Для любого числа $a \in \mathbb{R}$ положим

$$a0 = 0a := 0.$$

Для любых ненулевых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ положим

$$ab := \begin{cases} |a||b|, & \text{если } 0 \text{ не лежит между } a \text{ и } b, \\ -|a||b|, & \text{если } 0 \text{ лежит между } a \text{ и } b. \end{cases}$$

Аналогично теоремам 1 существования суммы вещественных чисел, 2 единственности суммы вещественных чисел и утверждению 1 доказывается существование и единственность произведения любых двух вещественных чисел, а также тот факт, что для рациональных чисел определение 3 их произведения равносильно определению произведения, данному в замечании 1.5. Приведём формулировки соответствующих утверждений.

Теорема 1′ (существования произведения вещественных чисел). *Для любых чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ существует число $x \in \mathbb{R}$, являющееся их произведением.*

Теорема 2$'$ (единственности произведения вещественных чисел). *Может существовать только одно число $x \in \mathbb{R}$, являющееся произведением двух данных чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$.*

Утверждение 1$'$. *Если числа $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ рациональны, то определение 3 их произведения равносильно определению произведения рациональных чисел, данному в замечании 1.5.*

Далее убедимся в том, что для вещественных чисел выполнены все свойства 1-16 рациональных чисел.

Справедливость свойств 1-4, а также свойства 14 была установлена выше, справедливость свойств 10-13 и 16 была установлена ранее в § 1.1.

Справедливость свойств 5, 6, 9, 15 вытекает из определений 1 и 3 суммы и произведения вещественных чисел, а также из справедливости указанных свойств для рациональных чисел. Также непосредственно проверяется свойство 7, то есть равенство $a \cdot 1 = a$, где $1 := 1,(0)$. Осталось проверить свойство 8.

Пусть $0 < a \in \mathbb{R}$. Показывается, что существует единственное число $a^{-1} \in \mathbb{R}$ такое, что для любых чисел $l, r \in \mathbb{Q}$ таких, что $0 < l \leqslant a \leqslant r$, выполнено $1/r \leqslant a^{-1} \leqslant 1/l$ (при этом $a^{-1} = \sup\{1/r\}$). Затем показывается, что $aa^{-1} = 1$. В случае $0 > a \in \mathbb{R}$ положим $a^{-1} := -(-a)^{-1}$.

Далее для любых $a, b \in \mathbb{R}$ из свойств 1-4 выводится существование и единственность разности чисел a и b, то есть такого числа $c \in \mathbb{R}$, что $a = c + b$ $\big($при этом $c := a + (-b)\big)$. Разность чисел a и b обозначают символом $a - b$. В случае $b \neq 0$ из свойств 5-8 выводится существование и единственность частного чисел a и b, то есть такого числа $c \in \mathbb{R}$, что $a = cb$ (при этом $c := ab^{-1}$). Частное чисел a и b обозначают символом a/b.

Наличие свойств 1-16 означает, что множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел с введёнными на нём арифметическими операциями (см. определения 1 и 3) и отношением $\leqslant$ (см. определение 1.4 неравенства для вещественных чисел), так же как и множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, имеет структуру *архимедова упорядоченного поля*. Но есть и принципиальное различие полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$, выраженное в том, что для $\mathbb{R}$ справедлива теорема 3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств. Это свойство может быть также выражено в следующей форме.

Утверждение 2 [Принцип полноты (непрерывности)]. *Пусть $\varnothing \neq A, B \subset \subset \mathbb{R}$ и для всех $a \in A$, $b \in B$ выполнено $a \leqslant b$. Тогда существует $\xi \in \mathbb{R}$ такое, что $a \leqslant \xi \leqslant b$ для всех $a \in A$, $b \in B$.*

Покажем, что принцип полноты равносилен теореме 3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств при наличии свойств 1-15 *упорядоченного поля*.

Утверждение 3. *Утверждение 2 [Принцип полноты (непрерывности)] $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ теорема 3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств.*

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Достаточно (см. последний абзац доказательства теоремы 3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств) доказать существование супремума ограниченного сверху числового множества $A \neq \varnothing$, опираясь на принцип 2 полноты. Пусть непустое множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Покажем, что существует $\sup A \in \mathbb{R}$ (существование нижней грани в случае, когда множество A ограничено снизу, устанавливается аналогично). Рассмотрим множество $B := \{x \in \mathbb{R} : \forall a \in A \; a \leqslant x\}$ всех верхних границ множества A. В силу ограниченности множества A сверху имеем $B \neq \varnothing$, поэтому в силу принципа полноты найдётся $\xi \in \mathbb{R}$ такое, что $a \leqslant \xi \leqslant b$ для всех $a \in A$, $b \in B$. Из этих неравенств автоматически вытекает, что ξ является минимальной из верхних границ множества A, то есть $\xi = \sup A$ по определению 3.3.

$\Longleftarrow$: Пусть $\varnothing \neq A, B \subset \mathbb{R}$ и для всех $a \in A$, $b \in B$ выполнено $a \leqslant b$. Это означает, что непустое множество A ограничено сверху (а также то, что все элементы множества B являются верхними границами множества A), поэтому по теореме 3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств существует $\sup A =: \xi \in \mathbb{R}$. Проверим, что $a \leqslant \xi \leqslant b$ для всех $a \in A$, $b \in B$. Выполнение левого неравенства следует из того, что ξ является верхней границей множества A, а правого — из того, что ξ — минимальная из всех верхних границ (см. определение 3.3). ◀

Замечание 3. Отметим, что теорема 3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств (а следовательно и принцип полноты) не выполнена для рациональных чисел: действительно, у ограниченного непустого множества $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ не существует рациональной верхней грани.

Множество с введёнными на нём арифметическими операциями и отношением порядка, обладающее свойствами 1–15, называется ***полным упорядоченным полем***, если справедлива теорема 3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств или, что равносильно, выполнен принцип полноты (см. утверждение 3). При этом свойство 16 (принцип Архимеда) автоматически выполнено, то есть *любое полное упорядоченное поле является архимедовым*. Действительно, предположив, что принцип Архимеда не выполнен, мы получим ограниченность сверху множества $\mathbb{N}$. По теореме 3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств существует $\sup \mathbb{N} =: s$. Так как $s - 1 < s$, то существует $n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > s - 1$. Но это означает, что $\mathbb{N} \ni n_0 + 1 > s$, что противоречит определению верхней грани.

Далее сформулируем теорему, доказательство которой можно найти, например, в [10, с. 636].

Теорема 3 (об изоморфизме полных упорядоченных полей). *Любые полные упорядоченные поля F_1 и F_2 изоморфны, то есть существует биекция $\varphi : F_1 \xrightarrow{\sim} F_2$ такая, что для всех $x_1, x_2 \in F_1$ выполнено: $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, $\varphi(x_1 x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$ и $x_1 < x_2 \implies \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$.*

Замечание 4. Из теоремы 3 вытекает, что вещественные числа вполне определяются (с точностью до изоморфизма) при помощи аксиом *полного упорядоченного поля*. Таким образом, определяя множество вещественных чисел как множество классов эквивалентности бесконечных двоичных (троичных, k-ичных) дробей или фундаментальных последовательностей рациональных чисел, или же как дедекиндовы сечения, или каким-либо ещё способом, достаточно убедиться лишь в выполнении свойств 1-15 и в справедливости теоремы 3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств.

В заключение сформулируем важное свойство вещественных чисел, называемое *неравенством треугольника*, и определим некоторые часто используемые числовые множества.

Утверждение 4 [Неравенство треугольника для вещественных чисел]. *Для любых чисел $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \tag{3}$$

Доказательство. Из свойств 12, 14 вещественных чисел и определения 2 модуля получим, что если $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$, то $0 \leqslant x+y$, $|x| = x$, $|y| = y$, $|x+y| = x+y$ и в формуле (3) достигается равенство.

Если $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$, то $x+y \leqslant 0$, $|x| = -x$, $|y| = -y$, $|x+y| = -(x+y) \overset{\text{св-ва } 1,2}{=} -x - y$ и в формуле (3) достигается равенство.

Пусть, наконец, $x < 0 < y$ (случай $y < 0 < x$ рассматривается аналогично). Тогда либо $x < x + y \leqslant 0$, либо $0 \leqslant x + y < y$, По определению 2 модуля вещественного числа, используя свойство 14, в первом случае получим $|x+y| < |x|$, во втором $|x + y| < |y|$. В силу замечания 2 в обоих случаях получим $|x + y| < |x| + |y|$, и неравенство (3) установлено. ◀

Следствие 1 утверждения 4. *Для любых чисел $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|.$$

Действительно, из неравенства (3) треугольника получим $|x| - |y| \leqslant |x - y|$. Меняя x и y местами, получим $-(|x| - |y|) \leqslant |x - y|$, отсюда и следует утверждение леммы. ◀

Определение 4 (промежутка). ***Промежутком*** будем называть любое из числовых множеств вида
1. $(a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, где $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ (***интервал***);
2. $[a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$, где $-\infty < a \leqslant b < +\infty$ (***отрезок***);
3. $(a, b] \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$, где $-\infty \leqslant a \leqslant b < +\infty$ (***полуинтервал***);
4. $[a, b) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$, где $-\infty < a \leqslant b \leqslant +\infty$ (***полуинтервал***).
При этом в случае $a, b \in \mathbb{R}$ соответствующий промежуток называется ***конечным***. Точки промежутка I, отличные от a и b, называются ***внутренними***. Множество всех внутренних точек промежутка I обозначается $\operatorname{int}(I)$. Точки множества $I \setminus \operatorname{int}(I)$ называются ***граничными точками промежутка*** I. Если $\operatorname{int}(I) = \varnothing$, то промежуток I называется ***вырожденным***, в противном случае — ***невырожденным***.

Глава 2

Предел числовой последовательности

§ 2.1. Сходящиеся последовательности и их основные свойства

Определение 1. Пусть $\delta > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Множество $O_\delta(x_0) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ называется ***δ-окрестностью*** точки x_0. Множество $\mathring{O}_\delta(x_0) \coloneqq O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ называется ***проколотой δ-окрестностью*** точки x_0.

Определение 2 (предела последовательности). Число $a \in \mathbb{R}$ называется ***пределом последовательности*** x_n, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N$ $|x_n - a| < \varepsilon$, то есть

$$x_n \in O_\varepsilon(a) \text{ для всех } n \geqslant N.$$

При этом употребляются обозначения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$ или просто $x_n \to a$. Последовательности, имеющие предел, называются ***сходящимися***, все остальные последовательности называются ***расходящимися***.

Замечание 1. Из определения 2 предела последовательности непосредственно вытекает, что добавление или исключение из последовательности x_n произвольного *конечного множества* её элементов не повлияет на факт сходимости этой последовательности, а также на значение предела в случае его существования.

Замечание 2. Часто используются модификации определения 2 предела последовательности, в которых a принимает значения $-\infty$, $+\infty$ или ∞. Для точек такого вида используются следующие определения окрестностей (совпадающие с определениями их проколотых окрестностей): (проколотой) окрестностью точки $-\infty$, $+\infty$ или ∞ будем соответственно называть любое множество вида $O_\varepsilon(-\infty) = \mathring{O}_\varepsilon(-\infty) \coloneqq (-\infty, -\varepsilon)$, $O_\varepsilon(+\infty) = \mathring{O}_\varepsilon(+\infty) \coloneqq (\varepsilon, +\infty)$ или $O_\varepsilon(\infty) = \mathring{O}_\varepsilon(\infty) \coloneqq (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Таким образом, для любой последовательности x_n по определению выполнено

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \iff \lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty.$$

Утверждение 1 (о единственности предела последовательности). *Если $a_1, a_2 \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $x_n \to a_1$ и $x_n \to a_2$, то $a_1 = a_2$.*

Доказательство. Пусть $a_1 \neq a_2$. Из определения 1 и замечания 2 вытекает, что найдутся $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что $O_{\varepsilon_1}(a_1) \cap O_{\varepsilon_2}(a_2) = \varnothing$ (например, при $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ достаточно положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 := |a_1 - a_2|/2$). По определению 2 предела последовательности найдутся $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $x_n \in O_{\varepsilon_1}(a_1)$ при всех $n \geqslant N_1$ и $x_n \in O_{\varepsilon_2}(a_2)$ при всех $n \geqslant N_2$. Таким образом, при $N := \max\{N_1, N_2\}$ имеем $x_N \in O_{\varepsilon_1}(a_1) \cap O_{\varepsilon_2}(a_2) = \varnothing$. Полученное противоречие означает, что $a_1 = a_2$. ◀

Определение 3 (ограниченной последовательности). Последовательность называется ***ограниченной (сверху, снизу)***, если множество её значений ограничено (сверху, снизу) (см. определение 1.3.1).

Теорема 1 (о предельном переходе в неравенстве). *Пусть $a, b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $x_n \to a$, $y_n \to b$ и найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что*

$$x_n \leqslant y_n \tag{1}$$

для всех $n \geqslant N$. Тогда $a \leqslant b$.

Доказательство. Пусть $a > b$. Из определения 1 и замечания 2 вытекает, что найдутся $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что $z_1 > z_2$ для всех $z_1 \in O_{\varepsilon_1}(a)$, $z_2 \in O_{\varepsilon_2}(b)$. По определению 2 предела последовательности найдутся $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $x_n \in O_{\varepsilon_1}(a)$ при всех $n \geqslant N_1$ и $y_n \in O_{\varepsilon_2}(b)$ при всех $n \geqslant N_2$. Таким образом, при $N_3 := \max\{N, N_1, N_2\}$ имеем $x_{N_3} > y_{N_3}$, что противоречит неравенству (1). ◀

Следствие 1 теоремы 1 о предельном переходе в неравенстве. *Если $x_n \to a \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ и найдутся $c \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что $x_n \leqslant c$ [$c \leqslant x_n$] для всех $n \geqslant N$, то $a \leqslant c$ [$c \leqslant a$].*

Теорема 2 [Принцип двустороннего ограничения]. *Пусть $x_n, z_n \to a \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \tag{2}$$

для всех $n \geqslant N$. Тогда $y_n \to a$.

Доказательство. По определению 2 предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $x_n \in O_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_1$ и $z_n \in O_\varepsilon(a)$ при всех $n \geqslant N_2$. В силу неравенств (2) это означает, для всех

$n \geqslant \max\{N, N_1, N_2\}$ выполнено $y_n \in O_\varepsilon(a)$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Определение 4 (бесконечно малой последовательности). Последовательность α_n называется ***бесконечно малой***, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Замечание 3. Из определения 2 предела последовательности вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R} \iff$ последовательность $\alpha_n := x_n - a$ является бесконечно малой.

Лемма 1 [Сумма и разность бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми]. *Пусть $\alpha_n, \beta_n \to 0$, тогда $\alpha_n \pm \beta_n \to 0$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по определению 2 предела последовательности найдём $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ такие, что $|\alpha_n| < \varepsilon/2$ для всех $n \geqslant N_1$ и $|\beta_n| < \varepsilon/2$ для всех $n \geqslant N_2$. В силу неравенства 1.4.4 треугольника это означает, что для всех $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$ выполнено

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тогда $\alpha_n \pm \beta_n \to 0$ по определению 2 предела последовательности. ◀

Лемма 2 [Любая бесконечно малая последовательность ограничена]. *Если $\alpha_n \to 0$, то найдётся $M \geqslant 0$ такое, что $|\alpha_n| \leqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. По определению 2 предела последовательности при $\varepsilon := 1$ найдём $N \in \mathbb{N}$ такое, что $|\alpha_n| < 1$ для всех $n \geqslant N$. Это означает, что $|\alpha_n| \leqslant$ $\leqslant M := \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_{N-1}|, 1\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. ◀

Лемма 3 (об оганиченности последовательности, имеющей конечный предел). *Если $x_n \to a \in \mathbb{R}$, то найдётся $M \geqslant 0$ такое, что $|x_n| \leqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Согласно замечанию 3 последовательность $\alpha_n := x_n - a$ является бесконечно малой, а следовательно, ограниченной по лемме 2, то есть найдётся $M_1 \geqslant 0$ такое, что $|\alpha_n| \leqslant M_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу неравенства 1.4.4 треугольника для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|x_n| = |a + \alpha_n| \leqslant |a| + |\alpha_n| \leqslant |a| + M_1 =: M. \quad ◀$$

Лемма 4 [Произведение ограниченной и бесконечно малой последовательностей является бесконечно малой]. *Пусть $|x_n| \leqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \to 0$. Тогда $x_n\alpha_n \to 0$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по определению 2 предела последовательности найдём $N \in \mathbb{N}$ такое, что $|\alpha_n| \leqslant \varepsilon/(M+1)$ для всех $n \geqslant N$. Тогда

$$|x_n\alpha_n| = |x_n||\alpha_n| \leqslant \frac{M}{M+1}\varepsilon < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N$, что и означает $x_n\alpha_n \to 0$. ◀

Лемма 5 [Постоянная бесконечно малая последовательность состоит из нулей]. *Пусть $\alpha_n \to 0$ и $\alpha_n = c \in \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, тогда $c = 0$.*

Доказательство. Если $c \neq 0$, то по определению 2 предела последовательности найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|\alpha_N| = |c| < \frac{|c|}{2},$$

отсюда $|c| < 0$ — противоречие. ◀

Лемма 6. *Пусть $y_n \to b \neq 0$, тогда найдутся числа $N \in \mathbb{N}$ и $M > 0$ такие, что отношение $1/y_n$ корректно определено при всех $n \geqslant N$ и удовлетворяет неравенству $|1/y_n| \leqslant M$, при этом в случае $y_n \to \infty$ имеем $1/y_n \to 0$.*

Доказательство. Если $b \in \mathbb{R}$, то по определению 2 предела последовательности найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $|y_n - b| < |b|/2$ для всех $n \geqslant N$. В силу неравенства 1.4.4 треугольника имеем

$$|b| = |b - y_n + y_n| \leqslant |b - y_n| + |y_n| < \frac{|b|}{2} + |y_n|,$$

поэтому $|y_n| > |b|/2$ и $|1/y_n| < 2/|b| =: M$ для всех $n \geqslant N$.

Если $b \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$, то $|y_n| \to +\infty$ (см. замечание 2), поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $|y_n| > 1/\varepsilon$ и $|1/y_n| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$, а это означает, что $1/y_n \to 0$. ◀

Теорема 3 (об арифметических операциях над сходящимися последовательностями). *Пусть $x_n \to a \in \mathbb{R}$, $y_n \to b \in \mathbb{R}$, тогда $x_n + y_n \to a + b$, $x_n y_n \to ab$, $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$ (в случае, если $b \neq 0$).*

Доказательство. В силу замечания 3 имеем $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\alpha_n, \beta_n \to 0$. Так как

$$x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n,$$

$$x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$$

и $\alpha_n + \beta_n \to 0$, $a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n \to 0$ в силу лемм 1, 2 и 4, то $x_n + y_n \to a + b$ и $x_n y_n \to ab$ в силу замечания 3.

Если $b \neq 0$, то по лемме 6 для некоторого $N \in \mathbb{N}$ при всех $n \geqslant N$ имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = \frac{1}{y_n}\frac{b(a+\alpha_n) - a(b+\beta_n)}{b} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right) \xrightarrow{\text{л. } 1,4,6} 0,$$

поэтому $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$ в силу замечания 3. ◀

§ 2.2. Монотонные последовательности и число e

Определение 1. Последовательность x_n называется ***неубывающей [невозрастающей]***, если $x_{n+1} \geqslant x_n$ $[x_{n+1} \leqslant x_n]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такие последовательности называются ***монотонными***.

Определение 2. Последовательность x_n называется ***возрастающей [убывающей]***, если $x_{n+1} > x_n$ $[x_{n+1} < x_n]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такие последовательности называются ***строго монотонными***.

Теорема 1 (о пределе монотонной последовательности). *Пусть последовательность x_n не убывает [не возрастает]. Если x_n ограничена сверху [снизу] числом M, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \in \mathbb{R}$, причём $A \leqslant M$ $[A \geqslant M]$. Если же x_n не ограничена сверху [снизу], то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $\left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right]$.*

Доказательство. Пусть последовательность x_n не убывает и $x_n \leqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме 1.3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств существует

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n =: A \in \mathbb{R},$$

причём $A \leqslant M$ по определению 1.3.3 супремума. Используя эквивалентное определение 1.3.3′, для любого $\varepsilon > 0$ найдём индекс $N \in \mathbb{N}$ такой, что выполнено неравенство

$$A - \varepsilon < x_N \leqslant A.$$

Так как последовательность x_n не убывает, то для всех $n \geqslant N$ выполнено неравенство

$$A - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant A,$$

а следовательно,

$$-\varepsilon < x_n - A \leqslant 0.$$

Таким образом, для всех $n \geqslant N$ имеем

$$|x_n - A| = A - x_n < \varepsilon,$$

что по определению 1.2 предела последовательности означает

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

Если последовательность x_n не ограничена сверху, то для любого $B \in \mathbb{R}$ найдётся индекс N такой, что $x_N > B$, а следовательно, $x_n \geqslant x_N > B$ для всех $n \geqslant N$. В силу замечания 1.2 это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Случай невозрастающей последовательности x_n сводится к рассмотренному выше умножением всех её элементов на -1. ◀

Утверждение 1 [Неравенство Якоба Бернулли]. *Пусть* $-1 \leqslant a_i \leqslant 0$ *при всех* $i \in \overline{1,n}$ *либо* $a_i \geqslant 0$ *при всех* $i \in \overline{1,n}$. *Тогда*

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \tag{1}$$

Доказательство. Проведём доказательство по индукции. При $n = 1$ неравенство (1) переходит в равенство $1 + a_1 = 1 + a_1$. Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ неравенство (1) выполнено, докажем его справедливость для $n+1$. Умножая обе части неравенства (1) на число $1 + a_{n+1} \geqslant 0$, получим

$$(1+a_1)\ldots(1+a_n)(1+a_{n+1}) \geqslant (1+a_1+\ldots+a_n)(1+a_{n+1}) =$$
$$= 1 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \underbrace{(a_1+\ldots+a_n)a_{n+1}}_{\substack{\geqslant \\ 0}} \geqslant 1 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1},$$

отсюда следует справедливость неравенства (1) для всех $n \in \mathbb{N}$. ◀

Следствие 1 неравенства 1 Бернулли. *Пусть* $a \geqslant -1$ *и* $n \in \mathbb{N}_0$. *Тогда*

$$(1+a)^n \geqslant 1 + an.$$

Определение 3 (биномиальных коэффициентов). Пусть $n \in \mathbb{N}_0$ и $k \in \in \overline{0,n}$. Числа

$$C_n^k = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}{k!}$$

называются ***биномиальными коэффициентами*** (при этом по определению $0! := 1$).

Утверждение 2 [О свойстве биномиальных коэффициентов]. *Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \overline{1,n}$ выполнено равенство*

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k. \tag{2}$$

Доказательство. Формула (2) проверяется непосредственно по определению 3 биномиальных коэффициентов. ◀

Замечание 1. Формулы (2) вместе с равенствами $C_n^0 = C_n^n = 1$ достаточно для однозначного определения чисел C_n^k при всех $n \in \mathbb{N}_0$ и $k \in \overline{0,n}$.

Теорема 2 (о биноме Ньютона). *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда верна формула* ***бинома Ньютона***

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \tag{3}$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты (см. определение 3).

Доказательство. При $n = 0$ равенство (3) обращается в тождество $1 = 1$. Пусть оно верно для некоторого $n \in \mathbb{N}_0$. Используя свойство (2) биномиальных коэффициентов, получим

$$(a+b)^{n+1} = a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \overset{\{m=k+1\}}{=}$$

$$\overset{\{m=k+1\}}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k + \sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} a^{n-m+1} b^m + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k.$$

Таким образом, формула (3) бинома Ньютона доказана по индукции. ◀

Теорема 3 (о числе e). *Последовательность*

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{4}$$

строго возрастает и сходится, то есть существует

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Доказательство. Для начала докажем ограниченность последовательности x_n сверху. По формуле (3) бинома Ньютона получим

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}^{\substack{n^k \\ \geqslant}}}{k!} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k! n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Из последнего неравенства с учётом того, что при всех $k \geqslant 2$ выполнено

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}},$$

получим

$$x_n \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \overset{p=\{k-1\}}{=} 2 + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2^p} = 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}}{\dfrac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \tag{6}$$

что и доказывает ограниченность последовательности x_n сверху числом 3.

Далее по следствию 1 неравенства Бернулли получим

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1 + \dfrac{1}{n+1}}{1 + \dfrac{1}{n}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \Bigg(1 \underbrace{- \frac{1}{(n+1)^2}}_{\substack{\vee \\ -1}}\Bigg)^n \frac{n+2}{n+1} \overset{\text{С. 1}}{\geqslant} \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \frac{n+2}{n+1} =$$

$$= \frac{\big((n+1)^2 - n\big)(n+2)}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} > 1,$$

а значит, для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$x_{n+1} > x_n. \tag{7}$$

Таким образом, последовательность x_n строго возрастает и ограничена сверху, а следовательно, имеет предел по теореме 1 о пределе монотонной последовательности, который традиционно обозначается буквой e. Из строгого возрастания последовательности x_n и неравенства (6) вытекают неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \overset{\text{т. } 1.1}{\leqslant} 3. \qquad ◀$$

Утверждение 3. *Последовательность*

$$y_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right), \tag{8}$$

где x_n определяется формулой (4), является строго убывающей и сходится к числу e.

Доказательство. Точно так же, как и при доказательстве теоремы 3, с помощью следствия 1 неравенства Бернулли для всех $n \in \mathbb{N}$ устанавливается неравенство

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} > 1,$$

а с ним и убывание последовательности y_n. Также имеем

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e(1+0) = e. \qquad ◀$$

Утверждение 4. *Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$0 < e - x_n < \frac{3}{n}, \tag{9}$$

где x_n определяется формулой (4).

Доказательство. Из теоремы 3 о числе e и утверждения 3 вытекает неравенство

$$x_n < e < y_n = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = x_n + \frac{x_n}{n},$$

где y_n определяется формулой (8). Отсюда, используя неравенство (6), получим требуемое неравенство (9). ◀

§ 2.3. О гармоническом ряде

В этом параграфе мы будем пользоваться свойствами функции $\ln x := \log_e x$, известными из курса элементарной математики. Отметим, что строгое определение логарифмической функции со всеми вытекающими из него свойствами будет дано ниже в разделе 3.5.1, и при этом материал данного параграфа использоваться не будет.

Утверждение 1. *Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства*

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \tag{1}$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}. \tag{2}$$

Доказательство. По ходу доказательства теоремы 2.3 о числе e установлено неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e,$$

логарифмируя которое по основанию e, получим неравенство (1). Из утверждения 2.3 следует неравенство

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

логарифмируя которое по основанию e, получим неравенство (2). ◀

Определение 1. Пусть a_n — числовая последовательность. Пара последовательностей (a_n, S_n), где

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{3}$$

называется ***рядом*** и обозначается символами

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{4}$$

При этом для любого $n \in \mathbb{N}$ величина S_n называется n-й ***частичной суммой*** ряда (4). Ряд (4) называется ***сходящимся***, если *существует конечный предел последовательности его частичных сумм*, то есть если

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n =: A \in \mathbb{R},$$

при этом число A называют ***суммой*** ряда (4), для которой обычно используют те же обозначения (4), что не приводит к путанице, так как из контекста ясно, что имеется в виду: сам ряд или его сумма. Во всех остальных случаях ряд (4) называется ***расходящимся***.

Определение 2 (гармонического ряда). Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{5}$$

называется ***гармоническим рядом***.

Теорема 1 (о расходимости гармонического ряда). *Гармонический ряд (5) расходится. Более того, для всех $n \in \mathbb{N}$ верна оценка*

$$0 < S_n - \ln n - c < \frac{1}{n}, \tag{6}$$

где S_n — частичная сумма гармонического ряда (5), а c — константа Эйлера.

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$w_n := S_n - \ln n.$$

В силу неравенства (2) для всех $n \in \mathbb{N}$ получим

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+1) - \ln n\big) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \overset{(2)}{<} 0,$$

что означает строгое убывание последовательности w_n. С другой стороны, в силу неравенства (1) для всех $n \in \mathbb{N}$ получим

$$w_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \overset{(1)}{>} \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln n =$$
$$= \ln(n+1) - \ln n > 0,$$

а значит, последовательность w_n ограничена снизу числом 0. По теореме 1 о пределе монотонной последовательности существует

$$\lim_{n\to\infty} w_n =: c,$$

который называют *константой Эйлера*. Переписывая последнее равенство в эквивалентном виде (см. замечание 1.3), получим для частичных сумм гармонического ряда представление

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = S_n = \ln n + c + \alpha_n, \tag{7}$$

где последовательность α_n бесконечно малая. Из формулы (7) и свойств логарифмической функции непосредственно вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty,$$

а следовательно, и расходимость гармонического ряда. Для оценки порядка малости последовательности α_n в формуле (7) рассмотрим последовательность

$$v_n \coloneqq S_{n-1} - \ln n.$$

В силу неравенства (1) для всех $n \in \mathbb{N}$ получим

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \overset{(1)}{>} 0,$$

а значит, последовательность v_n строго возрастает. С другой стороны,

$$v_n = w_n - \frac{1}{n} \to c - 0 = c$$

при $n \to \infty$, поэтому для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$v_n < c < w_n, \tag{8}$$

равносильное неравенству

$$-w_n < -c < -v_n = \frac{1}{n} - w_n,$$

из которого вытекает неравенство

$$0 < w_n - c < \frac{1}{n},$$

совпадающее с неравенством (6), которое и требовалось доказать. ◀

Замечание 1. Вывод неравенства (6) в теореме 1 аналогичен доказательству утверждения 2.4 с заменой последовательностей x_n и y_n на v_n и w_n соответственно.

Замечание 2. Ценность теоремы 1 состоит в получении равенства (7) и неравенства (6), сам же факт расходимости гармонического ряда можно установить намного проще. Если предположить, что $S_n \to A \in \mathbb{R}$, то $S_{2n} \to A$ как подпоследовательность сходящейся последовательности, а значит,

$$S_{2n} - S_n \to A - A = 0.$$

Но последнее равенство противоречит неравенству

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

верному для всех $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Ряд*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{9}$$
расходится при всех $p \leqslant 1$ и сходится при всех $p > 1$.

Доказательство. Обозначим частичные суммы ряда (9)
$$S'_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p},$$
а частичные суммы гармонического ряда (5) будем по-прежнему обозначать S_n.

Если $p \leqslant 1$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство
$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n},$$
а следовательно, и неравенство
$$S'_n \geqslant S_n \overset{\text{Т. } 1}{\to} +\infty.$$
Отсюда вытекает, что
$$S'_n \to +\infty,$$
следовательно, ряд (9) расходится.

Если $p > 1$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство
$$S'_n < S'_{2n+1} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}}_{\substack{\wedge \\ \frac{2}{2^p}}} + \underbrace{\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p}}_{\substack{\wedge \\ \frac{2}{4^p}}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{(2n)^p} + \frac{1}{(2n+1)^p}}_{\substack{\wedge \\ \frac{2}{(2n)^p}}} <$$
$$< 1 + \frac{2}{2^p} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p}\right)}_{S'_n} = 1 + 2^{1-p} S'_n,$$
из которого получаем неравенство
$$(1 - 2^{1-p}) S'_n < 1.$$
Так как $1 - 2^{1-p} > 0$ при $p > 1$, то из последнего неравенства для всех $n \in \mathbb{N}$ получим
$$S'_n < \frac{1}{1 - 2^{1-p}}.$$
Таким образом показано, что строго возрастающая последовательность S'_n ограничена сверху, а значит, по теореме 2.1 о пределе монотонной последовательности имеет конечный предел, что и означает сходимость ряда (9) по определению 1. ◀

§ 2.4. Теорема Штольца

Лемма 1. *Пусть* $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i > 0$ *и* $A < \dfrac{a_i}{b_i} < B$ *для всех* $i \in \overline{1, n}$. *Тогда*

$$A < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} < B.$$

Доказательство. Умножая данные нам n неравенств на соответствующие $b_i > 0$, имеем $Ab_i < a_i < Bb_i$ для всех $i \in \overline{1, n}$. Просуммировав последние неравенства от 1 до n, получим

$$A \sum_{i=1}^{n} b_i < \sum_{i=1}^{n} a_i < B \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

отсюда делением на $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i > 0$ получим утверждение леммы. ◀

Теорема 1 (Штольца). *Пусть даны две числовые последовательности* x_n *и* y_n, *причём* y_n *строго возрастает и является бесконечно большой. Если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A.$$

Доказательство. Рассмотрим возможные случаи:
1^0. $A \in \mathbb{R}$.
2^0. $A = +\infty$.
3^0. $A = -\infty$.

1^0. По определению 1.2 предела последовательности $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0$ имеем

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любого $n \geqslant N_0 + 1$, применяя лемму 1 с номера N_0 до $n - 1$, получим

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{(x_{N_0+1} - x_{N_0}) + (x_{N_0+2} - x_{N_0+1}) + \ldots + (x_n - x_{n-1})}{(y_{N_0+1} - y_{N_0}) + (y_{N_0+2} - y_{N_0+1}) + \ldots + (y_n - y_{n-1})} < A + \frac{\varepsilon}{2},$$

то есть

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{N_0}}{y_n - y_{N_0}} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку последовательность y_n бесконечно большая и возрастающая, то для некоторого $N_1 \in \mathbb{N}$ имеем $y_n > 0$ для всех $n \geqslant N_1$. Разделив при $n \geqslant \max\{N_0+1, N_1\}$ числитель и знаменатель дроби в последнем неравенстве на $y_n > 0$, получим

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{x_{N_0}}{y_n}}{1 - \dfrac{y_{N_0}}{y_n}} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Умножая все три части последнего неравенства на $1 - y_{N_0}/y_n > 0$ и прибавляя к каждой из них x_{N_0}/y_n, получим

$$a_n \coloneqq \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{y_{N_0}}{y_n}\right) + \frac{x_{N_0}}{y_n} < \frac{x_n}{y_n} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{y_{N_0}}{y_n}\right) + \frac{x_{N_0}}{y_n} =: b_n.$$

По леммам 1.4 и 1.6 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{N_0}}{y_n} = 0, \ \lim_{n\to\infty} \frac{x_{N_0}}{y_n} = 0,$$

так как $y_n \to \infty$, а x_{N_0} и y_{N_0} — константы, не зависящие от n. Из арифметических свойств 1.3 предела последовательности вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A - \frac{\varepsilon}{2}, \ \lim_{n\to\infty} b_n = A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует существование чисел $N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ таких, что $A - \varepsilon < a_n$ при всех $n \geqslant N_2$ и $b_n < A + \varepsilon$ при всех $n \geqslant N_3$. Взяв произвольное $n \geqslant \max\{N_0 + 1, N_1, N_2, N_3\}$, получим

$$A - \varepsilon < a_n < \frac{x_n}{y_n} < b_n < A + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A,$$

что завершает рассмотрение случая 1^0.

2^0. По определению предела при $A = +\infty$ имеем $\forall C \in \mathbb{R}\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geqslant N_0$ выполнено

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > C.$$

Как и в случае 1^0, проводя аналогичные рассуждения, для всех $n \geqslant N_0 + 1$ получим

$$\frac{x_n - x_{N_0}}{y_n - y_{N_0}} > C$$

и

$$\frac{x_n}{y_n} > C\left(1 - \frac{y_{N_0}}{y_n}\right) + \frac{x_{N_0}}{y_n} =: a_n$$

для всех $n \geqslant \max\{N_0 + 1, N_1\}$. Учитывая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{N_0}}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{N_0}}{y_n} = 0,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = C,$$

отсюда для некоторого $N_2 \in \mathbb{N}$ при всех $n \geqslant \max\{N_0 + 1, N_1, N_2\}$ будем иметь

$$\frac{x_n}{y_n} > C - 1.$$

В силу произвольности $C \in \mathbb{R}$ это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

3^0. Рассмотрим последовательность $z_n \coloneqq -x_n$. Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = -\infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1} - z_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty.$$

По рассмотренному выше пункту 2^0 имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{y_n} = +\infty,$$

что равносильно требуемому равенству

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty. \qquad \blacktriangleleft$$

Замечание 1. Используя представление $y_{n+1} - y_n = -\big((-y_{n+1}) - (-y_n)\big)$, получим, что теорема 1 Штольца остаётся верной для случая, когда последовательность y_n строго убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$. Также стоит отметить, что по аналогичной схеме доказывается вариант теоремы 1 Штольца для случая, когда последовательность y_n строго монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Замечание 2. При условии строгого возрастания и неограниченности последовательности y_n из существования

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n},$$

вообще говоря, не следует существование

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Действительно, достаточно взять $x_n \coloneqq (-1)^n$ и $y_n \coloneqq n$. $\blacktriangleleft$

Замечание 3. Утверждение теоремы 1 Штольца перестаёт быть верным при $A = \infty$.

Действительно, пусть $x_n = (-1)^n n$ и $y_n := n$. Тогда

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = (-1)^{n+1}(2n+1) \to \infty,$$

но

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = (-1)^n \not\to \infty.$$ ◀

Пример 1. Если

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = A.$$

Действительно, полагая $x_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и $y_n := n$, по теореме 1 Штольца получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \overset{\text{т. 1}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{1} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A.$$

§ 2.5. Принцип вложенных отрезков и лемма Гейне–Бореля

Определение 1 (последовательности вложенных отрезков). Пусть числовые последовательности a_n и b_n для всех $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условию

$$a_n \leqslant b_n.$$

Последовательность отрезков $I_n := [a_n, b_n]$ называется ***последовательностью вложенных отрезков***, если для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$I_{n+1} \subset I_n.$$

Теорема 1 [Принцип вложенных отрезков Коши–Кантора]. *Для любой последовательности $I_n = [a_n, b_n]$ вложенных отрезков* (см. определение 1) *найдётся точка $\xi \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам. При условии*

$$|I_n| = b_n - a_n \to 0$$

такая точка ξ единственна.

Доказательство. Для начала заметим, что $a_m \leqslant b_n$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$. Действительно, если для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$ выполнено противоположное неравенство $a_m > b_n$, то $a_n \leqslant b_n < a_m \leqslant b_m$, а следовательно, $I_m \cap I_n = \varnothing$, чего не может быть по определению 1. Это означает, что для множеств $A := \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ и $B := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ левых и правых концов отрезков I_n выполнены все условия принципа 1.4.2 полноты, который, в свою очередь, является следствием теоремы 1.3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств (см. утверждение 1.4.3). В силу этого принципа найдётся точка $\xi \in \mathbb{R}$ такая, что $a_m \leqslant \xi \leqslant b_n$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$, в частности $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$, то есть $\xi \in I_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Если выполнено условие $|I_n| \to 0$ и ξ_1, ξ_2 — две точки, одновременно принадлежащие всем отрезкам I_n, то

$$0 \leqslant |\xi_1 - \xi_2| \leqslant |I_n| \to 0,$$

поэтому постоянная последовательность $|\xi_1 - \xi_2|$ является бесконечно малой по принципу 1.2 двустороннего ограничения. По лемме 1.5 получаем, что $|\xi_1 - \xi_2| = 0$, а следовательно, $\xi_1 = \xi_2$. ◀

Замечание 1. Отметим, что при доказательстве теоремы 1 для нахождения точки ξ вместо принципа 1.4.2 полноты можно было бы также воспользоваться теоремой 2.1 о пределе монотонной последовательности (последовательность a_n левых концов отрезков I_n не убывает и ограничена сверху, например, числом b_1).

Далее докажем теорему 1.3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств исходя из принципа вложенных отрезков и используя свойства 1–16 *архимедова упорядоченного поля*.

Утверждение 1. *Если выполнена теорема 1 [Принцип вложенных отрезков Коши–Кантора], то справедлива теорема 1.3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств.*

Доказательство. Достаточно (см. последний абзац доказательства теоремы 1.3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств) доказать существование супремума ограниченного сверху числового множества $\Omega \neq \varnothing$, опираясь на принцип 1 вложенных отрезков. Для некоторых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ выполнено $a \in \Omega$ и $x \leqslant b$ для всех $x \in \Omega$. Обозначим $I_0 := [a, b]$. Разбивая отрезок I_0 точкой $c := (a + b)/2$ пополам, получим отрезки $I_0^1 := [a, c]$ и $I_0^2 := [c, b]$. В качестве I_1 возьмём самую правую из этих половин, у которой пересечение со множеством Ω непусто, то есть:

$$I_1 := \begin{cases} I_0^2, & \text{если } I_0^2 \cap \Omega \neq \varnothing; \\ I_0^1, & \text{если } I_0^2 \cap \Omega = \varnothing. \end{cases}$$

Из этого построения непосредственно вытекает, что на отрезке I_1 имеются точки множества Ω, а правее этого отрезка точек множества Ω нет. Далее разобьём отрезок I_1 пополам и обозначим его левую и правую половину I_1^1 и I_1^2 соответственно и в качестве I_2 возьмём самую правую из этих половин, у которой пересечение со множеством Ω непусто. Продолжая описанную процедуру последовательного деления отрезков пополам (*дихотомию*) до бесконечности, получим последовательность $I_0 \supset I_1 \supset \ldots$ вложенных отрезков, при этом по построению для любого $n \in \mathbb{N}$ на отрезке I_n имеются точки множества Ω, а правее этого отрезка точек множества Ω нет, также имеем $|I_n| = (b-a)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$ (при доказательстве этого факта неявно используется принцип 16 Архимеда). По принципу 1 вложенных отрезков найдётся точка ξ, принадлежащая всем отрезкам I_n. Пользуясь определением 1.3.3$'$ супремума, покажем, что $\xi = \sup\Omega$.

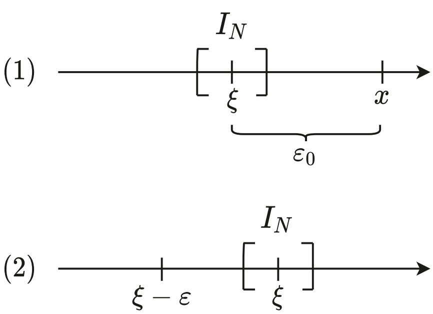


Рис. 4

Пусть $x \in \Omega$ и $x > \xi$. Тогда $x - \xi =: \varepsilon_0 > 0$ и найдётся индекс $N \in \mathbb{N}$ такой, что $|I_N| < \varepsilon_0$. Так как $\xi \in I_N$, то из этого следует, что точка x лежит правее отрезка I_N (см. рис. 4), что невозможно по построению. Этим проверено выполнение условия (1) определения 1.3.3$'$.

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда найдётся индекс $N \in \mathbb{N}$ такой, что $|I_N| < \varepsilon$. Из того, что $\xi \in I_N$, следует, что весь отрезок I_N лежит правее точки $\xi - \varepsilon$ (см. рис. 4). Так как по построению $I_N \cap \Omega \neq \varnothing$, то найдётся точка $x \in \Omega$ такая, что $x > \xi - \varepsilon$. Этим проверено выполнение условия (2) определения 1.3.3$'$. ◀

Замечание 2. При доказательстве теоремы 1.3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств можно было бы ограничиться рассмотрением лишь *счётных* множеств Ω. Действительно, в этом случае принцип 1.4.2 полноты также выполняется для счётных множеств A, B (см. доказательство ($\Longleftarrow$) утверждения 1.4.3), а следовательно, выполняется и принцип вложенных отрезков. Из него уже выводится общая теорема 1.3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств согласно утверждению 1.

Определение 2 (покрытия). ***Покрытием*** множества $\Omega \subset \mathbb{R}$ называется любое семейство $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ подмножеств $\mathbb{R}$ такое, что $\Omega \subset \bigcup A$. Если все множества $\alpha \in A$ являются *интервалами*, то покрытие A называется ***открытым***.

Определение 3 (подпокрытия). ***Подпокрытием*** покрытия A множества Ω называется любое множество $B \subset A$ такое, что $\Omega \subset \bigcup B$.

Теорема 2 [Лемма Гейне–Бореля]. *У любого открытого покрытия отрезка $[a, b]$ существует конечное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть у некоторого открытого покрытия A отрезка $[a, b] =: I_0$ не существует конечного подпокрытия этого отрезка. Для получения противоречия, как и при доказательстве утверждения 1, применим метод *дихотомии*. Разбивая отрезок I_0 точкой $c := (a+b)/2$ пополам, получим, что у покрытия A не существует конечного подпокрытия одной из его половин, которую мы обозначим I_1 (иначе в качестве конечного подпокрытия отрезка I_0 можно было бы взять объединение конечных подпокрытий этих двух половин). Далее разобьём отрезок I_1 пополам и, рассуждая аналогично, получим, что у покрытия A не существует конечного подпокрытия одной из его половин, которую мы обозначим I_2. Продолжая описанную процедуру до бесконечности, получим последовательность $I_0 \supset I_1 \supset \ldots$ вложенных отрезков, при этом по построению для любого $n \in \mathbb{N}$ у покрытия A не существует конечного подпокрытия отрезка I_n, также имеем $|I_n| = (b - a)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$. По принципу 1 вложенных отрезков найдётся точка ξ, принадлежащая всем отрезкам I_n. Так как $\xi \in [a, b] = I_0$, то по определению 2 открытого покрытия найдётся интервал $(\alpha, \beta) \in A$ такой, что $\xi \in (\alpha, \beta)$. Для $\varepsilon := \min\{\xi - \alpha, \beta - \xi\} > 0$ найдётся индекс $N \in \mathbb{N}$ такой, что $|I_N| < \varepsilon$. Так как $\xi \in I_N$, то $I_N \subset (\alpha, \beta)$. Получили для отрезка I_N конечное подпокрытие покрытия A (всего одним интервалом системы A), что противоречит построению последовательности отрезков I_n. ◀

Замечание 3. Теорема 2 [Лемма Гейне–Бореля] выражает глубокий факт, что отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ является *компактом* (см. далее определение 8.0.15 или более общее определение 10.2.23).

§ 2.6. Подпоследовательности и частичные пределы

Определение 1 (подпоследовательности). Пусть x_n — произвольная последовательность, а n_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел (а значит автоматически имеет место неравенство $n_k \geqslant k$ для всех $k \in \mathbb{N}$). Последовательность $y_k := x_{n_k}$ называется ***подпоследовательностью*** последовательности x_n.

Утверждение 1. *Если последовательность $x_n \to a \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, то любая её подпоследовательность $x_{n_k} \to a$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся индекс $N \in \mathbb{N}$ такой, что $x_n \in O_\varepsilon(a)$ для всех $n \geqslant N$. В силу неравенства $n_k \geqslant k$ это означает, что $x_{n_k} \in O_\varepsilon(a)$ для всех $k \geqslant N$, что и завершает доказательство утверждения. ◀

Определение 2 (частичного предела последовательности). Точка $\xi \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется ***частичным пределом*** последовательности x_n, если найдётся подпоследовательность $x_{n_k} \to \xi$.

Утверждение 2. *Точка ξ является частичным пределом последовательности $x_n \iff$ для любого $\varepsilon > 0$ множество $O_\varepsilon(\xi)$ содержит бесконечно много элементов x_n (то есть множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in O_\varepsilon(\xi)\}$ бесконечно).*

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Вытекает непосредственно из существования подпоследовательности $x_{n_k} \to \xi$ (см. определение 2 частичного предела последовательности) и того факта, что отображение $k \mapsto n_k$ инъективно (см. определение 1 подпоследовательности).

$\Longleftarrow$: Для любого $k \in \mathbb{N}$ положим $\varepsilon_k := 1/k$ в случае $\xi \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon_k := k$ в случае $\xi \in \{-\infty, +\infty\}$. Выберем (из бесконечного множества) произвольный номер n_1 такой, что $x_{n_1} \in O_{\varepsilon_1}(\xi)$. Далее выберем (из бесконечного множества) некоторый номер $n_2 > n_1$ такой, что $x_{n_2} \in O_{\varepsilon_2}(\xi)$. Действуя по аналогии и продолжая этот процесс до бесконечности, получим подпоследовательность x_{n_k} последовательности x_n. По определению 1.2 предела последовательности проверяется, что $x_{n_k} \to \xi$, а следовательно, ξ — частичный предел последовательности x_n по определению 2 частичного предела последовательности. ◀

Замечание 1. В литературе частичные пределы часто называют *предельными точками последовательности*, что может вызвать путаницу с понятием *предельной точки множества* (см. далее определение 3.1.1 предельной точки).

Следствие 1 теоремы 1.1 о предельном переходе в неравенстве. *Пусть ξ — частичный предел числовой последовательности x_n, элементы которой удовлетворяют неравенству $-\infty \leqslant a \leqslant x_n \leqslant b \leqslant +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $a \leqslant \xi \leqslant b$.*

Определение 3 (верхнего и нижнего предела последовательности). ***Верхним*** [***нижним***] пределом последовательности x_n называется её максимальный [минимальный] частичный предел, и обозначается он $\varlimsup x_n$ ($\varliminf x_n$).

Замечание 2. Единственность $\varlimsup x_n$, $\varliminf x_n$ вытекает, соответственно, из единственности максимума и минимума. В случае их существования имеет место очевидное неравенство

$$\varliminf x_n \leqslant \varlimsup x_n.$$

Замечание 3. Можно дать определение верхнего и нижнего пределов (см. [8, с. 84]), эквивалентное определению 3 верхнего и нижнего предела последовательности:

$$\overline{\lim}\, x_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geqslant n\}, \quad \underline{\lim}\, x_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geqslant n\}.$$

Утверждение 3. *Пусть $\xi \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ и для любого $\varepsilon > 0$ множество $O_\varepsilon(\xi)$ содержит бесконечно много элементов последовательности x_n (то есть множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in O_\varepsilon(\xi)\}$ бесконечно), тогда как справа [слева] от $O_\varepsilon(\xi)$ имеется лишь конечное число элементов x_n. Тогда ξ является верхним [нижним] пределом последовательности x_n.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение для верхнего предела. Из утверждения 2 вытекает, что ξ является частичным пределом последовательности x_n. Если $\xi < \xi' \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$, то найдутся $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ такие, что $O_{\varepsilon'}(\xi')$ целиком лежит правее $O_\varepsilon(\xi)$, а следовательно, содержит лишь конечное число элементов x_n. Из утверждения 2 вытекает, что ξ' не является частичным пределом последовательности x_n, поэтому ξ является максимальным частичным пределом x_n и $\xi = \overline{\lim}\, x_n$ по определению 3 верхнего и нижнего предела последовательности.

Случай нижнего предела сводится к рассмотренному выше с использованием равенства $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}(-x_n)$, проверяемого по определению 3 верхнего и нижнего предела последовательности. ◀

Теорема 1 (существования верхнего и нижнего пределов последовательности). *У любой числовой последовательности x_n существуют верхний и нижний пределы из расширенной числовой прямой.*

Доказательство. Сначала докажем существование $\overline{\lim}\, x_n$. Если последовательность x_n не ограничена сверху, то у неё найдётся подпоследовательность $x_{n_k} \to +\infty$, поэтому $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ по определению 3 верхнего и нижнего предела последовательности.

Пусть последовательность x_n ограничена сверху, то есть $x_n \leqslant b \in \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для всех $m \in \mathbb{N}$ положим $J_m := [b - m, b]$. Если для любого $m \in \mathbb{N}$ на отрезке J_m имеется лишь конечное число элементов x_n (то есть множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in J_m\}$ конечно), то $x_n \to -\infty$ (см. замечание 1.2), а значит, $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ по определению 3 верхнего и нижнего предела последовательности в силу утверждения 1. Если для некоторого m_0 отрезок J_{m_0} содержит в себе бесконечно много элементов x_n (то есть множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in J_{m_0}\}$ бесконечно), то обозначим $a := b - m_0$, $I_0 := J_{m_0} = [a, b]$. Разбивая отрезок I_0 точкой $c := (a + b)/2$ пополам, получим отрезки $I_0^1 := [a, c]$ и $I_0^2 := [c, b]$. В качестве I_1 возьмём самую правую из этих половин, которая содержит бесконечно много элементов x_n (такая половина всегда найдётся, так как весь отрезок I_0 содержит бесконечно много элементов x_n), то есть:

$$I_1 := \begin{cases} I_0^2, & \text{если } I_0^2 \text{ содержит бесконечно много элементов } x_n; \\ I_0^1, & \text{если } I_0^2 \text{ содержит лишь конечное число элементов } x_n. \end{cases}$$

Из этого построения непосредственно вытекает, что отрезок I_1 содержит бесконечно много элементов x_n, а правее этого отрезка имеется лишь конечное число элементов x_n. Далее разобьём отрезок I_1 пополам и обозначим его левую и правую половины I_1^1 и I_1^2 соответственно. Действуя по аналогии, в качестве I_2 возьмём самую правую из этих половин, которая содержит бесконечно много элементов x_n. Продолжая описанную процедуру до бесконечности, получим последовательность $I_0 \supset I_1 \supset \ldots$ вложенных отрезков, при этом по построению для любого $m \in \mathbb{N}$ отрезок I_m содержит бесконечно много элементов x_n, а правее этого отрезка имеется лишь конечное число элементов x_n, также имеем $|I_m| = (b-a)/2^m \to 0$ при $m \to \infty$. По принципу 1 вложенных отрезков найдётся точка $\xi \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем отрезкам I_m. Далее для любого $\varepsilon > 0$ найдём индекс $N \in \mathbb{N}$ такой, что $|I_N| < \varepsilon$. Так как $\xi \in I_N$, то $I_N \subset O_\varepsilon(\xi)$, а значит, интервал $O_\varepsilon(\xi)$ содержит бесконечно много элементов x_n, тогда как правее этого интервала имеется лишь конечное число элементов x_n. По утверждению 3 получим, что $\xi = \overline{\lim}\, x_n$.

Существование $\underline{\lim}\, x_n$ вытекает из равенства $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}(-x_n)$, проверяемого по определению 3 верхнего и нижнего предела последовательности. ◀

Как следствие теоремы 1 существования верхнего и нижнего пределов последовательности получим следующую важнейшую теорему.

Теорема 2 (Больцано–Вейерштрасса). *Из любой числовой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $\xi \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Из любой ограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому числу $\xi \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Первое предложение этой теоремы вытекает непосредственно из теоремы 1 существования верхнего и нижнего пределов последовательности и определений 2 частичного предела последовательности, 3 верхнего и нижнего предела последовательности (в качестве ξ можно взять $\overline{\lim}\, x_n$ или $\underline{\lim}\, x_n$). Второе предложение вытекает из первого и из следствия 1: если $a, b \in \mathbb{R}$ и неравенство $a \leqslant x_n \leqslant b$ выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$, то $a \leqslant \xi \leqslant b$, а следовательно, $\xi \in \mathbb{R}$. ◀

Теорему 2 Больцано–Вейерштрасса можно также изящно вывести из теоремы 5.2 [Лемма Гейне–Бореля], используя лишь свойства 1–15 *упорядоченного поля*.

Утверждение 4. *Если справедлива теорема 5.2 [Лемма Гейне–Бореля], то справедлива теорема 2 Больцано–Вейерштрасса.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность x_n. Если x_n не ограничена, то она не ограничена либо сверху, либо снизу, а следовательно, найдётся её подпоследовательность, стремящаяся либо к $+\infty$, либо к $-\infty$. Если x_n ограничена, то найдутся $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что $x_n \in [a, b]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что существует частичный предел $\xi \in [a, b]$ последовательности x_n. Если это не так, то в силу утверждения 2 для любого $x \in [a, b]$ найдётся $\varepsilon_x > 0$ такое, что интервал $O_{\varepsilon_x}(x)$ содержит лишь конечное число элементов последовательности x_n (то есть множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in O_{\varepsilon_x}(x)\}$ конечно). Очевидно, что система интервалов $\{O_{\varepsilon_x}(x) : x \in [a, b]\}$ образует *открытое покрытие* (см. определение 5.2) отрезка $[a, b]$, из которого по теореме 5.2 [Лемма Гейне–Бореля] можно выделить *конечное подпокрытие*, то есть $[a, b] \subset O_{\varepsilon_{x_1}}(x_1) \cup \ldots \cup O_{\varepsilon_{x_k}}(x_k) =: \Omega$, где $k \in \mathbb{N}$, $x_1 \ldots x_k \in [a, b]$ и каждый из интервалов $O_{\varepsilon_{x_1}}(x_1), \ldots, O_{\varepsilon_{x_k}}(x_k)$ содержит лишь конечное число элементов последовательности x_n. Это означает, что множество Ω, а следовательно, и весь отрезок $[a, b]$, содержит лишь конечное число элементов x_n (то есть множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in [a, b]\}$ конечно). Это противоречит тому, что $x_n \in [a, b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$, что и завершает доказательство утверждения. ◀

Далее сформулируем утверждение, обратное к утверждению 3.

Утверждение 3′. *Пусть $\xi \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ является верхним [нижним] пределом последовательности x_n. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $O_\varepsilon(\xi)$ содержит бесконечно много элементов последовательности x_n (то есть множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in O_\varepsilon(\xi)\}$ бесконечно), тогда как справа [слева] от $O_\varepsilon(\xi)$ имеется лишь конечное число элементов x_n.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ξ является частичным пределом последовательности x_n, то $O_\varepsilon(\xi)$ содержит бесконечно много элементов x_n в силу утверждения 2. Предположим, что правее [левее] $O_\varepsilon(\xi)$ имеется бесконечно много элементов x_n. Это автоматически означает, что $\xi \neq +\infty$ $[\xi \neq -\infty]$. Если $\xi = -\infty$ или $\xi \in \mathbb{R}$ $[\xi = +\infty$ или $\xi \in \mathbb{R}]$, то существует подпоследовательность x_{n_k} исходной последовательности, элементы которой удовлетворяют неравенству $x_{n_k} \geqslant b$ $[x_{n_k} \leqslant b]$, где соответственно $b = -\varepsilon$ или $b = \xi + \varepsilon$ $[b = \varepsilon$ или $b = \xi - \varepsilon]$ при всех $k \in \mathbb{N}$. По теореме 1 существования верхнего и нижнего пределов последовательности у последовательности

x_{n_k} существует частичный предел $\xi' \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ (в качестве ξ' можно взять $\overline{\lim}\, x_{n_k}$ или $\underline{\lim}\, x_{n_k}$), удовлетворяющий неравенству $\xi' \geqslant b > \xi$ [$\xi' \leqslant b < \xi$] в силу следствия 1. Так как ξ' является также частичным пределом исходной последовательности x_n, мы получили противоречие с тем, что ξ является верхним [нижним] её пределом. ◀

Замечание 4. Из утверждений 3 и $3'$ вытекает, что можно дать ещё одно (наряду с приведённым в замечании 3) определение верхнего и нижнего пределов, эквивалентное определению 3 верхнего и нижнего предела последовательности: точка $\xi \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ называется верхним [нижним] пределом последовательности x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $O_\varepsilon(\xi)$ содержит бесконечно много элементов последовательности x_n, тогда как справа [слева] от $O_\varepsilon(\xi)$ имеется лишь конечное число элементов x_n.

Теорема 3. *Для любого* $\xi \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ *имеем*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \iff \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \xi.$$

Доказательство. $\Longrightarrow$: Вытекает непосредственно из утверждения 1 и определений 2 частичного предела последовательности, 3 верхнего и нижнего предела последовательности.

$\Longleftarrow$: В силу утверждения $3'$ для любого $\varepsilon > 0$ имеется лишь конечное число элементов x_n, не принадлежащих $O_\varepsilon(\xi)$, поэтому $x_n \to \xi$ по определению 1.2 предела последовательности. ◀

§ 2.7. Критерий Коши существования предела последовательности

Определение 1 (фундаментальной последовательности). Последовательность x_n называется ***фундаментальной***, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geqslant N\ \ |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Утверждение 1 (об эквивалентных определениях фундаментальной последовательности). *Для любой последовательности x_n следующие условия равносильны:*

(1) x_n *фундаментальна*;

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\ \forall p \in \mathbb{N}_0\ \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$;

(3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall p \in \mathbb{N}_0\ \ |x_{N+p} - x_N| < \varepsilon$.

Доказательство будем проводить по следующей схеме:

$$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (1).$$

$(1) \implies (2)$: Достаточно положить $m := n + p$.
$(2) \implies (3)$: Достаточно положить $n := N$.
$(3) \implies (1)$: Зафиксируем N такое, что для всех $p \in \mathbb{N}_0$ выполнено

$$|x_{N+p} - x_N| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $m, n \geqslant N$, тогда $m = N + p_1$ и $n = N + p_2$, где $p_1, p_2 \in \mathbb{N}_0$. Имеем

$$|x_m - x_n| = |x_{N+p_1} - x_N + x_N - x_{N+p_2}| \leqslant$$
$$\leqslant |x_{N+p_1} - x_N| + |x_N - x_{N+p_2}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и завершает доказательство утверждения. ◀

Теорема 1 [Критерий Коши существования предела числовой последовательности]. *Для любой последовательности x_n имеем*

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \iff x_n \text{ фундаментальна.}$$

Доказательство.

$\implies$: Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: a \in \mathbb{R}$. По определению 1.2 предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ найдётся индекс N такой, что

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $n \geqslant N$, следовательно,

$$|x_m - x_n| = |x_m - a + a - x_n| \leqslant |x_m - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при всех $m, n \geqslant N$, что и означает фундаментальность последовательности x_n.

$\impliedby$: Сначала покажем, что любая фундаментальная последовательность x_n является ограниченной. По определению 1 фундаментальной последовательности для $\varepsilon := 1$ найдётся индекс N такой, что при всех $n \geqslant N$ выполнено

$$1 > |x_n - x_N| \geqslant |x_n| - |x_N|,$$

а следовательно, и

$$|x_n| \leqslant |x_N| + 1.$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$|x_n| \leqslant M := \max\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$, и ограниченность последовательности x_n установлена.

По теореме 6.2 Больцано–Вейерштрасса у ограниченной последовательности x_n найдётся сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to a \in \mathbb{R}$. Далее покажем, что $x_n \to a$. Для любого $\varepsilon > 0$ по определению 1 фундаментальной последовательности найдётся индекс N такой, что

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $m, n \geqslant N$. Также всегда найдётся индекс K такой, что $K \geqslant N$ и

$$|x_{n_K} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу неравенства $n_K \geqslant K \geqslant N$ для всех $m \geqslant N$ имеем

$$|x_m - a| = |x_m - x_{n_K} + x_{n_K} - a| \leqslant |x_m - x_{n_K}| + |x_{n_K} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

следовательно, $x_n \to a$ и теорема полностью доказана. ◀

Далее выведем теорему 1.3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств из критерия Коши, используя свойства 1–16 *архимедова упорядоченного поля*.

Утверждение 2. *Если выполнен критерий 1 Коши, то справедлива теорема 1.3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств.*

Доказательство. Построим последовательность вложенных отрезков $I_n =: [a_n, b_n]$ по алгоритму, определённому при доказательстве утверждения 5.1. Для любого $N \in \mathbb{N}$ при всех $m, n \geqslant N$ имеем $a_m, a_n \in I_N$, а следовательно,

$$|a_m - a_n| \leqslant |I_N| = \frac{b-a}{2^N} \xrightarrow{N \to \infty} 0,$$

поэтому последовательность a_n левых концов отрезков I_n является фундаментальной. По критерию 1 Коши существует

$$\lim_{n \to \infty} a_n =: \xi \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Покажем, что $\xi \in I_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если это не так, то $\xi \notin I_N = [a_N, b_N]$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Если $\xi < a_N$, то $a_n - \xi \geqslant a_N - \xi =: \varepsilon_0 > 0$ при всех $n \geqslant N$ в силу неубывания последовательности a_n, что противоречит равенству (1). Если $\xi > b_N$, то для некоторого номера N_1 будет выполнено неравенство $a_{N_1} > b_N$, что невозможно (см. начало доказательства теоремы 5.1 [Принцип вложенных отрезков Коши–Кантора]).

Дальнейшие рассуждения проводятся в полной аналогии с доказательством утверждения 5.1. ◀

§ 2.8. О полноте поля вещественных чисел

На графе, изображённом на рис. 5, каждое ребро (A, B) обозначает, что утверждение B выводится из утверждения A с использованием свойств *архимедова упорядоченного поля* (см. замечание 1.1.2). В тех случаях, когда утверждение A не использовалось при доказательстве утверждения B явно, соответствующие рёбра снабжены уточняющими ссылками. Таким образом, все семь утверждений, расположенные в вершинах графа, оказываются попарно эквивалентными (и, в частности, эквивалентными принципу 1.4.2 полноты) в любом

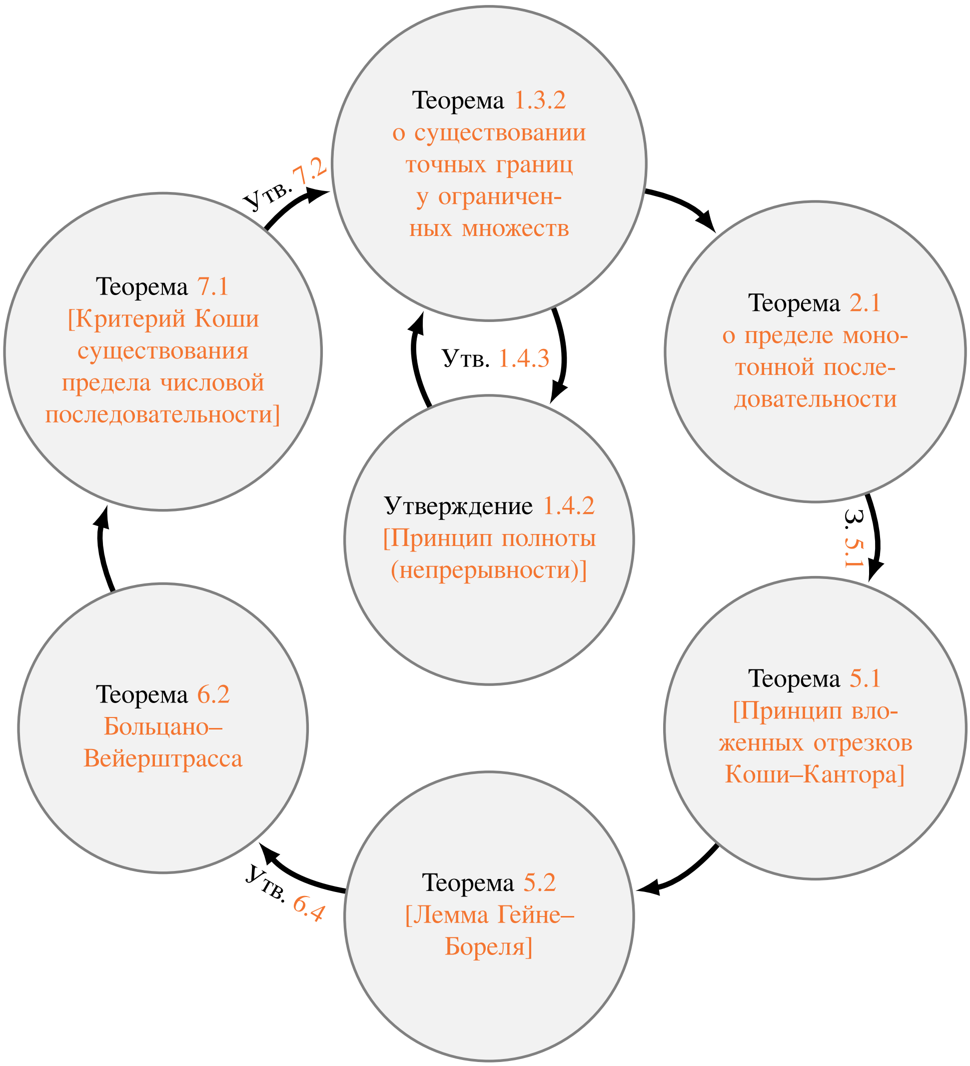


Рис. 5. Облики полноты

архимедовом упорядоченном поле. Отметим, что при доказательстве теоремы 5.2 [Лемма Гейне–Бореля] и утверждения 7.2 неявно использовался принцип Архимеда, который в упорядоченных полях эквивалентен тому, что последовательность $1/n$ является бесконечно малой. Также стоит отметить (см. [47]), что все рассмотренные утверждения, кроме критерия 7.1 Коши и принципа 5.1 вложенных отрезков, оказываются эквивалентными принципу 1.4.2 полноты в любом *упорядоченном поле*, а значит, из справедливости любого из них следует, что данное поле является *архимедовым* (см. замечание 1.4.3). Также в любом *упорядоченном поле* критерий Коши следует из принципа вложенных отрезков (см. [8, с. 78]), но не наоборот (см. [50]). Более подробно об упорядоченных полях и о различных утверждениях, эквивалентных принципу полноты, см. [33, 35, 39, 47, 50]. На будущее отметим, что из всех представленных выше семи утверждений только критерий 7.1 Коши имеет формулировку в терминах одних лишь *расстояний* между элементами без использования структуры упорядоченного множества. Именно критерий Коши и лёг в основу общего определения 10.2.8 полного метрического пространства (см. пункт 10.2.1).

Глава 3

Предел и непрерывность функции одной переменной

§ 3.1. Определение предела функции по Коши и по Гейне, основные свойства предела

Начиная с этой главы и до главы 7 включительно все *функции* по умолчанию предполагаются определёнными на подмножествах $\mathbb{R}$ и принимающими значения в $\mathbb{R}$.

Определение 1 (предельной точки). Точка x_0 называется ***предельной*** для множества $\Omega \subset \mathbb{R}$, если

$$\Omega \cap \mathring{O}_\delta(x_0) \neq \varnothing \text{ для всех } \delta > 0.$$

Точки $x_0 \in \Omega$, не являющиеся предельными для множества Ω, называются ***изолированными*** точками множества Ω.

Лемма 1. *Точка x_0 является предельной для множества $\Omega \subset \mathbb{R} \iff$ существует последовательность $x_n \in \Omega \setminus \{x_0\}$, сходящаяся к x_0.*

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Для любого $n \in \mathbb{N}$ положим $\delta_n := 1/n$ в случае $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\delta_n := n$ в случае $x_0 \in \{-\infty, +\infty, \infty\}$. Согласно определению 1 предельной точки для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся элемент $x_n \in \Omega \cap \mathring{O}_{\delta_n}(x_0)$, отсюда вытекает сходимость последовательности x_n к точке x_0.

$\Longleftarrow$: Если $x_n \to x_0$, то для любого $\delta > 0$ найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $x_N \in O_\delta(x_0)$. Так как $x_n \in \Omega \setminus \{x_0\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $x_N \in \Omega \cap \mathring{O}_\delta(x_0)$. ◀

Определение 2 (Коши). Пусть $\mathbb{R} \ni a$ — *предельная точка* для множества $\mathrm{Dom}(f)$. Число $b \in \mathbb{R}$ называется ***пределом функции*** f в точке a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon,$$

то есть для любой окрестности $O_\varepsilon(b)$ точки b найдётся проколотая окрестность $\mathring{O}_\delta(a)$ точки a такая, что

$$f\big(\mathring{O}_\delta(a) \cap \operatorname{Dom}(f)\big) \subset O_\varepsilon(b).$$

При этом употребляются обозначения $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $f(x) \xrightarrow{x\to a} b$, $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Определение 2′ (Гейне). Пусть $\mathbb{R} \ni a$ — *предельная точка* для множества $\operatorname{Dom}(f)$. Число $b \in \mathbb{R}$ называется ***пределом функции*** f в точке a, если для любой последовательности $x_n \in \operatorname{Dom}(f) \setminus \{a\}$, сходящейся к a, последовательность $f(x_n)$ сходится к b.

Теорема 1. *Определения 2 Коши и 2′ Гейне эквивалентны.*

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по определению 2 Коши. Рассмотрим произвольную последовательность $x_n \in \operatorname{Dom}(f) \setminus \{a\}$, сходящуюся к a. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$:

$$f\big(\mathring{O}_\delta(a) \cap \operatorname{Dom}(f)\big) \subset O_\varepsilon(b).$$

Также найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что $x_n \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \operatorname{Dom}(f)$ для всех $n \geqslant N$, а следовательно, и $f(x_n) \in O_\varepsilon(b)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $f(x_n) \to b$, а значит, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по определению 2′ Гейне.

$\Longleftarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по определению 2′ Гейне, но при этом неверно, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по определению 2 Коши, то есть $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x \in$ $\in \mathring{O}_\delta(a) \cap \operatorname{Dom}(f) : f(x) \notin O_{\varepsilon_0}(b)$. Это означает, что для последовательности $\delta_n := 1/n \to 0$ найдётся последовательность $x_n \in \mathring{O}_{\delta_n}(a) \cap \operatorname{Dom}(f)$ такая, что $f(x_n) \notin O_{\varepsilon_0}(b)$, а это автоматически означает, что $f(x_n) \not\to b$. В то же время $x_n \to a$, поэтому $f(x_n) \to b$ по определению 2′ Гейне — получили противоречие. ◀

Замечание 1. Наряду с рассмотренными выше определениями предела 2 Коши и 2′ Гейне для случая $a, b \in \mathbb{R}$ используются также модификации этих определений.

Во-первых, a или b могут принимать значения, равные $-\infty$, $+\infty$ или ∞. Чтобы дать корректное определение предела в этих случаях, в определении 2 Коши для точек такого вида нужно использовать определения (проколотых) окрестностей этих точек, введённые в замечании 2.1.2.

Другой важной разновидностью предела являются так называемые ***односторонние пределы*** вида $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = b$, где $a \in \mathbb{R}$. В этих случаях в определении 1 предельной точки и в определении 2 Коши под (проколотыми) окрестностями точек $a-$ и $a+$ понимаются соответственно любые множества вида

$$O_\delta(a-) = \mathring{O}_\delta(a-) := \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a\}$$

и

$$O_\delta(a+) = \mathring{O}_\delta(a+) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < a + \delta\},$$

где $\delta > 0$. Можно также рассматривать пределы вида $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b-$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b+$, где $b \in \mathbb{R}$, а окрестности точек $b-$ и $b+$ были определены выше.

Точки a и b любого из типов, описанных выше, будем называть ***несобственными***. Отметим, что определение 2′ Гейне во всех вышеописанных случаях записывается точно так же, как и в случае $a, b \in \mathbb{R}$, и что оно снова оказывается эквивалентным определению 2 Коши (в случае $a \in \{\infty, +\infty, -\infty\}$ при доказательстве теоремы 1 достаточно положить $\delta_n := n$). Об этом и о том, как правильно интерпретировать вышеописанные пределы в терминах *топологических пространств* (см. определение 10.2.12), см. пример 10.2.5 и замечание 10.2.16.

Утверждение 1 (о единственности предела). *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1 \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_2 \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$*, то* $b_1 = b_2$.

Доказательство. Пусть $b_1 \neq b_2$, тогда найдутся $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что $O_{\varepsilon_1}(b_1) \cap O_{\varepsilon_2}(b_2) = \varnothing$ (например, при $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ достаточно положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 := |b_1 - b_2|/2$). По определению 1 Коши найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $f\big(\mathring{O}_{\delta_1}(a) \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset O_{\varepsilon_1}(b_1)$, $f\big(\mathring{O}_{\delta_2}(a) \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset O_{\varepsilon_2}(b_2)$. Так как a — предельная точка для множества $\mathrm{Dom}(f)$, найдётся точка $x_0 \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$, где $\mathring{O}_\delta(a) := \mathring{O}_{\delta_1}(a) \cap \mathring{O}_{\delta_2}(a)$, а следовательно, $f(x_0) \in O_{\varepsilon_1}(b_1) \cap O_{\varepsilon_2}(b_2)$, что противоречит выбору $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. ◀

Замечание 2. Если точки $a+$ и $a-$ являются предельными для множества $\mathrm{Dom}(f)$ (см. замечание 1), то

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = b \iff \lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Замечание 3 (о пределе последовательности). Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x_n := f(n)$. Тогда определение 2.1.2 предела последовательности x_n равносильно определению 2 Коши для $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Определение 3 (локально ограниченной функции). Функция f называется ***локально ограниченной*** в точке a, предельной для множества $\mathrm{Dom}(f)$, если найдутся числа $M \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$ такие, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in O_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$.

Определение 4 (бесконечно малой функции). Функция f называется ***бесконечно малой*** в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Замечание 4. Из определения 2 Коши вытекает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \iff$ функция $\alpha(x) := f(x) - b$ является бесконечно малой в точке a.

Утверждение 2 [Произведение бесконечно малой в точке a и локально ограниченной в этой точке функций является бесконечно малой в точке a функцией]. *Пусть точка a — предельная для множества* $\mathrm{Dom}(f) \cap \cap \mathrm{Dom}(g)$, $|f(x)| \leqslant M$ *для всех* $x \in O_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ *при некотором* $\delta > 0$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по определению 4 бесконечно малой функции найдём $\delta_1 > 0$ такое, что $|g(x)| \leqslant \varepsilon/(M+1)$ для всех $x \in \mathring{O}_{\delta_1}(a) \cap \mathrm{Dom}(g)$. Обозначая $O_\delta(a) \cap \mathring{O}_{\delta_1}(a) =: \mathring{O}_{\delta_2}(a)$, получим

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leqslant \frac{M}{M+1}\varepsilon < \varepsilon$$

для всех $x \in \mathring{O}_{\delta_2}(a) \cap \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$, что и означает $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. ◀

Утверждение 3 (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел). *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, *тогда функция f локально ограничена в точке a.*

Доказательство. Для $\varepsilon := 1$ найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x) - b| < 1,$$

а следовательно,

$$|f(x)| < |b| + 1$$

при всех $x \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$. Положив $M := \max\{|f(a)|, |b| + 1\}$ в случае $a \in \mathrm{Dom}(f)$ и $M := |b| + 1$ в противном случае, получим

$$|f(x)| \leqslant M$$

при всех $x \in O_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$. ◀

Теорема 2 [Критерий Коши существования предела функции]. *Пусть a — предельная точка для множества* $\mathrm{Dom}(f)$, *тогда*

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \iff$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)\ \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - b| + |b - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$.

$\Longleftarrow$: Для любого $n \in \mathbb{N}$ выберем $\delta_n > 0$ так, что $|f(x_1) - f(x_2)| < 1/n$ для всех $x_1, x_2 \in \mathring{O}_{\delta_n}(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$. Так как a — предельная точка для множества $\mathrm{Dom}(f)$, то существует последовательность $x_n \in \mathring{O}_{\delta_n}(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$, а также существует $\xi_{mn} \in \mathring{O}_{\delta_m}(a) \cap \mathring{O}_{\delta_n}(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $m, n \in \mathbb{N}$ получим

$$|f(x_m) - f(x_n)| \leqslant |f(x_m) - f(\xi_{mn})| + |f(\xi_{mn}) - f(x_n)| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{N} \qquad (1)$$

при $m, n \geqslant N$, а значит, последовательность $f(x_n)$ является фундаментальной и сходится к некоторому числу $b \in \mathbb{R}$ по теореме 2.7.1 [Критерий Коши существования предела числовой последовательности]. Переходя при любом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ в неравенстве (1) к пределу при $n \to \infty$, по теореме 2.1.1 о предельном переходе в неравенстве получим

$$|f(x_m) - b| \leqslant \frac{1}{m},$$

поэтому для всех $x \in \mathring{O}_{\delta_m}(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ имеем

$$|f(x) - b| \leqslant |f(x) - f(x_m)| + |f(x_m) - b| < \frac{2}{m} \to 0$$

при $m \to \infty$, отсюда получаем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ по определению 2 Коши. ◀

Теорема 3 (об арифметических свойствах предела). *Пусть* $f(x) \to a \in \mathbb{R}$, $g(x) \to b \in \mathbb{R}$ *при* $x \to x_0$ *и* x_0 *— предельная точка для множества* $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$. *Тогда* $f(x) + g(x) \to a + b$, $f(x)g(x) \to ab$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{a}{b}$ *(в случае, если* $b \neq 0$*) при* $x \to x_0$.

Доказательство вытекает из арифметических свойств 2.1.3 предела последовательности и определения 2′ Гейне. ◀

Теорема 4 (о пределе композиции функций). *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = z_0$, $g\colon \mathrm{Dom}(g) \to \mathrm{Dom}(f)$ *и найдётся* $\delta > 0$ *такое, что* $g(x) \neq y_0$ *для всех* $x \in \mathring{O}_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(g)$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = z_0$.

Доказательство. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : f\big(\mathring{O}_{\delta_1}(y_0) \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset O_\varepsilon(z_0)$. Также $\exists \delta_2 > 0 :$

$$g\big(\mathring{O}_{\delta_2}(x_0) \cap \mathrm{Dom}(g)\big) \subset O_{\delta_1}(y_0) \cap \mathrm{Dom}(f).$$

Полагая $\mathring{O}_{\delta_3}(x_0) := \mathring{O}_\delta(x_0) \cap \mathring{O}_{\delta_2}(x_0)$, имеем

$$g\big(\mathring{O}_{\delta_3}(x_0) \cap \mathrm{Dom}(g)\big) \subset \mathring{O}_{\delta_1}(y_0) \cap \mathrm{Dom}(f),$$

отсюда получаем вложение

$$f\Big(g\big(\mathring{O}_{\delta_3}(x_0) \cap \mathrm{Dom}(g)\big)\Big) \subset f\big(\mathring{O}_{\delta_1}(y_0) \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset O_\varepsilon(z_0),$$

завершающее доказательство теоремы. ◀

Замечание 5. Условие $g\colon \mathrm{Dom}(g) \to \mathrm{Dom}(f)$ в теореме 4 о пределе композиции функций может быть заменено на более слабое требование того, чтобы точка x_0 была предельной для множества $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{Dom}(g) : g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$. Действительно, для сужения $\widetilde{g} := g\big|_{\mathrm{Dom}(f\circ g)}$ (см. определение 0.5.6), очевидно, имеем $\widetilde{g}\colon \mathrm{Dom}(\widetilde{g}) \to \mathrm{Dom}(f)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \widetilde{g}(x) = y_0$, а значит, $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f\big(\widetilde{g}(x)\big) = z_0$ по теореме 4 о пределе композиции функций.

Теорема 5 (о предельном переходе в неравенстве). *Пусть*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = b_1 \in \overline{\overline{\mathbb{R}}},\ \lim_{x\to a} f_2(x) = b_2 \in \overline{\overline{\mathbb{R}}},$$

a — предельная точка для множества $\mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2)$ и найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \tag{2}$$

для всех $x \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2)$. Тогда $b_1 \leqslant b_2$.

Доказательство. Пусть $b_1 > b_2$, тогда найдутся $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что $y_1 > y_2$ для всех $y_1 \in O_{\varepsilon_1}(b_1)$, $y_2 \in O_{\varepsilon_2}(b_2)$. По определению 2 Коши найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $f_1\big(\mathring{O}_{\delta_1}(a) \cap \mathrm{Dom}(f_1)\big) \subset O_{\varepsilon_1}(b_1)$ и $f_2\big(\mathring{O}_{\delta_2}(a) \cap \mathrm{Dom}(f_2)\big) \subset O_{\varepsilon_2}(b_2)$. По определению предельной точки получим существование элемента

$$x_0 \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathring{O}_{\delta_1}(a) \cap \mathring{O}_{\delta_2}(a) \cap \mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2),$$

а следовательно, $f_1(x_0) > f_2(x_0)$, что противоречит неравенству (2). ◀

Следствие 1 теоремы 5 о предельном переходе в неравенстве. *Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ и найдутся $c \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$ такие, что $f(x) \leqslant c$ [$c \leqslant f(x)$] для всех $x \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$, то $b \leqslant c$ [$c \leqslant b$].*

Теорема 6 [Принцип двустороннего ограничения]. *Пусть*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}},$$

a — предельная точка для множества $\mathrm{Dom}(g)$ *и найдётся* $\delta > 0$ *такое, что*

$$f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x) \tag{3}$$

для всех $x \in \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(g)$*. Тогда* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Доказательство. По определению 2 Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $f_1\big(\mathring{O}_{\delta_1}(a) \cap \mathrm{Dom}(f_1)\big) \subset O_\varepsilon(b)$ и $f_2\big(\mathring{O}_{\delta_2}(a) \cap \mathrm{Dom}(f_2)\big) \subset O_\varepsilon(b)$. В силу неравенств (3) это означает, что при $\mathring{O}_{\delta_3}(a) \coloneqq \mathring{O}_\delta(a) \cap \mathring{O}_{\delta_1}(a) \cap \mathring{O}_{\delta_2}(a)$ для всех $x \in \mathring{O}_{\delta_3}(a) \cap \mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2) \cap \mathrm{Dom}(g) = \mathring{O}_{\delta_3}(a) \cap \mathrm{Dom}(g)$ выполнено $g(x) \in O_\varepsilon(b)$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 6. Отметим, что точки a в утверждениях 2, 3 и в теоремах 2 [Критерий Коши существования предела функции], 5 о предельном переходе в неравенстве, 6 [Принцип двустороннего ограничения], а также точки x_0, y_0, z_0 в теоремах 3 об арифметических свойствах предела, 4 о пределе композиции функций могут быть *несобственными* (см. замечание 1).

§ 3.2. Непрерывность функции в точке и на множестве. Основные свойства непрерывных функций

Определение 1 (Коши). Функция f называется ***непрерывной в точке*** $a \in \mathrm{Dom}(f)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ f\big(O_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset O_\varepsilon\big(f(a)\big).$$

Замечание 1. Из определения 1 Коши вытекает, что в случае, когда a — предельная точка $\mathrm{Dom}(f)$, функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Также любая функция *непрерывна в любой изолированной точке* своей области определения.

Определение 1′ (Гейне). Функция f называется ***непрерывной в точке*** $a \in \mathrm{Dom}(f)$, если для любой последовательности $x_k \in \mathrm{Dom}(f)$, сходящейся к a, последовательность $f(x_k)$ сходится к $f(a)$.

Определение 2. Функция f называется ***непрерывной на множестве*** $\Omega \subset \subset \mathrm{Dom}(f)$, если она непрерывна в каждой точке множества Ω. Класс всех функций f таких, что их сужения $f\big|_{\Omega}$ (см. определение 0.5.6) непрерывны на Ω, обозначим $C(\Omega)$. При этом в случае $\Omega = \mathrm{Dom}(f)$ функцию f называют ***непрерывной***. Также условимся вместо $C([a,b]), C\big((a,b)\big), C\big([a,b)\big), C\big((a,b]\big)$ пользоваться упрощёнными обозначениями $C[a,b]$, $C(a,b)$, $C[a,b)$, $C(a,b]$.

Определение 3. Для любых функций f, g на множестве $\Omega := \mathrm{Dom}(f) \cap \cap \mathrm{Dom}(g)$ определим функции $f+g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ и $fg\colon \Omega \to \mathbb{R}$ соответственно по формулам $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ и $(fg)(x) := f(x)g(x)$ для всех $x \in \Omega$, а также функцию $\dfrac{f}{g}\colon \{x \in \Omega : g(x) \neq 0\} =: \Omega' \to \mathbb{R}$ по формуле $\dfrac{f}{g}(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ для всех $x \in \Omega'$.

Аналогично соответствующим теоремам 1–4 из предыдущего параграфа доказываются следующие теоремы:

Теорема 1$'$. *Определения 1 Коши и 1$'$ Гейне эквивалентны.*

Теорема 2$'$ [Критерий Коши непрерывности функции в точке]. *Функция f непрерывна в точке $a \in \mathrm{Dom}(f)$ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x_1, x_2 \in O_\delta(a) \cap \cap \mathrm{Dom}(f)$ имеем $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Теорема 3$'$ (об арифметических операциях над непрерывными функциями). *Пусть функции f, g непрерывны в точке a. Тогда функции $\alpha f + \beta g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (в случае, если $g(a) \neq 0$) непрерывны в точке a при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Теорема 4$'$ (о непрерывности композиции непрерывных функций). *Пусть функция g непрерывна в точке x_0, а функция f непрерывна в точке $g(x_0)$. Тогда функция $f \circ g$ непрерывна в точке x_0.*

Определение 4. Определим функцию $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (читается как ***сигнум***) формулой

$$\mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} -1 \text{ при } x < 0; \\ 0 \text{ при } x = 0; \\ 1 \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1 (о локальном знакопостоянстве непрерывных функций). *Пусть функция f непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$. Тогда $\exists \delta > 0\colon \mathrm{sgn}\big(f(x)\big) = = \mathrm{sgn}\big(f(a)\big)$ для всех $x \in O_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$.*

Доказательство. По определению 1 Коши при $\varepsilon := |f(a)|/2$ имеем $\exists \delta > 0 :$ $\forall x \in O_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$

$$f(a) - \frac{|f(a)|}{2} < f(x) < f(a) + \frac{|f(a)|}{2}.$$

Так как

$$\mathrm{sgn}\Big(f(a) \pm \frac{|f(a)|}{2}\Big) = \mathrm{sgn}\big(f(a)\big),$$

получаем утверждение теоремы. ◀

Теорема 2 (о локальной ограниченности непрерывных функций). *Если функция f непрерывна в точке a, то найдётся $\delta > 0$ такое, что множество $f\big(O_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)\big)$ является ограниченным* (см. определение 1.3.1).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно в определении 1 Коши положить $\varepsilon := 1$ и заметить, что множество $O_1\big(f(a)\big)$ является ограниченным, а значит, таковым является и его подмножество $f\big(O_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)\big)$.

Утверждение этой теоремы также напрямую вытекает из утверждения 1.3 о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел. ◀

Теорема 3 (Больцано–Коши). *Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда для любого числа y, лежащего между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдётся точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f(\xi) = y$.*

Доказательство. Для начала рассмотрим случай, когда функция f принимает на концах отрезка $[a, b] =: I_0$ значения разных знаков (то есть $f(a)f(b) < 0$) и докажем, что найдётся точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f(\xi) = 0$. Предположим, что такой точки ξ на интервале (a, b) не существует. Поделим отрезок $[a, b]$ точкой c_0 пополам. Так как $f(c_0) \neq 0$, то функция f принимает значения разных знаков на концах одного из отрезков $[a, c_0]$ или $[c_0, b]$; обозначим этот отрезок I_1. Далее, применяя к отрезку I_1 описанную выше процедуру, мы построим отрезок $I_2 \subset I_1$, на концах которого функция f принимает значения разных знаков. Продолжая этот процесс, мы построим последовательность вложенных отрезков $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \ldots$, у которых существует общая точка ξ по теореме 2.5.1 [Принцип вложенных отрезков Коши–Кантора]. Так как

$$|I_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0,$$

то по построению найдутся две последовательности x_n и y_n концов отрезков I_n такие, что $f(x_n) > 0$, $f(y_n) < 0$ и $x_n, y_n \to \xi$. В силу непрерывности функции f в точке ξ по определению $1'$ Гейне имеем $f(x_n), f(y_n) \to f(\xi)$. По теореме 2.1.1

о предельном переходе в неравенстве получим $0 \leqslant f(\xi) \leqslant 0$, а значит, $f(\xi) = 0$, что и завершает рассмотрение нашего случая.

В общем случае введём вспомогательную функцию $F(x) := f(x) - y$, для которой по условию теоремы выполнено $F(a)F(b) = (f(a) - y)(f(b) - y) < 0$. Так как $F \in C[a, b]$, то по доказанному выше найдётся точка $\xi \in (a, b)$, для которой выполнено равенство $0 = F(\xi) = f(\xi) - y$, то есть $f(\xi) = y$. ◀

Определение 5 (ограниченной функции). Функция f называется ***ограниченной (сверху, снизу)*** на множестве $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если множество $f(\Omega)$ является *ограниченным (сверху, снизу)* (см. определение 1.3.1).

Теорема 4 [Первая теорема Вейерштрасса]. *Если $f \in C[a, b]$, то функция f ограничена на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Предположим противное, тогда найдётся последовательность $x_m \in [a, b]$ такая, что $|f(x_m)| > m$ для всех $m \in \mathbb{N}$. По теореме 2.6.2 Больцано–Вейерштрасса найдётся подпоследовательность $x_{m_p} \to x_0 \in [a, b]$ при $p \to \infty$. В силу того, что $f(x_{m_p}) \xrightarrow{\text{О. } 1' \text{ Гейне}} f(x_0)$ и леммы 2.1.3 об ограниченности последовательности, имеющей конечный предел, последовательность $f(x_{m_p})$ является ограниченной, но $|f(x_{m_p})| > m_p \geqslant p \to +\infty$. Получили противоречие. ◀

Теорема 5 [Вторая теорема Вейерштрасса]. *Если $f \in C[a, b]$, то функция f достигает на отрезке $[a, b]$ своего максимума и минимума.*

Доказательство. Множество $f([a, b])$ непусто и ограничено по теореме 4 [Первая теорема Вейерштрасса], поэтому существуют $M := \sup f([a, b]) \in \mathbb{R}$ и $m := \inf f([a, b]) \in \mathbb{R}$ по теореме 1.3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств. Докажем существование точки $\xi \in [a, b]$ такой, что $f(\xi) = M$, то есть $f(\xi) = \max f([a, b])$ (доказательство достижимости минимума проводится аналогично). Пусть это не так, тогда по определению 1.3.3′ супремума имеем $f(x) < M$ для всех $x \in [a, b]$. Рассмотрим функцию

$$g(x) := \frac{1}{M - f(x)}$$

для всех $x \in [a, b]$. Так как $M - f(x) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$, то $g \in C[a, b]$ по теореме 3′ об арифметических операциях над непрерывными функциями. По теореме 4 [Первая теорема Вейерштрасса] функция g обязана быть ограниченной на $[a, b]$. По определению супремума для любого $A > 0$ найдётся точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что

$$M - \frac{1}{A} < f(x_0) < M,$$

а следовательно,
$$0 < M - f(x_0) < \frac{1}{A}$$
и
$$g(x_0) = \frac{1}{M - f(x_0)} > A,$$
что противоречит ограниченности функции g на отрезке $[a, b]$. ◀

Замечание 2. Теоремы 4, 5 Вейерштрасса остаются в силе для случая, когда Ω — *топологическое пространство* (см. определение 10.2.12), $\Omega \supset K$ — *непустой компакт* (см. определение 10.2.23), $f : \Omega \supset \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$, $f \in C(K)$ (см. определение 10.2.26).

Действительно, $\mathbb{R} \supset f(K)$ — *компакт* по теореме 10.2.8, а значит, множество $f(K)$ является непустым, *замкнутым и ограниченным* (см. теорему 9.1.3 о компактах в $\mathbb{R}^n$), а следовательно, содержит *максимальный* и *минимальный* элементы. ◀

§ 3.3. Монотонная функция. Обратная функция

Определение 1 (монотонной функции). Функция f называется ***неубывающей*** [***невозрастающей***] ***на множестве*** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если $\forall x_1, x_2 \in \Omega$
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2) \; \big[f(x_1) \geqslant f(x_2)\big].$$
Такие функции называются ***монотонными на множестве*** Ω.

Определение 2 (строго монотонной функции). Функция f называется ***возрастающей*** [***убывающей***] ***на множестве*** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если $\forall x_1, x_2 \in \Omega$
$$x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2) \; \big[f(x_1) > f(x_2)\big].$$
Такие функции называются ***строго монотонными на множестве*** Ω.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$, функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ возрастает [убывает] на множестве Ω. Тогда существует возрастающая [убывающая] обратная* (см. определение 0.5.12) *функция $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$.*

Доказательство. Функция $f : \Omega \to f(\Omega)$ по определению *сюръективна*. Из строгой монотонности функции f (см. определение 2 строго монотонной функции) вытекает её *инъективность* на множестве Ω, поэтому существует *обратная* функция $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ (см. утверждение 0.5.2). Для любых $y_1, y_2 \in f(\Omega)$ имеем $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in \Omega$. Воспользовавшись определением 2 строго монотонной функции, для возрастающей [убывающей] функции f для любых $y_1, y_2 \in f(\Omega)$

получим

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \iff$$
$$\iff f\big(f^{-1}(y_1)\big) < f\big(f^{-1}(y_2)\big) \ \big[f\big(f^{-1}(y_1)\big) > f\big(f^{-1}(y_2)\big)\big] \iff$$
$$\iff y_1 < y_2 \ [y_1 > y_2],$$

что и завершает доказательство теоремы. ◀

Лемма 1. *Пусть функция $f \in C[a,b]$ не убывает [не возрастает] на отрезке $[a,b]$. Тогда $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ $\big[f([a,b]) = [f(b), f(a)]\big]$.*

Доказательство. Пусть функция f не убывает (случай невозрастающей функции рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции f на -1). По определению 1 монотонной функции для всех $x \in [a,b]$ имеем $f(x) \in [f(a), f(b)]$. По теореме 2.3 Больцано–Коши для любого $y \in \big(f(a), f(b)\big)$ найдётся $\xi \in (a,b) : y = f(\xi)$, поэтому $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. ◀

Лемма 2. *Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция $f \in C(a,b)$ строго монотонна на (a,b). Тогда $f\big((a,b)\big) = (c,d)$, где $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$.*

Доказательство. Пусть функция f возрастает на (a,b) (случай убывающей функции рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции f на -1). Рассмотрим убывающую последовательность $a_n \in (a,b)$ и возрастающую последовательность $b_n \in (a,b)$, стремящиеся соответственно к a и b, удовлетворяющие условию $a_1 < b_1$. Тогда последовательность $f(a_n)$ убывает, последовательность $f(b_n)$ возрастает, и по теореме 2.2.1 о пределе монотонной последовательности имеем

$$f\big((a,b)\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f([a_n, b_n]) \overset{\text{Л. } 1}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} [f(a_n), f(b_n)] =: (c,d),$$

где $-\infty \leqslant c < d \leqslant +\infty$. ◀

Замечание 1. Как и при доказательстве леммы 2 проверяется, что если на некотором *невырожденном промежутке* (см. определение 1.4.4) I функция $f \in C(I)$ монотонна, то $f(I) = J$, где J также является *невырожденным промежутком*.

Теорема 2 (о непрерывной обратной функции на отрезке). *Пусть функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и возрастает [убывает] на отрезке $[a,b]$. Тогда существует непрерывная возрастающая [убывающая] обратная* (см. определение 0.5.12) *функция $f^{-1}\colon f([a,b]) \to [a,b]$, где $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ $\big[f([a,b]) = [f(b), f(a)]\big]$.*

Доказательство. Пусть функция f возрастает на отрезке $[a, b]$ (случай убывающей функции рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции f на -1). По лемме 1 имеем $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, и по теореме 1 существует возрастающая обратная функция $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$.

Проверим, что $f^{-1} \in C([f(a), f(b)])$. Для произвольного $y_0 \in [f(a), f(b)]$ рассмотрим произвольную последовательность $y_n \in [f(a), f(b)]$, сходящуюся к y_0. Тогда $x_n := f^{-1}(y_n) \in [a, b]$ и $f(x_n) = y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Для проверки непрерывности функции f^{-1} в точке y_0 достаточно убедиться в том, что последовательность x_n стремится к $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Если это не так, то для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ найдётся её подпоследовательность $x_{n_k} \in [a, b]$ такая, что $|x_{n_k} - x_0| \geqslant \varepsilon_0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, из которой по теореме 2.6.2 Больцано–Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_{k_p}} \to x_0' \in [a, b]$, причём $x_0' \neq x_0$, а значит, $f(x_0') \neq f(x_0) = y_0$ в силу строгой монотонности функции f на отрезке $[a, b]$. Так как $f \in C[a, b]$, то $y_{n_{k_p}} = f(x_{n_{k_p}}) \to f(x_0')$ по определению 2.1′ Гейне, поэтому $f(x_0') = y_0$ в силу единственности предела последовательности. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ◀

Теорема 3 (о непрерывной обратной функции на промежутке). *Пусть на некотором невырожденном промежутке* (см. определение 1.4.4) I_x *непрерывная функция* $f\colon I_x \to \mathbb{R}$ *возрастает [убывает]. Тогда существует возрастающая [убывающая] обратная* (см. определение 0.5.12) *функция* $f^{-1} \in C(I_y)$, *где* $I_y := f(I_x)$ *также является невырожденным промежутком.*

Доказательство. Пусть функция f возрастает на I_x (случай убывающей функции рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции f на -1). В силу замечания 1 имеем $f(I_x) = I_y$, где I_y — невырожденный промежуток. По теореме 1 существует возрастающая обратная функция $f^{-1} : I_y \to I_x$.

Проверим, что $f^{-1} \in C(I_y)$. Для произвольного $y_0 \in I_y$ рассмотрим некоторый отрезок $[y_1, y_2] \subset I_y$ такой, что $y_1 < y_0 < y_2$ в случае, когда y_0 — внутренняя точка промежутка I_y, $y_1 := y_0 < y_2$ в случае, когда y_0 — левая граничная точка промежутка I_y, и $y_1 < y_0 =: y_2$ в случае, когда y_0 — правая граничная точка промежутка I_y. Заметим, что сужение (см. определение 0.5.6) функции f^{-1} на отрезок $[y_1, y_2]$ есть функция, обратная к сужению функции f на отрезок $[f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)]$ и определяемая теоремой 2 о непрерывной обратной функции на отрезке в силу единственности обратной функции (см. утверждение 0.5.2), а значит, непрерывная в точке y_0, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Теорема 4. *Пусть* $f \in C[a, b]$, *тогда* f *инъективна на* $[a, b]$ $\iff$ f *строго монотонна на* $[a, b]$.

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Пусть $f(a) < f(b)$ (случай $f(a) > f(b)$ рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции f на -1). Сперва докажем, что $f(x) < f(b)$ для всех $x \in (a,b)$. Если это не так, то $\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) > > f(b) > f(a)$. По теореме 2.3 Больцано–Коши найдутся точки $\xi_1 \in (a, x_0)$ и $\xi_2 \in (x_0, b)$ такие, что $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \big(f(x_0) + f(b)\big)/2$, а значит, функция f не инъективна (см. рис. 6). Теперь для произвольных $x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2$ докажем, что $f(x_1) < f(x_2)$. Пусть $f(x_2) < f(x_1) < f(b)$, тогда по теореме 2.3 Больцано–Коши найдутся точки $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ и $\xi_2 \in (x_2, b)$ такие, что $f(\xi_1) = = f(\xi_2) = \big(f(x_1) + f(x_2)\big)/2$, а значит, функция f не инъективна (см. рис. 7). Таким образом, для произвольных $x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2$ доказано, что $f(x_1) < < f(x_2)$, то есть функция f строго возрастает на отрезке $[a,b]$.

$\Longleftarrow$: Вытекает из определения 2 строго монотонной функции. ◀

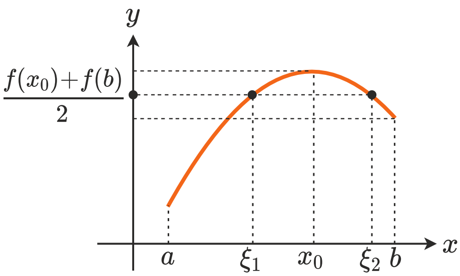


Рис. 6

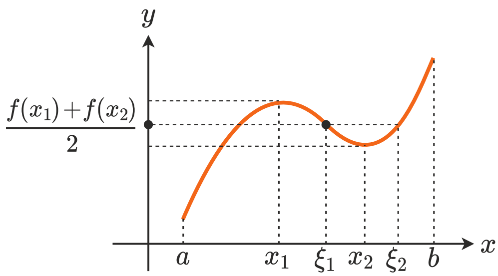


Рис. 7

Следствие 1 утверждения 0.5.2 и теорем 2 и 4. *Пусть функция* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна. Тогда* f *обратима* $\overset{\text{Утв. 0.5.2}}{\Longleftrightarrow}$ f *инъективна* $\overset{\text{Т. 4}}{\Longleftrightarrow}$ f *строго монотонна; при выполнении любого из этих трёх условий по теореме 2 о непрерывной обратной функции на отрезке имеем* $f^{-1} \in C[c,d]$*, где* $[c,d] := f([a,b])$*, причём функция* f^{-1} *строго монотонна.*

Следствие 2 утверждения 0.5.2 и теорем 3 и 4. *Пусть на некотором промежутке* (см. определение 1.4.4) I_x *функция* $f : I_x \to \mathbb{R}$ *непрерывна. Тогда* f *обратима* $\overset{\text{Утв. 0.5.2}}{\Longleftrightarrow}$ f *инъективна* $\overset{\text{Т. 4}}{\Longleftrightarrow}$ f *строго монотонна* $\big($для доказательства $\Rightarrow$ здесь используется представление $I_x = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots$ и наблюдение о том, что функция f обязана иметь тот же характер монотонности, что и на первом невырожденном отрезке $[a_i, b_i]$, в случае его существования$\big)$; *при выполнении любого из этих трёх условий по теореме 3 имеем* $f^{-1} \in C(I_y)$*, где* $I_y := f(I_x)$ *— промежуток, причём функция* f^{-1} *строго монотонна.*

§ 3.4. Классификация точек разрыва. О точках разрыва монотонной функции

Определение 1 (точки разрыва). Точка $a \in \mathbb{R}$, предельная для множества $\mathrm{Dom}(f)$, в которой функция f не является непрерывной, называется ***точкой разрыва*** функции f. Если при этом

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R},$$

то a называют точкой ***устранимого*** разрыва. Если

$$\exists \lim_{x\to a-} f(x) =: f(a-) \in \mathbb{R},\ \exists \lim_{x\to a+} f(x) =: f(a+) \in \mathbb{R} \text{ и } f(a-) \neq f(a+),$$

то a называют точкой разрыва ***первого рода***. Во всех остальных случаях a называется точкой разрыва ***второго рода***.

Замечание 1. Широко распространено другое определение, согласно которому точки разрыва функции f обязаны принадлежать её области определения. Мы же в этом курсе придерживаемся именно определения 1 точки разрыва.

Теорема 1 (о пределе монотонной функции). *Пусть $m, M \in \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция f не убывает [не возрастает] на (a,b).*

Если $f(x) \geqslant m$ $[f(x) \leqslant M]$ для всех $x \in (a,b)$, то существует $\lim\limits_{x\to a+} f(x) =: f(a+) \in \mathbb{R}$ и $f(a+) = \inf\limits_{x\in(a,b)} f(x) \geqslant m$ $\Big[f(a+) = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) \leqslant M\Big]$.

Если функция f не ограничена снизу [сверху] на (a,b), то $f(a+) = -\infty$ $\big[f(a+) = +\infty\big]$. В случае $a = -\infty$ под $a+$ понимается сама точка $-\infty$.

Если $f(x) \leqslant M$ $[f(x) \geqslant m]$ для всех $x \in (a,b)$, то существует $\lim\limits_{x\to b-} f(x) =: f(b-) \in \mathbb{R}$ и $f(b-) = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) \leqslant M$ $\Big[f(b-) = \inf\limits_{x\in(a,b)} f(x) \geqslant m\Big]$.

Если функция f не ограничена сверху [снизу] на (a,b), то $f(b-) = +\infty$ $[f(b-) = -\infty]$. В случае $b = +\infty$ под $b-$ понимается сама точка $+\infty$.

Доказательство. Пусть функция f не убывает (случай невозрастающей функции рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции f на -1).

Если $f(x) \geqslant m$ для всех $x \in (a,b)$, то существует $\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x) =: l \geqslant m$. По определению 1.3.3′ инфимума это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) < l + \varepsilon$. Тогда для всех $x \in (a, x_0)$ выполнено $l \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) < l + \varepsilon$, а значит, $f(a+) = l$. Если функция f не ограничена снизу на (a,b), то найдётся последовательность $x_n \in (a,b)$ такая, что $f(x_n) < -n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $x \in (a, x_n)$ выполнено $f(x) \leqslant f(x_n) < -n$, а значит, $f(a+) = -\infty$.

Если $f(x) \leqslant M$ для всех $x \in (a,b)$, то существует $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) =: r \leqslant M$. По определению 1.3.3′ супремума это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in (a,b)$: $f(x_0) > r - \varepsilon$. Тогда для всех $x \in (x_0, b)$ выполнено $r - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant r$, а значит, $f(b-) = r$. Если функция f не ограничена сверху на (a,b), то найдётся последовательность $x_n \in (a,b)$ такая, что $f(x_n) > n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $x \in (x_n, b)$ выполнено $f(x) \geqslant f(x_n) > n$, а значит, $f(b-) = +\infty$. ◀

Теорема 2 (о точках разрыва монотонной функции). *Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ монотонна на (a,b). Тогда все точки разрыва функции f суть точки разрыва первого рода, причём их множество не более чем счётно.*

Доказательство. Пусть функция f не убывает (случай невозрастающей функции рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции f на -1), $x_0 \in (a,b)$. Так как $f(x) \leqslant f(x_0)$ для всех $x \in (a, x_0)$, то по теореме 1 о пределе монотонной функции существует $f(x_0-) \leqslant f(x_0)$. Так как $f(x) \geqslant f(x_0)$ для всех $x \in (x_0, b)$, то по той же теореме существует $f(x_0+) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0-)$. Если $f(x_0-) = f(x_0+) = l$, то $l = f(x_0)$ и функция f непрерывна в точке x_0. Таким образом, если x_0 является точкой разрыва функции f, то $f(x_0-) < f(x_0+)$ и x_0 — точка разрыва первого рода.

Далее рассмотрим множество Ω всех точек разрыва функции f и произвольную функцию $\varphi : \Omega \to \mathbb{Q}$ такую, что $\varphi(x) \in \mathbb{Q} \cap \big(f(x-), f(x+)\big)$ для всех $x \in \Omega$. Пусть $x_1, x_2 \in \Omega$ и $x_1 < x_2$. Так как $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ для всех $x \in (x_1, x_2)$, то по теореме 1 имеем $f(x_1+) = \inf\limits_{x\in(x_1,x_2)} f(x) \leqslant \sup\limits_{x\in(x_1,x_2)} f(x) = f(x_2-)$, а следовательно, $\varphi(x_1) < f(x_1+) \leqslant f(x_2-) < \varphi(x_2)$ и $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$, а значит, функция φ *инъективна*, поэтому $\operatorname{card}(\Omega) \overset{\text{З. } 0.7.4}{\leqslant} \operatorname{card}(\mathbb{Q}) \overset{\text{С. } 0.8.4}{=} \aleph_0$. ◀

Теорема 3. *Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ не убывает [не возрастает] на отрезке $[a,b]$. Тогда*

$$f \in C[a,b] \iff f([a,b]) = [f(a), f(b)] \quad \Big[f([a,b]) = [f(b), f(a)]\Big].$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: См. лемму 3.1.

$\Longleftarrow$: Рассмотрим случай, когда функция f не убывает (случай невозрастающей функции рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции f на -1). Пусть $f \notin C[a,b]$, тогда у функции f существует точка разрыва $x_0 \in [a, b]$. Определим неубывающую функцию $\widetilde{f} : (a-1, b+1) \to \mathbb{R}$ равенством

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in [a,b] \\ f(a) & \text{при } x \in (a-1,a) \\ f(b) & \text{при } x \in (b,b+1) \end{cases}$$

и заметим, что x_0 является также точкой разрыва функции $\widetilde{f}$. При доказательстве теоремы 2 было установлено, что $\widetilde{f}(x_0-) < \widetilde{f}(x_0+)$, также имеем $\widetilde{f}(y) \leqslant \leqslant \sup\limits_{x\in(a-1,x_0)} \widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x_0-)$ для всех $y \in (a-1, x_0)$ и $\widetilde{f}(x_0+) = \inf\limits_{x\in(x_0,b+1)} \widetilde{f}(x) \leqslant \leqslant \widetilde{f}(z)$ для всех $z \in (x_0, b+1)$ по теореме 1 о пределе монотонной функции. Подставляя в последние неравенства $y = a - 1/2$, $z = b + 1/2$, получим $[\widetilde{f}(x_0-), \widetilde{f}(x_0+)] \subset [f(a), f(b)]$. Также из этих неравенств следует, что $\widetilde{f}(x) \notin \big(\widetilde{f}(x_0-), \widetilde{f}(x_0+)\big)$ для всех $x \in (a-1, b+1) \setminus \{x_0\}$, а значит, и подавно $f(x) \notin \big(\widetilde{f}(x_0-), \widetilde{f}(x_0+)\big)$ для всех $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$, поэтому $f([a, b]) \neq \neq [f(a), f(b)]$, что и завершает доказательство теоремы. ◄

§ 3.5. Простейшие элементарные функции

3.5.1. Показательная, логарифмическая и степенная функции

Для всех $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функции $f_n(x) := x^n \in C(\mathbb{R})$. Так как все функции f_n возрастают на $[0, +\infty)$, а при $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$ возрастают на $\mathbb{R}$, согласно теореме 3.3 о непрерывной обратной функции на промежутке существуют возрастающие непрерывные обратные функции $\sqrt[n]{t} := f_n^{-1}(t)$, определённые при $n = 2k$ на $[0, +\infty)$, а при $n = 2k - 1$ на $\mathbb{R}$, где $k \in \mathbb{N}$. Далее для всех рациональных чисел $r = p/q$ определяются функции

$$x^r := \sqrt[q]{x^p} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

и проверяются свойства степеней с рациональным показателем, известные из курса элементарной математики. Затем для любого $a > 1$ определяется ***показательная*** функция $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по формуле

$$a^x := \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r < x\}$$

и проверяются её непрерывность, положительность и возрастание на $\mathbb{R}$. Также доказывается, что для всех $a > 1$ выполнено $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Далее для любого $a \in (0, 1)$ определяется ***показательная*** функция $a^x :=$

$:= (1/a)^{-x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и проверяются её непрерывность, положительность и убывание на $\mathbb{R}$. Затем проверяются свойства степеней, известные из курса элементарной математики.

Из свойств показательной функции a^x и теоремы 3.3 о непрерывной обратной функции на промежутке для любого $a > 0, a \neq 1$ вытекает существование непрерывной строго монотонной функции, обратной к a^x, называемой ***логарифмической*** и обозначаемой $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Затем проверяются свойства логарифмической функции, известные из курса элементарной математики. При $a = e$ вместо $\log_a x$ будем использовать стандартное обозначение $\ln x$. Далее для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ определяется ***степенная*** функция

$$x^\alpha := (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Отметим, что при $\alpha = p/(2k-1)$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ функция $x^\alpha := \sqrt[2k-1]{x^p}$ корректно определена для всех $x \neq 0$, а при $p \in \mathbb{N}$ — для всех $x \in \mathbb{R}$. Свойства степенной функции извлекаются из ранее установленных свойств степеней, а также из свойств показательной и логарифмической функций. Более подробное описание свойств рассмотренных выше функций можно найти, например, в [12, с. 138–147].

3.5.2. Об углах, их мере и тригонометрических функциях

В этом пункте мы опираемся на аксиоматику евклидовой геометрии, принятую в [31]. Также для его полного понимания потребуются знания основ теории групп, свойств комплексных чисел и степенных рядов. Всюду в этом параграфе через Π будем обозначать *геометрическую плоскость*.

Определение 1. ***Углом*** на плоскости Π называется (см. [31, с. 129]) произвольный элемент фактор-группы $\mathcal{A} := \mathcal{J}^+/\mathcal{T}$, где $\mathcal{J}^+$ — группа *собственных изометрий* (или *собственных движений*) плоскости Π (см. [31, с. 101]), её *нормальная коммутативная подгруппа* $\mathcal{T}$ — это группа (параллельных) *переносов* (или *сдвигов*). Для групповой операции в $\mathcal{A}$ (определённой на самом деле в терминах композиции отображений) традиционно принята аддитивная символика.

Для любой точки $a \in \Pi$ через $\mathcal{R}_a$ будем обозначать коммутативную группу *вращений с центром* (или *поворотов вокруг точки*) a. Отметим, что для групповой операции в $\mathcal{R}_a$ традиционно принята аддитивная символика, а состоит эта группа из всевозможных отображений плоскости Π в себя, представимых в виде композиции двух *отражений* (или *осевых симметрий*) и сохраняющих точку a неподвижной (см. [31, с. 97]). Далее зафиксируем произвольную точку $O \in \Pi$. Так как (см. [31, с. 102]) у любого угла $\alpha \in \mathcal{A}$ существует единственный представитель $\alpha_O \in \alpha \cap \mathcal{R}_O$ (в частности, это единственный представитель угла

α, сохраняющий точку O неподвижной), то функция $\varphi\colon \mathcal{R}_O \to \mathcal{A}$, определённая равенством $\varphi(r) := r \circ \mathcal{T}$ для всех $r \in \mathcal{R}_O$, является *биекцией*. Для любых $r_1, r_2 \in \mathcal{R}_O$ имеем $r_1 \in \varphi(r_1)$, $r_2 \in \varphi(r_2)$, поэтому

$$\varphi(r_1) + \varphi(r_2) := (r_1 \circ r_2) \circ \mathcal{T} = \varphi(r_1 \circ r_2) =: \varphi(r_1 + r_2).$$

Таким образом, φ является *изоморфизмом групп* $\mathcal{R}_O$ и $\mathcal{A}$, а следовательно, *угол* можно также корректно определить как *вращение* вокруг произвольной фиксированной точки O, что и сделано в [31].

Определение 2. Фиксируем *ортонормированный базис* (a, O, b) плоскости Π и с его помощью определим функции $\mathrm{Sin}, \mathrm{Cos} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ следующим образом: для любого угла $\alpha \in \mathcal{A}$ значения $\mathrm{Cos}\,\alpha$ и $\mathrm{Sin}\,\alpha$ суть соответственно первая и вторая координаты точки $\alpha_O(O + a)$ в базисе (a, O, b), где α_O — единственный элемент множества $\alpha \cap \mathcal{R}_O$, а сумма определяется в *центрированной плоскости* (Π, O).

Замечание 1. Отметим (см. [31, с. 155]), что значения $\mathrm{Cos}\,\alpha$ не зависят от выбора ортонормированного базиса (a, O, b), тогда как значения $\mathrm{Sin}\,\alpha$ поменяют знак при изменении *ориентации* (см. [31, с. 145]) тройки (a, O, b) на противоположную.

Далее пусть (a, O, b) — ортонормированный базис из определения 2, $\mathcal{R}_O \ni \alpha_O$ — вращение вокруг точки O на произвольный угол $\alpha \in \mathcal{A}$ (то есть $\alpha_O \in \alpha$). Тогда для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ имеем (см. [31, с. 157])

$$\alpha_O(\xi a + \eta b) = (\xi \mathrm{Cos}\,\alpha - \eta \mathrm{Sin}\,\alpha)a + (\xi \mathrm{Sin}\,\alpha + \eta \mathrm{Cos}\,\alpha)b, \tag{1}$$

где арифметические операции определяются в *центрированной плоскости* (Π, O). Так как вращение α_O является *изометрией*, из свойств *скалярного произведения*, подставляя $(\xi, \eta) := (1, 0)$, для всех $\alpha \in \mathcal{A}$ мы получаем

$$\mathrm{Sin}^2\,\alpha + \mathrm{Cos}^2\,\alpha = 1.$$

Отметим, что если $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha_O \in \alpha \cap \mathcal{R}_O$, $\beta_O \in \beta \cap \mathcal{R}_O$, то $\alpha_O \neq \beta_O$, поэтому $(\mathrm{Sin}\,\alpha, \mathrm{Cos}\,\alpha) \neq (\mathrm{Sin}\,\beta, \mathrm{Cos}\,\beta)$ в силу равенства (1). Обратно, если $x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1$, то найдётся (см. [31, с. 98]) $\alpha_O \in \mathcal{R}_O : \alpha_O(a) = xa + yb$. Так как для угла $\alpha := \alpha_O \circ \mathcal{T} \in \mathcal{A}$ имеем $\alpha_O(a) = \mathrm{Cos}\,\alpha\, a + \mathrm{Sin}\,\alpha\, b$ в силу (1), то $\mathrm{Cos}\,\alpha = x$, $\mathrm{Sin}\,\alpha = y$.

Определим *мультипликативную группу* $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, где $\mathbb{C}$ — *поле комплексных чисел*. Из сказанного выше следует, что функция $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{T}$, определённая равенством

$$\varphi(\alpha) := \mathrm{Cos}\,\alpha + i\,\mathrm{Sin}\,\alpha \tag{2}$$

для всех $\alpha \in \mathcal{A}$, является *биекцией*. Далее из того, что для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ при $\alpha_O \in \alpha \cap \mathcal{R}_O$, $\beta_O \in \beta \cap \mathcal{R}_O$ мы имеем $\alpha_O \circ \beta_O \in (\alpha + \beta) \cap \mathcal{R}_O$, применяя равенство (1) при $(\xi, \eta) = (1, 0)$, получим

$$\alpha_O\big(\beta_O(a)\big) = \operatorname{Cos}(\alpha+\beta)a + \operatorname{Sin}(\alpha+\beta)b =$$
$$= (\operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta)a + (\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta)b,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos}(\alpha+\beta) &= \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta - \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta, \\ \operatorname{Sin}(\alpha+\beta) &= \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Из равенств (3) вытекает, что $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$, то есть φ — *изоморфизм* группы $\mathcal{A}$ на группу $\mathbb{T}$.

Далее определим непрерывную функцию $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ формулой

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}. \tag{4}$$

Для всех $x \in \mathbb{R}$ ряд (4) *сходится абсолютно* по признаку *Даламбера* (см. [10, с. 436]), так как при $x \neq 0$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1.$$

Используя теорему *о почленном перемножении абсолютно сходящихся рядов* (см. [10, с. 453]), для всех $x, y \in \mathbb{R}$ получим

$$g(x)g(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iy)^m}{m!}\right) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(ix)^n (iy)^m}{n!m!} =$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l} \frac{(ix)^k (iy)^{l-k}}{k!(l-k)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{l} C_l^k (ix)^k (iy)^{l-k} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ix+iy)^l}{l!} = g(x+y),$$

поэтому g есть *непрерывный гомоморфизм* аддитивной группы $\mathbb{R}$ в мультипликативную группу $\mathbb{C}$. Также для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$|g(x)|^2 = g(x)\overline{g(x)} = g(x)g(-x) = g(0) = 1,$$

поэтому $g : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$. Далее определим функции $c, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ формулами

$$c(x) := \operatorname{Re} g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}, \tag{5}$$

$$s(x) := \operatorname{Im} g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}. \tag{6}$$

Таким образом, $g(x) = c(x) + is(x)$ и $|g(x)|^2 = c^2(x) + s^2(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Так как $|g(x)| = 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$, получим

$$s^2(x) + c^2(x) = 1. \tag{7}$$

Используя равенство $g(x+y) = g(x)g(y)$, для всех $x, y \in \mathbb{R}$ получим

$$\begin{aligned} c(x+y) &= c(x)c(y) - s(x)s(y), \\ s(x+y) &= s(x)c(y) + c(x)s(y). \end{aligned} \tag{8}$$

Далее, дифференцируя ряды (5) и (6) *почленно*, получим для всех $x \in \mathbb{R}$ равенства

$$s'(x) = c(x), \;\; c'(x) = -s(x). \tag{9}$$

Теперь, используя формулу (5), заметим, что $c(2) < -1 + 2/3 < 0$. Так как $c(0) = 1 > 0$, то $\exists \xi \in (0,2) : c(\xi) = 0$. Определим число $l := \inf\{\xi \in (0,2) : c(\xi) = 0\} \in (0,2)$. Далее определим число Пи:

$$\pi := 2l.$$

Так как $s(0) = 0$ и $s'(x) = c(x) > 0$ для всех $x \in (0, \pi/2)$, то $s(x) > 0$ на этом интервале, а также $s(\pi/2) = 1$ в силу (7). Таким образом,

$$s(0) = 0, \;\; c(0) = 0, \;\; s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \;\; c\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{10}$$

В силу непрерывности функций c и s это означает, что образ отрезка $[0, \pi/2]$ под действием функции g состоит из всех элементов множества $\mathbb{T}$, вещественная и мнимая части которых неотрицательны. Далее из равенств (8), (10) вытекает, что функции c и s периодичны с периодом 2π и что $g\big((-\pi, \pi]\big) = \mathbb{T}$. Отметим также, что для всех $x \in (0, \pi/2)$ выполнено $(s(x) - x)' = c(x) - 1 < 0$ и

$$0 < s(x) < x. \tag{11}$$

Далее, используя равенство (6), получим

$$s(x) = x + x^3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m-2},$$

причём при $|x| \leqslant 1$

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m-2} \right| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|x|^{2m-2}}{(2m+1)!} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} =: M,$$

поэтому
$$s(x) = x + \underline{O}(x^3) = x + \overline{o}(x^2)$$
при $x \to 0$, отсюда автоматически получаем
$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1.$$

Теперь, используя функции φ и g, заданные формулами (2) и (4), определим функцию
$$\mu := \varphi^{-1} \circ g : \mathbb{R} \to \mathcal{A}, \tag{12}$$
называемую ***радианной мерой углов***. Если на группе углов $\mathcal{A}$ задать топологию, индуцированную из $\mathbb{T}$ посредством биекции φ^{-1}, то мы получим, что μ — *непрерывный гомоморфизм* аддитивной группы $\mathbb{R}$ на группу $\mathcal{A}$.

Определение 3. Определим функции $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ формулами
$$\sin x := \mathrm{Sin}\,\mu(x), \ \cos x := \mathrm{Cos}\,\mu(x),$$
где Sin и Cos суть функции из определения 2, а функция μ определяется равенством (12).

Утверждение 1. *Функции* $\sin$ *и* $\cos$*, введённые в определении 3, не зависят от выбора ортонормированного базиса* (a, O, b)*, фигурирующего в определении 2. Более того, для всех* $x \in \mathbb{R}$ *выполнены равенства* $\sin x = s(x)$*,* $\cos x = c(x)$*, где функции* c *и* s *определены формулами* (5) *и* (6).

Доказательство. Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ обозначим $\alpha := \mu(x) = \varphi^{-1}\big(g(x)\big) = \varphi^{-1}\big(c(x) + is(x)\big) \in \mathcal{A}$. Так как $\varphi(\alpha) = c(x) + is(x)$, а также по определению $\varphi(\alpha) := \mathrm{Cos}\,\alpha + i\mathrm{Sin}\,\alpha$, то $\mathrm{Cos}\,\alpha = c(x)$ и $\mathrm{Sin}\,\alpha = s(x)$, а следовательно,
$$\sin x = \mathrm{Sin}\,\mu(x) = \mathrm{Sin}\,\alpha = s(x), \ \cos x = \mathrm{Cos}\,\mu(x) = \mathrm{Cos}\,\alpha = c(x). \qquad \blacktriangleleft$$

Замечание 2. Заменив базис (a, O, b) в определении 2 на некоторый ортонормированный базис *противоположной ориентации*, мы получим функции Sin_1, φ_1, μ_1, отличные от функций Sin, φ, μ соответственно. Так как $\mathrm{Sin}_1\,\alpha = -\mathrm{Sin}\,\alpha$ (см. замечание 1), то для всех $\alpha \in \mathcal{A}$ выполнено равенство $\varphi_1(\alpha) = \overline{\varphi(\alpha)}$. Используя формулы (3) и равенство $(\mathrm{Cos}\,\mathbf{0}, \mathrm{Sin}\,\mathbf{0}) = (1, 0)$, получим (см. [10, с. 147]) равенство $\varphi(-\alpha) = \overline{\varphi(\alpha)} = \varphi_1(\alpha)$, отсюда для всех $z \in \mathbb{T}$ получаем $\varphi_1^{-1}(z) = -\varphi^{-1}(z)$, а следовательно, $\mu_1(x) = -\mu(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, существуют ровно две различные *радианные меры углов*, отличающиеся знаком. Зафиксировав на плоскости Π *ориентацию*, мы однозначно определяем радианную меру μ. При этом ***радианом*** по определению называется угол, равный $\mu(1)$.

Замечание 3. Можно также дать абстрактное определение меры $\widetilde{\mu}$ углов как некоторого *непрерывного гомоморфизма* аддитивной группы $\mathbb{R}$ на группу $\mathcal{A}$, где топология на $\mathcal{A}$ индуцирована из $\mathbb{T}$ посредством биекции φ^{-1} (эта топология не зависит от выбора ориентации плоскости Π, так как $-\varphi^{-1}(z) = \varphi^{-1}(\overline{z})$, а функция $z \mapsto \overline{z}$ непрерывна в $\mathbb{C}$). Далее можно показать (см. [31, с. 165]), что для любых двух мер $\widetilde{\mu}_1$, $\widetilde{\mu}_2$, удовлетворяющих данному определению, найдётся константа $k \neq 0$ такая, что $\widetilde{\mu}_2(x) = \widetilde{\mu}_1(kx)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Замечание 4. Оказывается (см. [10, с. 146–149]), что свойства (7), (8), (10), (11) определяют пару функций $s, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *однозначно*. Это в совокупности с утверждением 1 автоматически означает, что из перечисленных свойств можно вывести любое свойство, которым обладает функция $\sin$ или $\cos$ (в частности, их 2π-периодичность и непрерывность на $\mathbb{R}$, что и сделано, например, в [12, с. 148–154]).

Далее для всех $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ определяется функция

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Для всех $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ определяется функция

$$\operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Из свойств функций $\sin$ и $\cos$ вытекает непрерывность функций tg, ctg на своих областях определения, их периодичность с периодом π, а также (см., например, [10, с. 149–155]) неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \tag{13}$$

для всех $x \in (0, \pi/2)$. Отметим, что неравенство (13), можно установить методами дифференциального исчисления точно так же, как и неравенство (11). Тем не менее этот путь, хотя и является логически безупречным, требует от читателя некоторой подготовки, поэтому обычно неравенство (13) выводят из наглядных геометрических соображений, не являющихся строгим математическим доказательством.

3.5.3. Обратные тригонометрические функции

В силу возрастания и непрерывности функции $\sin$ на отрезке $[0, \pi/2]$ по теореме 3.2 о непрерывной обратной функции на отрезке имеем существование непрерывной возрастающей функции, обратной к $\sin$, называемой ***арксинусом*** и обозначаемой $\arcsin : [-1, 1] \to [0, \pi/2]$.

В силу убывания и непрерывности функции $\cos$ на отрезке $[0, \pi]$ по теореме 3.2 о непрерывной обратной функции на отрезке имеем существование непрерывной убывающей функции, обратной к $\cos$, называемой ***арккосинусом*** и обозначаемой $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

В силу возрастания и непрерывности функции tg на интервале $(0, \pi/2)$ по теореме 3.3 о непрерывной обратной функции на промежутке имеем существование непрерывной возрастающей функции, обратной к tg, называемой ***арктангенсом*** и обозначаемой $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi/2)$.

В силу убывания и непрерывности функции ctg на интервале $(0, \pi)$ по теореме 3.3 о непрерывной обратной функции на промежутке имеем существование непрерывной убывающей функции, обратной к ctg, называемой ***арккотангенсом*** и обозначаемой $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.

В заключение отметим, что в § 3.5 мы определили 11 функций, которые принято называть ***простейшими элементарными функциями***. Из непрерывности всех рассмотренных функций на своих областях определения и из теорем 2.3′ об арифметических операциях над непрерывными функциями, 2.4′ о непрерывности композиции непрерывных функций вытекает, что любая ***элементарная функция*** (то есть функция, построенная из *простейших элементарных* при помощи арифметических операций и композиций) непрерывна на своей области определения.

§ 3.6. Определение и основные свойства о-малых

Определение 1 (о-малого). Через $o(g)$ (или $\overline{o}(g)$, читается как ***о малое*** от g) ***в точке*** a будем обозначать *любую функцию* f, для которой существуют число $\delta > 0$ и функция $\alpha\colon \mathring{O}_\delta(a) \cap \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g) =: \Omega \to \mathbb{R}^+$ такая, что

$$|f(x)| \leqslant \alpha(x)|g(x)| \tag{1}$$

при всех $x \in \Omega$ и $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Замечание 1. Для любых функций u и g равенство

$$u = o(g)$$

в точке a понимается как существование функции f, удовлетворяющей неравенству (1) и такой, что

$$u = f.$$

Замечание 2. В случае, когда функции f и g определены в точке a, $f = o(g)$ в этой точке и $f(a) = 0$, функцию α всегда можно доопределить по непрерывности в точке a, полагая $\alpha(a) := 0$.

Замечание 3. Если $f = o(g)$ в точке a по определению 1 о-малого, то, полагая

$$\alpha_1(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & \text{при } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{при } g(x) = 0 \end{cases}$$

для всех $x \in \Omega$, получим $f(x) = \alpha_1(x)g(x)$ и $|\alpha_1(x)| \leqslant \alpha(x)$ для всех $x \in \Omega$, поэтому $\lim\limits_{x\to a} \alpha_1(x) = 0$. Таким образом неравенство $|f(x)| \leqslant \alpha(x)|g(x)|$ в определении 1 о-малого можно заменить на равенство $f(x) = \alpha(x)g(x)$. Из этого наблюдения вытекает, что $o(1)$ — это произвольная бесконечно малая в точке a функция.

Определение 2 (О-большого). Через $O(g)$ (читается как ***о большое*** от g) ***в точке*** a будем обозначать *любую функцию* f, для которой существуют числа $\delta > 0$ и $M \geqslant 0$ такие, что

$$|f(x)| \leqslant M|g(x)|$$

при всех $x \in \Omega := \mathring{O}_\delta(a) \cap \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g)$ и точка a является предельной для множества $\operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g)$. Также в литературе часто используется обозначение $\underline{O}(g)$.

Замечание 4. Пусть $\delta_1, \delta_2 > 0, \Omega_1 := O_{\delta_1}(a) \cap \operatorname{Dom}(f), \Omega_2 := O_{\delta_2}(a) \cap \operatorname{Dom}(g)$ и функции $\widetilde{f} := f\big|_{\Omega_1}$, $\widetilde{g} := g\big|_{\Omega_2}$ — соответствующие *сужения* (см. определение 0.5.6) функций f и g. Из определений 1 о-малого и 2 О-большого вытекает, что

$$f = o(g) \iff \widetilde{f} = o(g) \iff f = o(\widetilde{g}) \iff \widetilde{f} = o(\widetilde{g}),$$
$$f = O(g) \iff \widetilde{f} = O(g) \iff f = O(\widetilde{g}) \iff \widetilde{f} = O(\widetilde{g}),$$

где все о-малые и О-большие рассматриваются в точке a. Таким образом, для использования этих определений важно лишь поведение функций f и g *в окрестности точки* a, которую можно выбирать сколь угодно малой. Например, при $x \to 0$ соотношение

$$\sqrt{x^8 - x^9} = o(x^3)$$

достаточно проверить, рассматривая обе функции лишь на интервале $(-1, 1)$ и считая, таким образом, что у них *совпадают области определения* (хотя, вообще говоря, функция x^3 определена на всём $\mathbb{R}$, а функция $\sqrt{x^8 - x^9}$ — на луче $(-\infty, 1]$).

Также стоит отметить, что из равенств $f = o(g)$ и $f = O(g)$ в точке a соответственно вытекают равенства $\widetilde{f} = o(\widetilde{g})$ и $\widetilde{f} = O(\widetilde{g})$, где $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ — *произвольные сужения* (см. определение 0.5.6) функций f и g такие, что a является предельной точкой для $\operatorname{Dom}(\widetilde{f}) \cap \operatorname{Dom}(\widetilde{g})$.

Теперь выделим основные свойства, которые будут использоваться нами в дальнейшем.

Теорема 1 (о свойствах о-малых). *Пусть точка a является предельной для множеств* $\mathrm{Dom}(f_1)\cap\mathrm{Dom}(f_2)\cap\mathrm{Dom}(g)$, $\mathrm{Dom}(f_1)\cap\mathrm{Dom}(f_2)\cap\mathrm{Dom}(g_1)\cap\cap\mathrm{Dom}(g_2)$ *и во всех нижеследующих утверждениях предполагается, что о-малые и О-большие рассматриваются в точке a. Тогда*

1. $f = o(g) \implies f = O(g)$.
2. $f = O(f)$, $const = O(1)$, $const \cdot f = O(f)$.
3. $f_1 = o(g)$ & $f_2 = o(g) \implies f_1 \pm f_2 = o(g)$.
4. $f_1 = O(g)$ & $f_2 = O(g) \implies f_1 \pm f_2 = O(g)$.
5. $f_1 = O(g_1)$ & $f_2 = o(g_2) \implies f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.
6. $f_1 = o(g)$ & $g = O(f_2)$ & $\big(\mathrm{Dom}(f_1)\cap\mathrm{Dom}(f_2) \subset \mathrm{Dom}(g)\big) \implies f_1 = = o(f_2)$.
7. *Пусть* $f = o(g)$, $h : \mathrm{Dom}(h) \to \mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = a$ *и найдётся* $\delta > 0$ *такое, что* $h(x) \neq a$ *для всех* $x \in \mathring{O}_\delta(a)\cap\mathrm{Dom}(h)$. *Тогда* $f\circ h = o(g\circ h)$.

Доказательство. Проверим, например, свойство 6. Из равенства $f_1 = o(g)$ по определению 1 о-малого получаем существование $\delta_1 > 0$ такого, что $|f_1(x)| \leqslant \leqslant \alpha(x)|g(x)|$ для всех $x \in \mathring{O}_{\delta_1}(a)\cap\mathrm{Dom}(f_1)\cap\mathrm{Dom}(g)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$. Далее из равенства $g = O(f_2)$ по определению 2 О-большого получаем существование $\delta_2 > 0$ такого, что $|g(x)| \leqslant M|f_2(x)|$ для всех $x \in \mathring{O}_{\delta_2}(a)\cap\mathrm{Dom}(g)\cap\mathrm{Dom}(f_2)$. Обозначая $\mathring{O}_\delta(a) \coloneqq \mathring{O}_{\delta_1}(a)\cap\mathring{O}_{\delta_2}(a)$, получим

$$|f_1(x)| \leqslant \alpha(x)|g(x)| \leqslant M\alpha(x)|f_2(x)| = \beta(x)|f_2(x)|$$

для всех $x \in \mathring{O}_\delta(a)\cap\mathrm{Dom}(f_1)\cap\mathrm{Dom}(f_2)\cap\mathrm{Dom}(g) = \mathring{O}_\delta(a)\cap\mathrm{Dom}(f_1)\cap\cap\mathrm{Dom}(f_2)$, где $M\alpha(x) =: \beta(x) \to 0$ при $x \to a$. Таким образом, свойство 6 выполнено по определению 1 о-малого.

Теперь проверим свойство 7. Из равенства $f = o(g)$ получаем существование $\delta_1 > 0$ такого, что $|f(x)| \leqslant \alpha(x)|g(x)|$ для всех $x \in \mathring{O}_{\delta_1}(a)\cap\mathrm{Dom}(f)\cap\cap\mathrm{Dom}(g)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$. Также найдётся $\delta_2 \in (0,\delta]$ такое, что $h(x) \in \in \mathring{O}_{\delta_1}(a)\cap\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)$ при всех $x \in \mathring{O}_{\delta_2}(a)\cap\mathrm{Dom}(h)$, а следовательно, и $|f\big(h(x)\big)| \leqslant \alpha\big(h(x)\big)\big|g\big(h(x)\big)\big|$. Так как $\lim\limits_{x\to a}\alpha\big(h(x)\big) = 0$ по теореме 1.4 о пределе композиции функций и $\mathrm{Dom}(f\circ h) = \mathrm{Dom}(g\circ h) = \mathrm{Dom}(h)$, то $f\circ h = o(g\circ h)$ по определению 1 о-малого.

Свойства 1, 2 проверяются непосредственно, а при проверке каждого из свойств 3–5 можно сузить все фигурирующие в этом свойстве функции на пересечение их областей определения и воспользоваться замечанием 4. ◀

Пример 1. Для любых $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ при $x \to 0$ по определению 1 о-малого получим

$$x^{n+m} = o(x^n),$$

так как для всех $x \neq 0$ имеем $|x^{m+n}| = |x^m||x^n| \leqslant \underbrace{|x^m|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}|x^n|$. Отсюда имеем

$$f = o(x^{n+m}) \implies f = o\big(o(x^n)\big) \overset{\text{св-во } 1}{\implies} f = o\big(O(x^n)\big) \overset{\text{св-во } 6}{\implies} f = o(x^n). \qquad (2)$$

Замечание 5. Вместо громоздкой записи (2) в дальнейшем будем пользоваться *сокращённой записью*

$$f = o(x^{n+m}) = o\big(o(x^n)\big) = o\big(O(x^n)\big) = o(x^n). \qquad (3)$$

Равенствам типа (3) можно дать и формальную интерпретацию (хотя в нашем курсе мы этого делать не станем), например равенство

$$2o(g) + O(g) = o(g) + O(g)$$

по определению означает

$$\forall f_1 \forall f_2 \exists f_3 \exists f_4 \ \big(f_1 = o(g)\big) \& \big(f_2 = O(g)\big) \implies$$
$$\implies \big(f_3 = o(g)\big) \& \big(f_4 = O(g)\big) \& (2f_1 + f_2 = f_3 + f_4).$$

§ 3.7. Два замечательных предела

Теорема 1 (о первом замечательном пределе). *При $x \to 0$ справедливо представление*

$$\sin x = x + o(x^2), \qquad (1)$$

в котором о-малое является непрерывной в нуле функцией. В частности,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (2)$$

Доказательство. Из свойств тригонометрических функций (см. пункт 3.5.2) вытекает известное неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

для всех $x \in (0, \pi/2)$, а значит,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

и
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{3}$$
для всех $x \in (0, \pi/2)$. В силу чётности функции $\cos$ и нечётности функции $\sin$ получим, что неравенство (3) верно также для всех $x \in (-\pi/2, 0)$. В силу непрерывности функции $\cos$ и равенства $\cos 0 = 1$ по принципу 1.6 двустороннего ограничения получаем равенство (2), называемое ***первым замечательным пределом***.

Далее из неравенства (3) получим
$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x$$
и
$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} = \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \frac{x^2}{2},$$
а следовательно,
$$0 < \frac{x - \sin x}{x} < \frac{x^2}{2} \tag{4}$$
для всех $x \in \mathring{O}_{\frac{\pi}{2}}(0)$ в силу неравенства (3). Из неравенства (4) для всех $x \in \mathring{O}_{\frac{\pi}{2}}(0)$ вытекает неравенство
$$|\sin x - x| < \frac{1}{2}|x^3| = \underbrace{\frac{1}{2}|x|}_{\downarrow\, 0}x^2,$$
из которого вытекает равенство (1) по определению 6.1 о-малого, а также более информативное равенство
$$\sin x = x + O(x^3) \tag{5}$$
по определению 6.2 О-большого. ◀

Теорема 2 [О втором замечательном пределе].
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{6}$$

Доказательство. Для любого $t \geqslant 1$ в силу свойств степеней и установленного при доказательстве теоремы 2.2.3 о числе e для всех $n \in \mathbb{N}$ неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ имеем
$$\left(1+\frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]+1} < \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} < \left(1+\frac{1}{[t]}\right)^{[t]+2} < e\left(1+\frac{1}{[t]}\right)^2, \tag{7}$$

где $[t]$– целая часть числа t. Так как $\mathbb{N} \ni [t] \to +\infty$ и $\mathbb{N} \ni [t]+1 \to +\infty$ при $1 \leqslant t \to +\infty$, то из теоремы 2.2.3 о числе e и арифметических свойств 2.1.3 предела последовательности по теореме 1.4 о пределе композиции функций в силу замечания 1.3 получаем, что

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[t]+1}\right)^{[t]+1} = e \text{ и } \lim_{t\to+\infty} e\left(1+\frac{1}{[t]}\right)^{2} = e,$$

поэтому в силу принципа 1.6 двустороннего ограничения имеем

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = e.$$

Из арифметических свойств 1.3 предела функции вытекает, что

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}}{1+\frac{1}{t}} = \frac{e}{1} = e.$$

Далее из теоремы 1.4 о пределе композиции функций получим

$$e = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} \overset{\{y=z-1\to+\infty\}}{=} \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z} =$$

$$= \lim_{z\to+\infty}\left(\frac{z}{z-1}\right)^{z} = \lim_{z\to+\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z} \overset{\{z=-t\to+\infty\}}{=} \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}.$$

Таким образом, установлено равенство

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e,$$

из которого в силу равенства $\lim\limits_{x\to0}(1/x) = \infty$ и следует равенство (6) по теореме 1.4 о пределе композиции функций. ◀

§ 3.8. Асимптотические представления некоторых элементарных функций в нуле

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда*

$$\ln(1+x) = x + o(x), \tag{1}$$

$$e^{x} = 1 + x + o(x), \tag{2}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x) \tag{3}$$

при $x \to 0$, причём о-малые во всех формулах непрерывны в нуле.

Доказательство.

$$1 = \ln e = \lim_{x\to 0} \ln\Big((1+x)^{\frac{1}{x}}\Big) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Доопределив функцию $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ значением $f(0) := e$, получим её непрерывность в нуле в силу равенства (7.6). Используя непрерывность логарифмической функции в точке e и теорему 2.4′ о непрерывности композиции непрерывных функций, получим

$$1 = \ln e = \lim_{x\to 0} \ln\Big((1+x)^{\frac{1}{x}}\Big) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x},$$

отсюда и вытекает равенство (1) по определению 6.1 о-малого в силу замечания 1.4. Используя непрерывность экспоненты в нуле и теорему 1.4 о пределе композиции функций, получим

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{\{x = e^t - 1 \to 0\}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\ln(e^t)}{e^t - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1},$$

а следовательно, и

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

в силу арифметических свойств 1.3 предела, отсюда и вытекает равенство (2) по определению 6.1 о-малого в силу замечания 1.4. Используя свойства 6.1 о-малых, получим

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha = e^{\alpha\ln(1+x)} &\overset{(1)}{=} e^{\alpha x + \alpha o(x)} \overset{(2),\text{ св-во } 7}{=} \\
\overset{(2),\text{ св-во } 7}{=} 1 + \alpha x + \alpha o(x) &+ o\big(\alpha x + \alpha o(x)\big) \overset{\text{св-ва } 2,5}{=} \\
\overset{\text{св-ва } 2,5}{=} 1 + \alpha x + o(\alpha x) &+ o\big(\alpha x + o(\alpha x)\big) \overset{\text{св-ва } 1,2,4,6}{=} \\
\overset{\text{св-ва } 1,2,4,6}{=} 1 + \alpha x + o(\alpha x) &+ o(\alpha x) \overset{\text{св-ва } 3,2,6}{=} 1 + \alpha x + o(x).
\end{aligned}$$

Теорема полностью доказана. ◀

Теорема 2.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \tag{4}$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x^2), \tag{5}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + o(1) \tag{6}$$

при $x \to 0$, причём о-малые в формулах (4) и (5) непрерывны в нуле.

Доказательство. Используя представление (7.1) для синуса и свойства о-малых, получим

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \overset{(7.1),\ \text{св-во } 7}{=} 2\Big(\frac{x}{2}+o\Big(\frac{x^2}{4}\Big)\Big)^2 \overset{\text{св-ва } 2,6}{=}$$
$$\overset{\text{св-ва } 2,6}{=} 2\Big(\frac{x^2}{4}+xo(x^2)+o^2(x^2)\Big) \overset{\text{св-ва } 1,2,5}{=}$$
$$\overset{\text{св-ва } 1,2,5}{=} 2\Big(\frac{x^2}{4}+o(x^3)+o(x^4)\Big) \overset{\text{Пр. } 6.1,\ \text{св-во } 3}{=} \frac{x^2}{2}+o(x^3),$$

и равенство (4) установлено в силу свойств 2 и 5. Далее

$$\frac{1}{\cos x} \overset{(4)}{=} \Big(1+\Big(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\Big)\Big)^{-1} \overset{(3),\ \text{св-во } 7}{=}$$
$$\overset{(3),\ \text{св-во } 7}{=} 1+\frac{x^2}{2}-o(x^3)+o\Big(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\Big) \overset{\text{Пр. } 6.1,\ \text{св-ва } 2,5}{=}$$
$$\overset{\text{Пр. } 6.1,\ \text{св-ва } 2,5}{=} 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)+o\big(O(x^2)+o(x^2)\big) \overset{\text{св-ва } 1,4,6,3}{=} 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

поэтому

$$\operatorname{tg} x = \sin x\frac{1}{\cos x} = \big(x+o(x^2)\big)\Big(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big) \overset{\text{св-ва } 1\text{–}3,5 \text{ и Пр. } 6.1}{=} x+o(x^2)$$

и равенство (5) установлено. Также имеем

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \overset{(5)}{=} \frac{1}{x+o(x^2)} \overset{\text{св-ва } 2,5}{=} \frac{1}{x}\big(1+o(x)\big)^{-1} \overset{(3),\ \text{св-во } 7}{=}$$
$$\overset{(3),\ \text{св-во } 7}{=} \frac{1}{x}\Big(1-o(x)+o\big(o(x)\big)\Big) \overset{\text{св-ва } 1\text{–}3,5,6}{=} \frac{1}{x}\big(1+o(x)\big) \overset{\text{св-ва } 2,5}{=} \frac{1}{x}+o(1),$$

что и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 1. Используя формулу (7.5), а также непосредственно проверяемое при $t \to 0$ равенство

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+O(t^2), \tag{7}$$

по аналогии с выводом равенств (4)–(6) устанавливаются более информативные равенства

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+O(x^4), \tag{8}$$
$$\operatorname{tg} x = x+O(x^3), \tag{9}$$
$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x}+O(x). \tag{10}$$

Теорема 3.

$$\arcsin x = x + o(x^2), \tag{11}$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x^2), \tag{12}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x + o(x^2), \tag{13}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - x + o(x^2) \tag{14}$$

при $x \to 0$*, причём о-малые во всех формулах непрерывны в нуле.*

Доказательство. Используя первый замечательный предел (7.2), непрерывность арксинуса в нуле и теорему 1.4 о пределе композиции функций, получим

$$1 = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \overset{\{t = \arcsin x \to 0\}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x},$$

а следовательно, и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

в силу арифметических свойств 1.3 предела, поэтому

$$\arcsin x = x + o(x) \tag{15}$$

по определению 6.1 о-малого в силу замечания 1.4. Снова используя непрерывность арксинуса в нуле и подставляя $t = \arcsin x$ в формулу

$$\sin t = t + o(t^2),$$

по свойству 7 о-малых получим, что

$$x = \arcsin x + o(\arcsin^2 x) \overset{(15)}{=} \arcsin x + o\Big(\big(x + o(x)\big)^2\Big) \overset{\text{св-ва } 1\text{–}3,5}{=}$$

$$= \arcsin x + o\big(x^2 + o(x^2)\big) \overset{\text{св-ва } 1,2,4,6}{=} \arcsin x + o(x^2)$$

при $x \to 0$ и равенство (11) установлено в силу свойств 2 и 5.

Совершенно аналогично устанавливается формула (12) для арктангенса. Формулы (13) и (14) вытекают из формул

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

и формул (11), (12) соответственно. ◀

Замечание 2. Из формулы (9), формулы (7.5) и доказательства теоремы 3 вытекает, что все $o(x^2)$ в формулах (11)–(14) могут быть заменены на $O(x^3)$, что является более информативным.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ *и* $b > 0$. *Тогда*

$$\log_a(x_0 + h) = \log_a x_0 + \frac{1}{x_0 \ln a} h + o(h), \tag{16}$$

$$b^{x_0+h} = b^{x_0} + b^{x_0} \ln b\, h + o(h), \tag{17}$$

$$(x_0 + h)^\alpha = x_0^\alpha + \alpha x_0^{\alpha-1} h + o(h) \text{ при } x_0 \neq 0, \tag{18}$$

$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 + \cos x_0\, h - \frac{\sin x_0}{2} h^2 + o(h^2), \tag{19}$$

$$\cos(x_0 + h) = \cos x_0 - \sin x_0\, h - \frac{\cos x_0}{2} h^2 + o(h^2), \tag{20}$$

$$\operatorname{tg}(x_0 + h) = \operatorname{tg} x_0 + \frac{1}{\cos^2 x_0} h + \frac{\sin x_0}{\cos^3 x_0} h^2 + o(h^2), \tag{21}$$

$$\operatorname{ctg}(x_0 + h) = \operatorname{ctg} x_0 - \frac{1}{\sin^2 x_0} h + \frac{\cos x_0}{\sin^3 x_0} h^2 + o(h^2), \tag{22}$$

где точки x_0, $x_0 + h$ *принадлежат области определения соответствующей функции и* $h \to 0$.

Доказательство. Используя результаты теорем 1 и 2, а также свойства 6.1 о-малых, получим

$$\log_a(x_0 + h) = \frac{\ln(x_0 + h)}{\ln a} = \frac{\ln x_0 + \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\ln a} \overset{(1)}{=} \frac{\ln x_0}{\ln a} + \frac{\frac{h}{x_0} + o\left(\frac{h}{x_0}\right)}{\ln a} =$$
$$= \log_a x_0 + \frac{1}{x_0 \ln a} h + o(h),$$

$$b^{x_0+h} = b^{x_0} e^{h \ln b} \overset{(2)}{=} b^{x_0}\big(1 + h \ln b + o(h \ln b)\big) = b^{x_0} + b^{x_0} \ln b\, h + o(h)$$

и

$$(x_0 + h)^\alpha = x_0^\alpha \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^\alpha \overset{(3)}{=} x_0^\alpha \left(1 + \frac{\alpha h}{x_0} + o\left(\frac{h}{x_0}\right)\right) = x_0^\alpha + \alpha x_0^{\alpha-1} h + o(h),$$

если $x_0 \neq 0$. Таким образом, равенства (16)–(18) установлены. Равенство (19) вытекает из соотношений

$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h \overset{(1),(4)}{=}$$
$$\overset{(1),(4)}{=} \sin x_0\big(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\big) + \cos x_0\big(h + o(h^2)\big) =$$
$$= \sin x_0 + \cos x_0\, h - \frac{\sin x_0}{2} h^2 + o(h^2),$$

равенство (20) устанавливается аналогично. Далее проверим равенство (21):

$$\operatorname{tg}(x_0+h)-\operatorname{tg}x_0=\frac{\operatorname{tg}x_0+\operatorname{tg}h}{1-\operatorname{tg}x_0\operatorname{tg}h}-\operatorname{tg}x_0=\frac{(\operatorname{tg}^2x_0+1)\operatorname{tg}h}{1-\operatorname{tg}x_0\operatorname{tg}h}\overset{(5)}{=}$$
$$\overset{(5)}{=}\frac{1}{\cos^2x_0}\frac{h+o(h^2)}{1-\operatorname{tg}x_0\,h-\operatorname{tg}x_0\,o(h^2)}\overset{(3)}{=}$$
$$\overset{(3)}{=}\frac{1}{\cos^2x_0}\big(h+o(h^2)\big)\Big(1+\operatorname{tg}x_0\,h+o(h^2)+o\big(-\operatorname{tg}x_0\,h-o(h^2)\big)\Big)=$$
$$=\frac{1}{\cos^2x_0}\big(h+o(h^2)\big)\big(1+\operatorname{tg}x_0\,h+o(h)\big)=$$
$$=\frac{1}{\cos^2x_0}\big(h+\operatorname{tg}x_0\,h^2+o(h^2)\big)=\frac{1}{\cos^2x_0}h+\frac{\sin x_0}{\cos^3x_0}h^2+o(h^2).$$

Равенство (22) устанавливается аналогично. ◀

Замечание 3. Из формул (7)–(9), формулы (7.5) и доказательства теоремы 4 вытекает, что все $o(x^2)$ в формулах (19)–(22) могут быть заменены на $O(x^3)$, что является более информативным.

§ 3.9. Равномерная непрерывность

Определение 1 (равномерной непрерывности). Функция f называется ***равномерно непрерывной*** на множестве $\Omega\subset\operatorname{Dom}(f)$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:$ $\forall x_1,x_2\in\Omega$
$$|x_1-x_2|<\delta\implies|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Замечание 1. Из определения 1 равномерной непрерывности непосредственно вытекает, что если функция f равномерно непрерывна на некотором множестве, то она равномерно непрерывна на любом его подмножестве.

Замечание 2. Если функция f равномерно непрерывна на некотором множестве Ω, то $f\in C(\Omega)$. Для проверки этого факта достаточно в определении 1 равномерной непрерывности зафиксировать произвольную точку $x_1\in\Omega$, тогда по определению 2.1 Коши получим, что функция $f\big|_\Omega$ непрерывна в точке x_1.

Утверждение 1 [Линейная комбинация равномерно непрерывных функций равномерно непрерывна]. *Пусть $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и функции f,g равномерно непрерывны на некотором множестве Ω. Тогда функция $\alpha f+\beta g$ равномерно непрерывна на Ω.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по определению 1 равномерной непрерывности найдём $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta_1$ и

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta_2$. В силу неравенства треугольника получим

$$\begin{gathered} |\alpha f(x_1) + \beta g(x_1) - \alpha f(x_2) - \beta g(x_2)| \leqslant \\ \leqslant |\alpha f(x_1) - \alpha f(x_2)| + |\beta g(x_1) - \beta g(x_2)| \leqslant \\ \leqslant \frac{|\alpha|\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} + \frac{|\beta|\varepsilon}{2(|\beta| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{gathered}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, что и завершает доказательство утверждения. ◀

Утверждение 2. *Если функция f равномерно непрерывна на ограниченном множестве Ω, то она ограничена на Ω.*

Доказательство. Так как множество Ω ограничено, то найдётся отрезок $[a, b] \supset \supset \Omega$. Пусть функция f равномерно непрерывна и не ограничена на Ω. По индукции строится последовательность x_n точек Ω такая, что $|f(x_{n+1})| \geqslant |f(x_n)| + 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $x_n \in \Omega \subset [a, b]$ ограничена, то по теореме 2.6.2 Больцано–Вейерштрасса найдётся сходящаяся её подпоследовательность $x_{n_k} \to \xi \in \mathbb{R}$ при $k \to \infty$. По определению 1 равномерной непрерывности для $\varepsilon := 1$ найдётся $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(y)| < 1$ для всех $x, y \in \Omega$ таких, что $|x - y| < \delta$. Так как $x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \to \xi - \xi = 0$ при $k \to \infty$, то найдётся $K \in \mathbb{N}$ такое, что $|x_{n_{K+1}} - x_{n_K}| < \delta$. Так как $n_{K+1} \geqslant n_K + 1$, то по неравенству треугольника получим

$$|f(x_{n_{K+1}}) - f(x_{n_K})| \geqslant |f(x_{n_{K+1}})| - |f(x_{n_K})| \geqslant |f(x_{n_K+1})| - |f(x_{n_K})| \geqslant 1,$$

что противоречит нашему построению. ◀

Утверждение 3. *Пусть Ω — ограниченное множество и функции f, g равномерно непрерывны на Ω. Тогда их произведение fg равномерно непрерывно на множестве Ω.*

Доказательство. По утверждению 2 функции f и g ограничены на множестве Ω, а значит, найдётся $M > 0$ такое, что $|f(x)| < M$ и $|g(x)| < M$ для всех $x \in \Omega$. По определению 1 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta_1$ и

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta_2$. Тогда

$$\begin{gathered}|f(x_1)g(x_1) - f(x_2)g(x_2)| = \\ = |f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_2) + f(x_1)g(x_2) - f(x_2)g(x_2)| \leqslant \\ \leqslant |f(x_1)||g(x_1) - g(x_2)| + |g(x_2)||f(x_1) - f(x_2)| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\end{gathered}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, что и означает равномерную непрерывность функции fg на множестве Ω. ◀

Теорема 1 (Кантора–Гейне). *Пусть $f \in C[a, b]$, тогда функция f равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть функция f не равномерно непрерывна на $[a, b]$, тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ при $\delta_n := 1/n$ найдутся последовательности $x'_n, x''_n \in \in [a, b]$ такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta_n \to 0$ и при этом $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. В силу ограниченности последовательности x'_n, по теореме 2.6.2 Больцано–Вейерштрасса существует её сходящаяся подпоследовательность $x'_{n_k} \to \xi \in [a, b]$. Так как $n_k \geqslant k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то

$$|x''_{n_k} - \xi| \leqslant |x''_{n_k} - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - \xi| < \frac{1}{n_k} + |x'_{n_k} - \xi| \leqslant \frac{1}{k} + |x'_{n_k} - \xi| \xrightarrow{k\to\infty} 0 + 0 = 0$$

по теореме 2.1.3 об арифметических операциях над сходящимися последовательностями, а значит, $x''_{n_k} \to \xi$ при $k \to \infty$. Так как $f \in C[a, b]$, то $f(x'_{n_k}), f(x''_{n_k}) \to f(\xi)$ при $k \to \infty$ по определению 2.1$'$ Гейне, а следовательно, $f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k}) \to f(\xi) - f(\xi) = 0$, что противоречит неравенству $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0 > 0$, верному для всех $k \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 3. Теорема 1 Кантора–Гейне остаётся в силе для случая, когда M_1 и M_2 — *метрические пространства* (см. определение 10.2.1), $f\colon M_1 \to M_2$ и $f \in C(K)$, где $M_1 \supset K$ — *компакт* (см. определение 10.2.23).

Теорема 1′ (Кантора–Гейне). *Пусть* $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\Omega := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| \geqslant \delta\}$, $f \in C(\Omega)$ *и существует* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$, *тогда функция* f *равномерно непрерывна на* Ω.

Доказательство. Пусть функция f не равномерно непрерывна на Ω, тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ при $\delta_n := 1/n$ найдутся последовательности $x'_n, x''_n \in \Omega$ такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta_n \to 0$ и при этом $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим два случая.

а) Пусть последовательность x'_n ограничена, то есть $\exists M \geqslant 0 : |x'_n| \leqslant M$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|x''_n| \leqslant |x''_n - x'_n| + |x'_n| \leqslant \frac{1}{n} + M \leqslant M + 1$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что все элементы последовательностей x'_n, x''_n лежат в пересечении множества Ω и отрезка длины $2M+2$ с центром в нуле, которое само является либо отрезком, либо объединением двух непересекающихся отрезков. Так как $|x'_n - x''_n| \to 0$, то найдутся подпоследовательности x'_{n_k}, x''_{n_k}, элементы которых лежат на одном и том же отрезке $I \subset \Omega$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Так как $f \in C(\Omega)$, то $f \in C(I)$ и функция f равномерно непрерывна на I по теореме 1 Кантора–Гейне, что противоречит нашему построению.

б) Пусть последовательность x'_n не ограничена, то есть найдётся её подпоследовательность $x'_{n_p} : |x'_{n_p}| \xrightarrow{p\to\infty} +\infty$. Тогда

$$|x''_{n_p}| \geqslant |x'_{n_p}| - |x'_{n_p} - x''_{n_p}| \geqslant |x'_{n_p}| - 1 \xrightarrow{p\to\infty} +\infty,$$

отсюда в силу определения предела по Гейне (см. замечание 1.1) имеем

$$f(x'_{n_p}) - f(x''_{n_p}) \xrightarrow{p\to\infty} b - b = 0,$$

что противоречит неравенству $|f(x'_{n_p}) - f(x''_{n_p})| \geqslant \varepsilon_0 > 0$, верному для всех $p \in \mathbb{N}$. ◀

Глава 4

Дифференцируемость функции одной переменной

§ 4.1. Основные определения и свойства

Определение 1 (дифференцируемой функции). Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ и $O_\delta(x_0) \subset \mathrm{Dom}(f)$. Функция f называется ***дифференцируемой в точке*** x_0, если существует число $A \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $h \in O_\delta(0)$ выполнено равенство

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h) \tag{1}$$

при $h \to 0$ (согласно определению 3.6.1 о-малого и замечанию 3.6.2 это означает, что $|o(h)| \leqslant \alpha(h)|h|$, где $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = \alpha(0) = 0$). При выполнении равенства (1) *линейная функция* $h \mapsto Ah : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется ***дифференциалом*** функции f в точке x_0 и обозначается символом $df(x_0)$. Применяя функцию $df(x_0)$ к некоторому $h \in \mathbb{R}$, вместо $df(x_0)(h)$ будем также использовать обозначение $df(x_0, h)$ или $df(x_0)h$.

Определение 2 (дифференцируемости на множестве). Функция f называется ***дифференцируемой на множестве*** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если она дифференцируема в каждой точке множества Ω. Класс всех таких функций обозначим $D(\Omega)$. При этом в случае $\Omega = \mathrm{Dom}(f)$ функцию f называют ***дифференцируемой***. Также условимся вместо $D\big(\{x_0\}\big)$, $D\big((a,b)\big)$, $D\big([a,b]\big)$, $D\big([a,b)\big)$, $D\big((a,b]\big)$ пользоваться упрощёнными обозначениями $D(x_0)$, $D(a,b)$, $D[a,b]$, $D[a,b)$, $D(a,b]$.

Определение 3 (производной). Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $O_\delta(x_0) \subset \mathrm{Dom}(f)$ и существует

$$f'(x_0) \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{\text{т. } 3.1.4}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

тогда число $f'(x_0)$ называется ***производной*** функции f в точке x_0.

Утверждение 1 (о единственности производной). *Если производная функции f определена в точке x_0, то она определена однозначно.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из утверждения 3.1.1 о единственности предела. ◄

Теорема 1 (о равносильности дифференцируемости существованию производной). *Функция f дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ $\iff$ существует $f'(x_0) \in \mathbb{R}$. При выполнении любого из этих двух условий дифференциал* (см. определение 1 дифференцируемой функции) *функции f в точке x_0 определён однозначно равенством $df(x_0, h) = f'(x_0)h$ для всех $h \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из определения 3.6.1 о-малого, утверждения 1 о единственности производной и замечания 3.1.4. ◄

Утверждение 2 (о непрерывности дифференцируемой функции). *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Используя теорему 3.1.4 о пределе композиции функций, а затем переходя в (1) к пределу при $h \to 0$, имеем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{т. } 3.1.4}{=} \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0),$$

что и означает непрерывность функции f в точке x_0 в силу замечания 3.2.1. ◄

Следствие 1 утверждения 2 о непрерывности дифференцируемой функции. *Для любого множества $\Omega \subset \mathbb{R}$ выполнено $D(\Omega) \subset C(\Omega)$.*

Замечание 1 (об односторонних производных). Пусть $a < b$ и $[a, b] \subset$ $\subset \operatorname{Dom}(f)$. ***Правой*** производной функции f в точке a называется число

$$f'_+(a) := \lim_{h \to 0+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \overset{\text{т. } 3.1.4}{=} \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R},$$

левой производной функции f в точке b называется число

$$f'_-(b) := \lim_{h \to 0-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h} \overset{\text{т. } 3.1.4}{=} \lim_{x \to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \in \mathbb{R}.$$

Также в точках a и b даётся определение дифференцируемости справа и слева, аналогичное определению 1 дифференцируемой функции при $h > 0$ и $h < 0$ соответственно. Затем доказывается аналог теоремы 1 о равносильности дифференцируемости функции f справа в точке a [слева в точке b] существованию правой [левой] производной функции f в точке a [в точке b]. Как и в утверждении 2 о непрерывности дифференцируемой функции, получим, что из дифференцируемости функции f справа в точке a [слева в точке b] вытекает её непрерывность справа в точке a [слева в точке b], то есть равенство

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \left[\lim_{x \to b-} f(x) = f(b) \right].$$

Из свойств предела (см. замечание 3.1.2) для любой функции g вытекает, что $g'(x_0)=A \iff O_\delta(x_0)\subset \mathrm{Dom}(g)$ для некоторого $\delta>0$ и $g'_-(x_0)=g'_+(x_0)=A$.

Утверждение 3. *Пусть функция f дифференцируема справа в точке a и для некоторого $b\in(a,+\infty]$ выполнено $[a,b)\subset \mathrm{Dom}(f)$ $\Big[$функция f дифференцируема слева в точке b и для некоторого $a\in[-\infty,b)$ выполнено $(a,b]\subset$ $\subset \mathrm{Dom}(f)\Big]$. Тогда существует функция $g\in D(a)$ $[g\in D(b)]$ такая, что $g(x)=f(x)$ для всех $x\in[a,b)$ $\big[g(x)=f(x)$ для всех $x\in(a,b]\big]$.*

Доказательство. Рассмотрим случай дифференцируемости функции f справа в точке a (случай дифференцируемости слева в точке b рассматривается аналогично либо сводится к этому переходом к функции $f_1(x)\coloneqq f(-x)$). Фиксируем произвольное $a'\in[-\infty,a)$ и рассмотрим функцию g, определённую при всех $x\in(a',b)$ равенством

$$g(x)\coloneqq\begin{cases} f(x) \text{ при } x\in[a,b);\\ f(a)+f'_+(a)(x-a) \text{ при } x\in(a',a).\end{cases} \tag{3}$$

Из формулы (3) непосредственно вытекает, что $g'_+(a)=f'_+(a)$, также по определению проверяется, что $g'_-(a)=f'_+(a)$, а следовательно, $g'(a)=f'_+(a)$ (см. замечание 1 об односторонних производных), что и завершает доказательство утверждения. ◀

Замечание 2 (о дифференцируемости на промежутках). Для *невырожденных* отрезков и полуинтервалов I (см. определение 1.4.4) через $D(I)$ в литературе часто обозначают класс всех функций, дифференцируемых на $\mathrm{int}(I)$ и обладающих правой производной в левых граничных точках и левой производной в правых граничных точках, принадлежащих I. При этом производной функции $f\in D(I)$ в граничных точках, принадлежащих промежутку I, называют соответствующие односторонние производные. Утверждение 3 позволяет нам не вводить подобных определений и всюду в этом курсе пользоваться только определениями 2 дифференцируемости на множестве и 3 производной, не теряя при этом общности.

Теорема 2 (о производных простейших элементарных функций). *Пусть $\alpha,a,b\in\mathbb{R}$, $0<a\neq1$ и $b>0$. Тогда существуют*

$$\log_a' x=\frac{1}{x\ln a}, \tag{4}$$

$$\big(b^x\big)'=b^x\ln b \tag{5}$$

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1} \text{ при } x\neq0, \tag{6}$$

$$\sin' x=\cos x, \tag{7}$$

$$\cos' x = -\sin x, \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{9}$$

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{10}$$

во всех точках x, принадлежащих области определения соответствующей функции. Также

$$\begin{gathered}(x^\alpha)'\big|_{x=0} = 0 \text{ при } \alpha = \frac{p}{2k-1} > 1,\ k \in \mathbb{N},\ 2k-1 < p \in \mathbb{N},\\ (x^\alpha)'_+\big|_{x=0} = 0 \text{ при } 1 < \alpha \in \mathbb{R},\\ x'|_{x=0} = 1.\end{gathered} \tag{11}$$

Доказательство. Наличие дифференцируемости и справедливость формул (4)–(10) непосредственно вытекают из теоремы 3.8.4, определения 1 дифференцируемой функции и теоремы 1 о равносильности дифференцируемости существованию производной. Формулы (11) вытекают из равенства

$$\frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = x^{\alpha-1},$$

свойств степенной функции (см. раздел 3.5.1), определения 3 производной и замечания 1 об односторонних производных. ◀

Теорема 3 (о дифференцируемости композиции функций). *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $g \in D(x_0)$, $g_0 := g(x_0)$ и $f \in D(g_0)$. Тогда $f \circ g \in D(x_0)$ и*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)g'(x_0) = f'(g_0)g'(x_0),$$

что равносильно

$$d(f \circ g)(x_0) = df\big(g(x_0)\big) \circ dg(x_0) = df(g_0) \circ dg(x_0).$$

Доказательство. По определению 1 дифференцируемой функции найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что для всех $z \in O_{\delta_1}(0)$, $h \in O_{\delta_2}(0)$ выполнено

$$f(g_0 + z) = f(g_0) + Az + u(z), \tag{12}$$

$$g(x_0 + h) = g_0 + Bh + v(h), \tag{13}$$

где $A = f'(g_0)$, $B = g'(x_0)$ по теореме 1 о равносильности дифференцируемости существованию производной и $|u(z)| \leqslant \alpha(z)|z|$, $|v(h)| \leqslant \beta(h)|h|$, функции α, β непрерывны в точке 0 и $\alpha(0) = \beta(0) = 0$. По утверждению 2 функция g непрерывна в точке x_0, поэтому найдётся $\delta \in (0, \delta_2]$ такое, что $g(x_0 + h) \in O_{\delta_1}(g_0)$ и

$$f\big(g(x_0+h)\big) \overset{(13)}{=} f\big(g_0 + Bh + v(h)\big) \overset{(12)}{=}$$
$$\overset{(12)}{=} f(g_0) + A\big(Bh + v(h)\big) + u\big(Bh + v(h)\big) = f(g_0) + ABh + r(h)$$

для всех $h \in O_\delta(0)$, при этом

$$|r(h)| = \big|Av(h) + u\big(Bh + v(h)\big)\big| \leqslant |Av(h)| + \big|u\big(Bh + v(h)\big)\big| \leqslant$$
$$\leqslant |A|\beta(h)|h| + \alpha\big(Bh + v(h)\big)|Bh + v(h)| \leqslant$$
$$\leqslant |A|\beta(h)|h| + \gamma(h)(|B||h| + \beta(h)|h|),$$

где функция $\gamma(h) \coloneqq \alpha\big(Bh + v(h)\big)$ непрерывна в нуле по теореме 3.2.4′ о непрерывности композиции непрерывных функций, что вытекает из непрерывности линейной функции Bh и функции v в нуле, а также из арифметических свойств непрерывных функций (см. теорему 3.2.3′). Таким образом, $|r(h)| \leqslant \delta(h)|h|$, где функция

$$\delta(h) \coloneqq |A|\beta(h) + |B|\gamma(h) + \beta(h)\gamma(h)$$

непрерывна в нуле в силу арифметических свойств непрерывных функций и $\delta(0) = 0$. По определению 3.6.1 о-малого это означает, что $r(h) = o(h)$ и теорема полностью доказана в силу определения 1 дифференцируемой функции и теоремы 1 о равносильности дифференцируемости существованию производной. ◀

Следствие 2 теоремы о дифференцируемости композиции функций. *Инвариантность формы первого дифференциала.*

Фиксируем некоторый *символ* x, который будем называть *свободной переменной*, и соответствующий ему символ dx. Для любой функции φ введём *формальное обозначение*

$$d\varphi(x) \coloneqq d\varphi(x, dx). \tag{14}$$

Если $x \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in D(x)$, то правая часть (14) определена для любого $dx \in \mathbb{R}$, который обычно называют *дифференциалом независимой переменной*.

Далее если $x, dx \in \mathbb{R}$, $g \in D(x)$, $f \in D\big(g(x)\big)$ и $u \coloneqq f \circ g$, то получим формулу

$$du(x) = d(f \circ g)(x) \overset{(14)}{=} d(f \circ g)(x, dx) \overset{\text{Т. } 3}{=} df\big(g(x), dg(x, dx)\big). \tag{15}$$

При этих же условиях, используя формальную подстановку $u(x) = f\big(g(x)\big)$, а затем формально применяя подстановку (14), в которой символ независимой переменной x заменён на $g(x)$, получим

$$du(x) = df\big(g(x)\big) = df\big(g(x), dg(x)\big) \overset{(14)}{=} df\big(g(x), dg(x, dx)\big),$$

что снова приводит к формуле (15). Рассмотренное формальное правило подстановки и называется ***инвариантностью формы первого дифференциала***. ◀

Теорема 4 (об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями). *Пусть функции f, g дифференцируемы в точке x_0. Тогда функции $\alpha f + \beta g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (в случае если $g(x_0) \neq 0$) дифференцируемы в точке x_0 при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причём верны равенства:*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0), \tag{16}$$

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0), \tag{17}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{18}$$

Доказательство. Используя определение 1 дифференцируемой функции, теорему 1 о равносильности дифференцируемости существованию производной, теорему 3.6.1 о свойствах о-малых и пример 3.6.1, для некоторого $\delta > 0$ и любого $h \in O_\delta(0)$ получим равенства

$$\begin{gathered}
(\alpha f + \beta g)(x_0 + h) - (\alpha f + \beta g)(x_0) = \\
= \alpha\big(f(x_0 + h) - f(x_0)\big) + \beta\big(g(x_0 + h) - g(x_0)\big) = \\
\overset{\text{О. } 1, \text{Т. } 1}{=} \alpha f'(x_0)h + \beta g'(x_0)h + \alpha o(h) + \beta o(h) \overset{\text{Т. } 3.6.1}{=} \\
\overset{\text{Т. } 3.6.1}{=} \big(\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)\big)h + o(h)
\end{gathered}$$

и

$$\begin{gathered}
f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0) \overset{\text{О. } 1, \text{Т. } 1}{=} \\
\overset{\text{О. } 1, \text{Т. } 1}{=} \big(f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)\big)\big(g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)\big) - f(x_0)g(x_0) = \\
= \big(f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)\big)h + f'(x_0)g'(x_0)h^2 + \\
+ \big(f(x_0) + f'(x_0)h\big)o(h) + \big(g(x_0) + g'(x_0)h\big)o(h) + o(h)o(h) \overset{\text{Т. } 3.6.1}{=} \\
\overset{\text{Т. } 3.6.1}{=} \big(f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)\big)h + f'(x_0)g'(x_0)h^2 + \\
+ o(h) + o(h^2) \overset{\text{Пр. } 3.6.1, \text{Т. } 3.6.1}{=} \big(f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)\big)h + o(h),
\end{gathered}$$

из которых соответственно вытекают равенства (16) и (17).

Если $g(x_0) \neq 0$, то функция $t \mapsto 1/t$ дифференцируема в точке $g(x_0)$ по теореме 2 о производных простейших элементарных функций, а следовательно, функция $1/g$ дифференцируема в точке x_0 по теореме 3 о дифференцируемости композиции функций, причём

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{1}{t} \circ g\right)'(x_0) \overset{\text{Т. 3 и 2}}{=} -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)},$$

поэтому

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) \overset{(17)}{=} f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\right) + \frac{1}{g(x_0)}f'(x_0) =$$
$$= \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

и равенство (18) установлено. ◀

Замечание 3. Из доказательства теоремы 4 об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями следует, что она остаётся в силе для функций f и g, дифференцируемых справа [слева] в точке x_0. При этом в равенствах (16)–(18) рассматриваются левые [правые] производные.

§ 4.2. О касательной прямой

Определение 1 (касательной прямой). Пусть $f \in D(x_0)$ и $y_0 := f(x_0)$, тогда прямая

$$l : y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

называется ***касательной прямой*** к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Определение 2. Пусть t_0 — предельная точка для множества $\Omega \subset \mathbb{R}$. На плоскости Oxy рассмотрим семейство прямых $\{l(t) : t \in \Omega\}$, проходящих через одну и ту же точку (x_0, y_0). Прямая l, проходящая через точку (x_0, y_0) и лежащая в плоскости Oxy, называется ***предельным положением прямых*** $l(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} 2\big(\widehat{l, l(t)}\big) = \mathbf{0}, \tag{1}$$

где через $2\big(\widehat{l, l(t)}\big)$ обозначается *удвоенный угол* между прямыми l и $l(x)$, который, в отличие от угла $\big(\widehat{l, l(t)}\big)$, определён однозначно.

Наряду с определением 1 можно дать следующее более общее определение.

Определение 1′ (касательной прямой). Пусть $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ является предельной точкой для $\mathrm{Dom}(f)$ и $y_0 := f(x_0)$. Для любого $x \in \mathrm{Dom}(f)$ обозначим $\Delta x := x - x_0$, $\Delta y := f(x) - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и будем называть ***секущей*** прямую

$$l(x) := \big\{ \big(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y\big) : t \in \mathbb{R} \big\}, \tag{2}$$

проходящую через точки (x_0, y_0) и $\big(x, f(x)\big)$. Прямую l будем называть ***касательной*** к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если она является *предельным положением секущих* $l(x)$ при $x \to x_0$ (см. определение 2), при этом в случае вертикальной прямой $l : x = x_0$ будем дополнительно требовать непрерывности функции f в точке x_0.

Оказывается, что между определениями касательной прямой 1 и 1′ имеется тесная связь.

Теорема 1. *Пусть $O_\delta(x_0) \subset \mathrm{Dom}(f)$ при некотором $\delta > 0$, $y_0 := f(x_0)$ и $k \in \mathbb{R}$. Прямая*

$$l : y - y_0 = k(x - x_0)$$

является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 по определению 1′ $\iff$ $f'(x_0) = k$.

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Для любого $x \in \mathring{O}_\delta(x_0)$ рассмотрим *секущую* $l(x)$, определённую равенством (2). По определению 1′ имеем

$$\lim_{x \to x_0} 2\big(\widehat{l, l(x)}\big) = \mathbf{0}.$$

Из курса аналитической геометрии известно, что последнее равенство равносильно

$$\lim_{x \to x_0} \frac{k\Delta x - \Delta y}{\sqrt{k^2 + 1}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0,$$

где $\Delta x := x - x_0$, $\Delta y := f(x) - f(x_0)$, что по теореме 3.1.4 о пределе композиции функций равносильно равенству

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\Delta x - \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0, \tag{3}$$

где $\Delta y := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Обозначим

$$\frac{k\Delta x - \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} =: \alpha, \tag{4}$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ и
$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0. \tag{5}$$
Как следствие равенства (4), имеем равенство
$$k^2 \Delta x^2 - 2k\Delta x \Delta y + \Delta y^2 = \alpha^2(\Delta x^2 + \Delta y^2),$$
разделив обе части которого на $\Delta x^2 \neq 0$, получим
$$(1-\alpha^2)t^2 - 2kt + k^2 - \alpha^2 = 0, \tag{6}$$
где
$$t = t(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$
Используя равенство (5), выберем $\delta_1 \in (0, \delta]$ настолько малым, что $|\alpha(\Delta x)| < 1$ при всех $\Delta x \in \mathring{O}_{\delta_1}(0)$. Из уравнения (6) вытекает, что при всех $\Delta x \in \mathring{O}_{\delta_1}(0)$ выполнено либо
$$t = \frac{k + \sqrt{k^2 - (1-\alpha^2)(k^2-\alpha^2)}}{1-\alpha^2}, \tag{7}$$
либо
$$t = \frac{k - \sqrt{k^2 - (1-\alpha^2)(k^2-\alpha^2)}}{1-\alpha^2}. \tag{8}$$
Доопределив функцию α значением $\alpha(0) := 0$, получим её непрерывность в нуле в силу равенства (5). Используя теорему 3.2.3$'$ об арифметических операциях над непрерывными функциями, непрерывность квадратного корня в нуле и теорему 3.2.4$'$ о непрерывности композиции непрерывных функций, получим, что правые части равенств (7) и (8) стремятся к числу k при $\Delta x \to 0$. Таким образом,
$$\lim_{\Delta x \to 0} t(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k,$$
а значит, $f'(x_0) = k$ по определению 1.3 производной.

$\Longleftarrow$: По определению 1.3 производной имеем
$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k,$$
поэтому
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\Delta x - \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \overbrace{\operatorname{sgn}(\Delta x)}^{\text{огр.}} \frac{\overbrace{k - \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}^{\substack{k-k=0 \\ \uparrow}}}{\underbrace{\sqrt{1 + \dfrac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}}_{\substack{\downarrow \\ \sqrt{1+k^2}}}} = 0,$$

а следовательно, выполнено равенство (3), равносильное утверждению о том, что прямая l является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 по определению $1'$ касательной прямой. ◀

Замечание 1. Определение $1'$ является более общим, чем определение 1, так как допускает случай вертикальной касательной $l : x = x_0$. В этом случае функция f не является дифференцируемой в точке x_0, хотя нередко при этом используют обозначение $f'(x_0) = \infty$. Также из доказательства теоремы 1 вытекает, что функция f автоматически является непрерывной в точке x_0 при наличии касательной $l : y - y_0 = k(x - x_0)$ к её графику в этой точке по определению $1'$.

§ 4.3. Производные высших порядков

Замечание 1 (об операторе дифференцирования). Обозначим через $\mathcal{F}_{\mathbb{R}} := \{f : \mathbb{R} \supset \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}\}$ ***множество всех функций, действующих из*** $\mathbb{R}$ ***в*** $\mathbb{R}$ *(с различными областями определения)*. Определение 1.3 производной дает нам ***функцию*** $D\colon \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, *определённую на всём* $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ и переводящую любую функцию $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ в функцию $D(f) := f' \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ (при этом $\mathrm{Dom}(f') \subset \mathrm{Dom}(f)$ и для гиперконтинуального семейства функций имеем $\mathrm{Dom}(f') = \varnothing$).

Определение 1 (производной порядка k). ***Производной порядка*** **k** $\in \mathbb{N}$ (или просто **k*-й производной***) функции f называется функция

$$f^{(k)} := \underbrace{(D \circ \ldots \circ D)}_{k \text{ раз}}(f).$$

Функция f называется **k *раз дифференцируемой в точке*** x_0, если $x_0 \in \in \mathrm{Dom}(f^{(k)})$. Заметим, что $f^{(1)} := D(f) := f'$, а также определим $f^{(0)} := f$.

Определение 2. Пусть $k \in \mathbb{N}_0$. Функция f называется **k *раз дифференцируемой на множестве*** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если она k раз дифференцируема в каждой точке множества Ω. Класс всех таких функций обозначим $D^k(\Omega)$. При этом в случае $\Omega = \mathrm{Dom}(f)$ функцию f называют **k *раз дифференцируемой***. Также условимся вместо $D^k\big(\{x_0\}\big)$, $D^k\big((a, b)\big)$, $D^k\big([a, b]\big)$, $D^k\big([a, b)\big)$, $D^k\big((a, b]\big)$ пользоваться упрощёнными обозначениями $D^k(x_0)$, $D^k(a, b)$, $D^k[a, b]$, $D^k[a, b)$, $D^k(a, b]$.

Замечание 2. Для $k \in \mathbb{N}$ раз дифференцируемой в точке x_0 функции f в силу равенства $f^{(k)} = \big(f^{(k-1)}\big)'$ и определения 1.3 производной получим $f \in \in D^{k-1}\big(O_\delta(x_0)\big)$ для некоторого $\delta > 0$ и $f^{(k-1)} \in D(x_0)$.

Замечание 3. Используя ассоциативность композиции функций (см. утверждение 0.5.1), получим $f^{(k)} = (f^{(k-p)})^{(p)}$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in \overline{0, k}$.

Определение 3 (многократной односторонней дифференцируемости). Любую функцию f, у которой для некоторого $\delta > 0$ выполнено $[a, a+\delta) \subset \mathrm{Dom}(f)$ $\big[(b-\delta, b] \subset \mathrm{Dom}(f)\big]$, будем называть ***0 раз дифференцируемой справа*** в точке a [***0 раз дифференцируемой слева*** в точке b], при этом обозначим $f_+^{(0)}(a) := f(a)$ $\big[f_-^{(0)}(b) := f(b)\big]$. Далее по индукции для любого $k \in \mathbb{N}$ функцию f будем называть ***k раз дифференцируемой справа*** в точке a [***k раз дифференцируемой слева*** в точке b], если она k − 1 раз дифференцируема справа в точке a $\big[$k − 1 раз дифференцируема слева в точке $b\big]$ и существует $(r_{k-1})'_+(a) =: f_+^{(k)}(a)$ $\big[$существует $(l_{k-1})'_-(b) =: f_-^{(k)}(b)\big]$, где

$$r_{k-1}(x) := \begin{cases} f_+^{(k-1)}(a) \text{ при } x = a; \\ f^{(k-1)}(x) \text{ при } x \in \mathrm{Dom}\big(f^{(k-1)}\big) \setminus \{a\}, \end{cases} \tag{1}$$

$$l_{k-1}(x) := \begin{cases} f_-^{(k-1)}(b) \text{ при } x = b; \\ f^{(k-1)}(x) \text{ при } x \in \mathrm{Dom}\big(f^{(k-1)}\big) \setminus \{b\}. \end{cases}$$

Замечание 4. Для любого $k \in \mathbb{N}$ по индукции тривиально проверяется, что если $f \in D^k(a)$, то $f_-^{(k)}(a) = f_+^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

Утверждение 1. *Пусть $k \in \mathbb{N}_0$, функция f является k раз дифференцируемой справа в точке a и для некоторого $b \in (a, +\infty]$ выполнено $[a, b) \subset \mathrm{Dom}(f)$ $\big[$функция f является k раз дифференцируемой слева в точке b и для некоторого $a \in [-\infty, b)$ выполнено $(a, b] \subset \mathrm{Dom}(f)\big]$. Тогда существует функция $g \in D^{(k)}(a)$ $\big[g \in D^{(k)}(b)\big]$ такая, что $g(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b)$ $\big[g(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b]\big]$.*

Доказательство. Рассмотрим случай k–кратной дифференцируемости функции f справа в точке a $\big($случай k–кратной дифференцируемости слева в точке b рассматривается аналогично либо сводится к этому переходом к функции $f_1(x) := f(-x)\big)$. Фиксируем произвольное $a' \in [-\infty, a)$ и рассмотрим функцию g, определённую при всех $x \in (a', b)$ равенством

$$g(x) := \begin{cases} f(x) \text{ при } x \in [a, b); \\ \displaystyle\sum_{m=0}^{k} \frac{f_+^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m, \text{ при } x \in (a', a). \end{cases} \tag{2}$$

Докажем по индукции, что для всех $p \in \overline{0,k}$ выполнено равенство

$$g^{(p)}(a) = f_+^{(p)}(a). \tag{3}$$

При $p = 0$ равенство (3) очевидно выполнено. Пусть оно выполнено для некоторого $p \in \overline{0, k-1}$. Из определения 3 многократной односторонней дифференцируемости вытекает, что функция f дифференцируема $p+1$ раз справа в точке a и что $f \in D^p(a, b')$ для некоторого $b' > a$, поэтому

$$g^{(p)}(x) = f^{(p)}(x) \tag{4}$$

для всех $x \in (a, \min\{b', b\})$ в силу равенства (2). Из равенств (1), (3) и (4) вытекает, что $g^{(p)}(x) = r_p(x)$ для всех $x \in [a, \min\{b', b\})$, а следовательно,

$$(g^{(p)})'_+(a) = (r_p)'_+(a) \overset{\text{Опр. } 3}{=:} f_+^{(p+1)}(a). \tag{5}$$

Также из формулы (2) вытекает равенство

$$g^{(p)}(x) \coloneqq \sum_{m=p}^{k} \frac{f_+^{(m)}(a)}{(m-p)!}(x-a)^{m-p}, \tag{6}$$

для всех $x \in (a', a)$, из которого в силу (3) по определению получаем равенство $(g^{(p)})'_-(a) = f_+^{(p+1)}(a)$, что в силу (5) влечёт равенство $(g^{(p)})'(a) = f_+^{(p+1)}(a)$ (см. замечание 1.1 об односторонних производных). Так как $g^{(p+1)} \coloneqq (g^{(p)})'$, то равенство (3) проверено для всех $p \in \overline{0,k}$ по индукции, а следовательно, $g \in D^k(a)$. ◀

Замечание 5. Утверждение 1.3 является частным случаем утверждения 1 при $k = 1$.

Определение 4 (классов C^k). Для произвольного множества $\Omega \subset \mathbb{R}$ при $k \in \mathbb{N}_0$ обозначим $C^k(\Omega)$ класс всех функций $f \in D^k(\Omega)$ таких, что $f^{(k)} \in$ $\in C(\Omega)$. Также по определению положим $C^\infty(\Omega) \coloneqq \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$ и отметим, что $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Функции из классов C^k при $k \geqslant 1$ принято называть ***гладкими*** (порядка k), а функции из класса $C^\infty(\Omega)$ — ***бесконечно гладкими***.

Замечание 6 (о многократной дифференцируемости на промежутках). Для *невырожденных* отрезков и полуинтервалов I (см. определение 1.4.4) через $D^k(I)$ в литературе часто обозначают класс всех функций, k раз дифференцируемых на $\operatorname{int}(I)$, k раз дифференцируемых справа в левых граничных точках и k раз дифференцируемых слева в правых граничных точках, принадлежащих I. При этом k-ой производной функции $f \in D^k(I)$ в левых граничных точках a и в правых граничных точках b, принадлежащих промежутку I, называют соответственно $f_+^{(k)}(a)$ и $f_-^{(k)}(b)$ (см. определение 3), а класс всех таких функций, у которых k–ая производная (по новому определению) непрерывна на I, обозначают $C^k(I)$. Утверждение 1 позволяет нам не вводить подобных определений и всюду в этом курсе пользоваться только определениями 2 и 4, не теряя при этом общности.

Утверждение 2. *Для любого множества Ω и любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$C^k(\Omega) \subset D^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega).$$

Доказательство. Пусть $f \in D^k(\Omega)$ и $x_0 \in \Omega$. Так как $f^{(k-1)} \in D(x_0)$, то функция $f^{(k-1)}$ определена в $O_\delta(x_0)$ для некоторого $\delta > 0$ и непрерывна в точке x_0 по утверждению 1.2 о непрерывности дифференцируемой функции, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что

$$f^{(k-1)}\big(O_\delta(x_0)\big) \subset O_\varepsilon\big(f^{(k-1)}(x_0)\big).$$

Отсюда и подавно

$$f^{(k-1)}\big(O_\delta(x_0) \cap \Omega\big) \subset O_\varepsilon\big(f^{(k-1)}(x_0)\big),$$

что, в силу произвольности $x_0 \in \Omega$, влечёт $f^{(k-1)} \in C(\Omega)$. Таким образом, $f \in C^{k-1}(\Omega)$ по определению 3.4 классов C^k и вложение $D^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega)$ установлено. Вложение $C^k(\Omega) \subset D^k(\Omega)$ верно по определению 3.4 классов C^k. ◀

Теорема 1 [Формула Лейбница]. *Пусть $n \in \mathbb{N}_0$ и $f, g \in D^n(x_0)$. Тогда $fg \in D^n(x_0)$ и верна* ***формула Лейбница***

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x_0) g^{(k)}(x_0), \tag{7}$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты (см. определение 2.2.3).

Доказательство идейно повторяет вывод формулы бинома Ньютона (см. теорему 2.2.2 о биноме Ньютона). При $n = 0$ равенство (7) обращается в тождество $f(x_0)g(x_0) = f(x_0)g(x_0)$. Пусть теорема верна для некоторого $n \in \mathbb{N}_0$ и $f, g \in D^{n+1}(x_0)$. Из этого предположения вытекает, что формула (7) верна при замене x_0 на произвольное число x, для которого её *правая часть определена*, что в силу дифференцируемости в точке x_0 всех функций $f^{(n-k)}$, $g^{(k)}$, входящих в правую часть, влечёт дифференцируемость функции $(fg)^{(n)}$ в точке x_0 по теореме 1.4 об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями, то есть $fg \in D^{n+1}(x_0)$. Используя эту теорему, а также свойство биномиальных коэффициентов (см. утверждение 2.2.2), получим

$$
\begin{gathered}
(fg)^{(n+1)}(x_0) := \Big((fg)^{(n)}\Big)'(x_0) = \\
= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)}(x_0) g^{(k)}(x_0) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x_0) g^{(k+1)}(x_0) = \\
= f^{(n+1)}(x_0) g(x_0) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)}(x_0) g^{(k)}(x_0) + \\
+ \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(n-k)}(x_0) g^{(k+1)}(x_0) + f(x_0) g^{(n+1)}(x_0) \overset{\{m = k+1\}}{=} \\
\overset{\{m = k+1\}}{=} f^{(n+1)}(x_0) g(x_0) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)}(x_0) g^{(k)}(x_0) + \\
+ \sum_{m=1}^{n} C_n^{m-1} f^{(n-m+1)}(x_0) g^{(m)}(x_0) + f(x_0) g^{(n+1)}(x_0) = \\
= f^{(n+1)}(x_0) g(x_0) + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(n-k+1)}(x_0) g^{(k)}(x_0) + \\
+ f(x_0) g^{(n+1)}(x_0) \overset{\text{Утв. } 2.2.2}{=} \\
\overset{\text{Утв. } 2.2.2}{=} f^{(n+1)}(x_0) g(x_0) + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(n-k+1)}(x_0) g^{(k)}(x_0) + f(x_0) g^{(n+1)}(x_0) = \\
= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n+1-k)}(x_0) g^{(k)}(x_0).
\end{gathered}
$$

Таким образом, формула (7) Лейбница доказана по индукции. ◀

Лемма 1. *Пусть* $k \in \mathbb{N}_0$ *и* $f, g \in C^k(\Omega)$. *Тогда:*

(а) $f + g \in C^k(\Omega)$;

(б) $fg \in C^k(\Omega)$.

Доказательство. При $k = 0$ лемма верна в силу непрерывности суммы и произведения непрерывных функций (см. теорему 3.2.3′ об арифметических операциях над непрерывными функциями). Пусть $k \in \mathbb{N}$ и лемма верна для $k - 1$. По теореме 1.4 об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями имеем равенства

$$
\begin{gathered}
(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \\
(fg)'(x) = f(x) g'(x) + g(x) f'(x)
\end{gathered}
$$

для всех $x \in \mathrm{Dom}(f') \cap \mathrm{Dom}(g')$, то есть всюду, где правые части этих равенств определены. В силу замечания 3 имеем $f', g' \in C^{k-1}(\Omega)$, а также $f, g \in C^{k-1}(\Omega)$ по утверждению 2. По предположению индукции имеем $(f+g)' \in C^{k-1}(\Omega)$, а также $fg', gf' \in C^{k-1}(\Omega)$ и $(fg)' \in C^{k-1}(\Omega)$. В силу замечания 3 это означает, что $f + g \in C^k(\Omega)$ и $fg \in C^k(\Omega)$. ◀

Теорема 2 (о композициях функций класса $\mathrm{D^k}$). *Пусть* $k \in \mathbb{N}_0$, $g \in D^k(x_0)$, $f \in D^k\big(g(x_0)\big)$. *Тогда* $f \circ g \in D^k(x_0)$.

Доказательство. При $k = 0$ утверждение теоремы тривиально, так как функция $f \circ g$ определена в точке x_0. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и теорема верна для $k - 1$. По теореме 1.3 о дифференцируемости композиции функций имеет место равенство

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x) = \big((f' \circ g)g'\big)(x) \tag{8}$$

для всех x, в которых его *правая часть определена*. Так как $f \in D^k\big(g(x_0)\big)$, то $f' \in D^{k-1}\big(g(x_0)\big)$ в силу замечания 3, также имеем $g \in D^k(x_0) \subset D^{k-1}(x_0)$. Таким образом, по предположению индукции имеем $f' \circ g \in D^{k-1}(x_0)$. Так как $g' \in D^{k-1}(x_0)$, то $(f' \circ g)g' \in D^{k-1}(x_0)$ по теореме 1 [Формула Лейбница]. В силу равенства (8) это означает, что $(f \circ g)' \in D^{k-1}(x_0)$, что равносильно $f \circ g \in D^k(x_0)$ (см. замечание 3), и теорема полностью доказана. ◀

Теорема 3 (о композициях функций класса $\mathrm{C^k}$). *Пусть* $k \in \mathbb{N}_0$, $g \in C^k(\Omega)$, $g(\Omega) \subset \Omega'$, $f \in C^k(\Omega')$. *Тогда* $f \circ g \in C^k(\Omega)$.

Доказательство. При $k = 0$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 3.2.4′ о непрерывности композиции непрерывных функций. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и теорема верна для $k - 1$. Тогда $f' \overset{\text{З. }3}{\in} C^{k-1}(\Omega')$ и $g \in C^k(\Omega) \overset{\text{Утв. }2}{\subset} C^{k-1}(\Omega)$, а следовательно, $f' \circ g \in C^{k-1}(\Omega)$ по предположению индукции. Так как $g' \overset{\text{З. }3}{\in} C^{k-1}(\Omega)$, то $(f' \circ g)g' \in C^{k-1}(\Omega)$ по лемме 1, поэтому из равенства (8) вытекает $(f \circ g)' \in C^{k-1}(\Omega)$, что равносильно $f \circ g \in C^k(\Omega)$ в силу замечания 3. ◀

Следствие 1 теорем 2 и 3. *Пусть* $k \in \mathbb{N}_0$, $g \in D^k(\Omega)$ $\big[g \in C^k(\Omega)\big]$ *и* $g(x) \neq 0$ *для всех* $x \in \Omega$. *Тогда*

$$\frac{1}{g} \in D^k(\Omega) \ \left[\frac{1}{g} \in C^k(\Omega)\right].$$

Дествительно, рассмотрев функцию

$$t \mapsto \frac{1}{t} \in C^\infty\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \subset D^k\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big),$$

получим

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{t} \circ g \in D^k(\Omega) \ \ \big[\in C^k(\Omega)\big]$$

по теореме 2 [по теореме 3]. ◀

§ 4.4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема 1. *Пусть $f'(x_0) > 0$ $[f'(x_0) < 0]$. Тогда найдётся $\delta > 0$ такое, что $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in$ $\in (x_0, x_0 + \delta)$ $\big[f(x) > f(x_0)$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)\big]$.*

Доказательство. Пусть $f'(x_0) > 0$ (случай $f'(x_0) < 0$ рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции f на -1), тогда по определению 1.3 производной найдутся $\delta_1 > 0$ и бесконечно малая в точке x_0 функция α такие, что для всех $x \in \mathring{O}_{\delta_1}(x_0)$ выполнено

$$f(x) - f(x_0) = \big(f'(x_0) + \alpha(x)\big)(x - x_0), \tag{1}$$

при этом $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f'(x_0) + \alpha(x)\big) = f'(x_0) > 0$. Это означает, что найдётся $\delta \in (0, \delta_1]$ такое, что для всех $x \in \mathring{O}_{\delta}(x_0)$ выполнено неравенство $f'(x_0) + \alpha(x) > 0$, а значит, и равенство

$$\operatorname{sgn}\big(f(x) - f(x_0)\big) = \operatorname{sgn}(x - x_0),$$

что и завершает доказательство теоремы. ◀

Определение 1. Точка $x_0 \in \operatorname{Dom}(f)$ называется ***точкой (строгого) локального минимума функции*** f, если существует $\delta > 0$ такое, что $f(x_0) \leqslant f(x)$ $\big(f(x_0) < f(x)\big)$ для всех $x \in \mathring{O}_{\delta}(x_0) \cap \operatorname{Dom}(f)$.

Определение 2. Точка $x_0 \in \operatorname{Dom}(f)$ называется ***точкой (строгого) локального максимума функции*** f, если существует $\delta > 0$ такое, что $f(x_0) \geqslant f(x)$ $\big(f(x_0) > f(x)\big)$ для всех $x \in \mathring{O}_{\delta}(x_0) \cap \operatorname{Dom}(f)$.

Определение 3. Точки x_0, указанные в определениях 1 и 2, называются ***точками экстремума функции*** f.

Теорема 2 (о необходимом условии экстремума [Лемма Ферма]). *Если функция f дифференцируема в точке x_0 экстремума, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 из неравенства $f'(x_0) > 0$ или $f'(x_0) < 0$ вытекает, что точка x_0 не является точкой экстремума. Это и означает, что $f'(x_0) = 0$. ◀

Теорема 3 (Дарбу). *Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in D[a,b]$. Тогда для любого числа y, лежащего между числами $f'(a)$ и $f'(b)$, найдётся точка $\xi \in$ $\in (a,b)$ такая, что $f'(\xi) = y$.*

Доказательство. Для начала рассмотрим случай, когда $f'(a)f'(b) < 0$ и докажем существование точки $\xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$. Пусть $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$ (случай $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$ рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции f на -1). Так как $f \in D[a,b] \overset{\text{С. 1}}{\subset} C[a,b]$, по теореме 3.2.5 [Вторая теорема Вейерштрасса] найдётся точка $\xi \in [a,b] : f(\xi) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, при этом $\xi \neq a$ и $\xi \neq b$ по теореме 1, а значит, $\xi \in (a,b)$. Из теоремы 2 о необходимом условии экстремума [Лемма Ферма] вытекает, что $f'(\xi) = 0$.

Общий случай сводится к уже рассмотренному при помощи функции $F(x) :=$ $:= f(x) - yx$. Так как $F'(a)F'(b) = (f'(a) - y)(f'(b) - y) < 0$, то по доказанному выше найдётся точка $\xi \in (a,b)$, для которой $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - y$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Теорема 4 (Ролля). *Пусть*

1) $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$;

2) *функция f дифференцируема на интервале (a,b) и непрерывна во всех конечных точках отрезка $[a,b] \subset \overline{\overline{\mathbb{R}}}$;*

3) $f(a) = f(b) =: y \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *где под $f(\pm\infty)$ понимается $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.*

Тогда найдётся точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. В силу замечания 1.3.4 существуют $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) =: M \in$ $\in (-\infty, +\infty]$ и $\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x) =: m \in [-\infty, +\infty)$. Если $M = m =: c$, то $c \in \mathbb{R}$, $f(x) \equiv c$ при $x \in (a,b)$ и $f'(\xi) = 0$ для всех $\xi \in (a,b)$. Если $M \neq m$, то $M \neq y$ или $m \neq y$. Пусть $M \neq y$ (случай $m \neq y$ рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции f на -1). По определению супремума найдётся последовательность $x_n \in (a,b) : f(x_n) \to M$, из которой по теореме 6.2 Больцано–Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to \xi \in [a,b]$. Из условия теоремы и определений 1.2′, 2.1′ Гейне вытекает, что если $\xi = a$ или $\xi = b$, то $M = y$. Таким образом, $\xi \in (a, b)$ и $f(\xi) = M$ по определению 2.1′ Гейне, а значит, $M = \max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ и $f'(\xi) = 0$ по теореме 2 о необходимом условии экстремума [Лемма Ферма]. ◀

Теорема 5 (Коши). *Пусть*

1) $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$;

2) *функции* f *и* g *дифференцируемы на интервале* (a, b) *и непрерывны во всех конечных точках отрезка* $[a, b] \subset \overline{\overline{\mathbb{R}}}$;

3) $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x \in (a, b)$;

4) *в случае* $a = -\infty$ *существуют* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =: f(a) \in \mathbb{R}$ *и* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) =:$ $=: g(a) \in \mathbb{R}$; *в случае* $b = +\infty$ *существуют* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =: f(b) \in \mathbb{R}$ *и* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =: g(b) \in \mathbb{R}$.

Тогда найдётся точка $\xi \in (a, b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию F, определённую во всех *конечных* точках $x \in [a, b]$ равенством

$$F(x) := \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x).$$

Так как $F(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = F(b)$, то функция F удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ всем условиям теоремы 4 Ролля, а значит, существует $\xi \in (a, b)$:

$$0 = F'(\xi) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(\xi) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(\xi).$$

Из этого равенства с учётом того, что $g(a) \neq g(b)$ по условию 3) и теореме 4 Ролля, получим равенство (2). ◀

Теорема 6 (Лагранжа). *Пусть* $-\infty < a < b < +\infty$ *и* $f \in D(a, b) \cap C[a, b]$, *тогда найдётся точка* $\xi \in (a, b)$ *такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{3}$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 5 Коши при $g(x) := x$. ◀

Замечание 1. Если в теоремах Коши и Лагранжа поменять обозначения a и b местами (то есть в случае $b < a$), то формулы (2) и (3), очевидно, останутся верными. При этом $\xi \in (b, a)$.

Замечание 2. Если функция f дифференцируема на *отрезке*, соединяющем точки x и $x+h$, то из теоремы 6 Лагранжа вытекает существование $\theta \in (0,1)$, для которого выполнено равенство

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+\theta h)h.$$

В случае $h = 0$ в качестве θ можно взять любое число, например $\theta = 1/2$.

Следствие 1 теоремы Лагранжа. *Пусть I — невырожденный промежуток, $f \in D\big(\operatorname{int}(I)\big) \cap C(I)$ и $f'(x) \equiv 0$ для всех $x \in \operatorname{int}(I)$* (см. определение 1.4.4), *тогда $f(x) \equiv const$ для всех $x \in I$.*

Доказательство. Зафиксировав произвольную точку $x_0 \in I$, получим

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) = f(x_0) + 0(x - x_0) = f(x_0)$$

для всех $x \in I \setminus \{x_0\}$ по теореме 6 Лагранжа в силу того, что $\xi \in \operatorname{int}(I)$. ◀

Следствие 2 теоремы Лагранжа. *Пусть I — невырожденный промежуток и $f \in D\big(\operatorname{int}(I)\big) \cap C(I)$. Тогда*
$f'(x) \geqslant 0$ $\big[f'(x) \leqslant 0\big]$ для всех $x \in \operatorname{int}(I)$ $\iff$ f не убывает [не возрастает] на I;
$f'(x) > 0$ $\big[f'(x) < 0\big]$ для всех $x \in \operatorname{int}(I)$ $\implies$ f возрастает [убывает] на I.

Доказательство.

Если f не убывает на I, то по теореме 1 не может существовать точки $x \in \operatorname{int}(I)$ такой, что $f'(x) < 0$. Если $f'(x) \geqslant 0$ [$f'(x) > 0$] для всех $x \in \operatorname{int}(I)$, то по теореме 6 Лагранжа для всех $x_1, x_2 \in I$ при $x_1 < x_2$ найдётся $\xi \in \operatorname{int}(I)$ такое, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant [>]\ 0,$$

поэтому функция f не убывает [возрастает] на I.

Случай невозрастающей [убывающей] функции f рассматривается аналогично (или сводится к предыдущему умножением функции f на -1). ◀

Утверждение 1. *Пусть I — невырожденный промежуток, $f \in D\big(\operatorname{int}(I)\big) \cap C(I)$ и $|f'(x)| \leqslant M$ при некотором $M > 0$ для всех $x \in \operatorname{int}(I)$* (см. определение 1.4.4). *Тогда функция f равномерно непрерывна* (см. определение 3.9.1) *на I.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по теореме 6 Лагранжа получим

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| \leqslant M\delta < \varepsilon$$

для всех $x_1, x_2 \in I$ таких, что $0 < |x_1 - x_2| < \delta := \varepsilon/M$. Таким образом, функция f равномерно непрерывна на I по определению 3.9.1 равномерной непрерывности. ◀

Теорема 7 (Бернулли [Правило Лопиталя]). *Пусть*

1) $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $c \in \{a, b\}$ *и* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$;

2) $f, g \in D(a, b)$;

3) $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x \in (a, b)$;

4) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Кроме того, пусть выполнено одно из следующих условий:

5а) $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \pm\infty$;

5б) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$.

Тогда

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Доказательство. Пусть выполнено условие 5а). Рассмотрим случай $A \in \mathbb{R}$ (случаи $A = \pm\infty$ рассматриваются аналогично). Пусть $\varepsilon > 0$. Из условия 4) вытекает существование $\delta_0 > 0$ такого, что

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $t \in (a, b) \cap O_{\delta_0}(c)$. Зафиксируем *произвольное* $y_0 \in (a, b) \cap O_{\delta_0}(c)$. По теореме 5 Коши имеем

$$\left| \frac{f(x) - f(y_0)}{g(x) - g(y_0)} - A \right| \overset{\text{т. 5}}{=} \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $x \in (a, b) \cap O_{\delta_0}(c) \setminus \{y_0\}$ $\big($ибо точка ξ, определяемая теоремой 5 Коши, лежит между точками x и y_0 и принадлежит множеству $(a, b) \cap O_{\delta_0}(c)\big)$, что равносильно

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x) - f(y_0)}{g(x) - g(y_0)} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$, то найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\left| \frac{g(y_0)}{g(x)} \right| < 1$$

для всех $x \in (a, b) \cap O_{\delta_1}(c)$. Таким образом, получим

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(y_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{g(y_0)}{g(x)}} < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$a(x) := \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y_0)}{g(x)}\right) + \frac{f(y_0)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \\ < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y_0)}{g(x)}\right) + \frac{f(y_0)}{g(x)} =: b(x)$$

для всех $x \in (a, b) \cap O_{\delta_0}(c) \cap O_{\delta_1}(c)$ (отметим, что аналогичные преобразования использовались при доказательстве теоремы 2.4.1 Штольца). Так как y_0 фиксировано, имеем

$$\lim_{x \to c} \frac{f(y_0)}{g(x)} = 0, \lim_{x \to c} \frac{g(y_0)}{g(x)} = 0.$$

Из арифметических свойств 3.1.3 предела функции вытекает, что

$$\lim_{x \to c} a(x) = A - \frac{\varepsilon}{2}, \ \lim_{x \to c} b(x) = A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует существование чисел $\delta_2, \delta_3 > 0$ таких, что $A - \varepsilon < a(x)$ при всех $x \in (a, b) \cap O_{\delta_2}(c)$ и $b(x) < A + \varepsilon$ при всех $x \in (a, b) \cap O_{\delta_3}(c)$. Таким образом, имеем

$$A - \varepsilon < a(x) < \frac{f(x)}{g(x)} < b(x) < A + \varepsilon$$

для всех $x \in (a, b) \cap O_\delta(c)$, где $O_\delta(c) := O_{\delta_0}(c) \cap O_{\delta_1}(c) \cap O_{\delta_2}(c) \cap O_{\delta_3}(c)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

что и завершает доказательство теоремы в случае 5а).

Пусть выполнено условие 5б). Если $c \in \mathbb{R}$, то доопределим функции f и g в точке c по непрерывности: $f(c) := 0$ и $g(c) := 0$ (если $c = \pm\infty$, то ничего доопределять не надо). Тогда для всех $x \in (a, b)$ по теореме 5 Коши имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \overset{\text{т. 5}}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

где точка $\xi = \xi(x)$ лежит между точками x и c. Так как $\lim\limits_{x \to c} \xi(x) = c$, то

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'\big(\xi(x)\big)}{g'\big(\xi(x)\big)} = A$$

по теореме 3.1.4 о пределе композиции, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 3. При выполнении условий теоремы 7 Бернулли из существования

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)},$$

вообще говоря, не следует существование

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно взять $f(x) := \sin x$, $g(x) := x$ и $c := +\infty$.

Пример 1. Применим правило Лопиталя с условием 5а) для нахождения предела

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin(\ln x)}{e^x} \overset{\text{т. }7}{=} \frac{\sin(\ln x)+\cos(\ln x)}{e^x} = 0,$$

так как числитель последней дроби ограничен, а $e^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Следствие 3 теоремы 7 Бернулли. *Пусть функция f непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, $f \in D\big(\mathring{O}_\delta(x_0)\big)$ для некоторого $\delta > 0$ и*

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = A \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Тогда

$$f'(x_0) = A. \tag{5}$$

Действительно,

$$f'_\pm(x_0) := \lim_{x\to x_0\pm}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{\text{т. }7}{=} \lim_{x\to x_0\pm}\frac{f'(x)}{1} \overset{(4)}{=} A,$$

отсюда и следует равенство (5) в силу замечания 1.1 об односторонних производных. ◀

Теорема 8 (о дифференцируемой обратной функции). *Пусть на некотором невырожденном промежутке I_x определена функция $f\colon I_x \to \mathbb{R}$, при некотором $k \in \mathbb{N}$ выполнено $f \in D^k\big(\mathrm{int}(I_x)\big) \cap C(I_x)$ и $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathrm{int}(I_x)$* (см. определение 1.4.4). *Тогда:*

(а) *$f(I_x) = I_y$, где I_y — невырожденный промежуток;*

(б) *существует обратная* (см. определение 0.5.12) *строго монотонная функция $f^{-1} : I_y \to I_x$;*

(в) *$f^{-1} \in D^k\big(\mathrm{int}(I_y)\big) \cap C(I_y)$ и $\big(f^{-1}\big)'(y) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$ для всех $y \in \mathrm{int}(I_y)$.*

Доказательство. Пусть $k=1$. Из теоремы 3 Дарбу вытекает, что либо $f'(x)>0$ для всех $x \in \operatorname{int}(I_x)$, либо $f'(x) < 0$ для всех $x \in \operatorname{int}(I_x)$. По следствию 2 теоремы Лагранжа это означает строгую монотонность функции f на I_x. Так как $f \in C(I_x)$, то из теоремы 3.3.3 о непрерывной обратной функции на промежутке следуют утверждения (а) и (б), а также непрерывность функции f^{-1} на промежутке $I_y = f(I_x)$. Далее для любой точки $y \in \operatorname{int}(I_y)$ из леммы 3.3.2 вытекает $f^{-1}(y) \in \operatorname{int}(I_x)$, поэтому в силу теоремы 3.1.3 об арифметических свойствах предела и теоремы 3.1.4 о пределе композиции функций получим

$$\frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} := \frac{1}{\lim\limits_{x\to f^{-1}(y)} \dfrac{f(x)-f\big(f^{-1}(y)\big)}{x-f^{-1}(y)}} \overset{\text{Т. 3.1.3}}{=} \lim_{x\to f^{-1}(y)} \frac{x-f^{-1}(y)}{f(x)-y} \overset{\text{Т. 3.1.4 и 3.3.3}}{=}$$

$$\overset{\{x=f^{-1}(t)\to f^{-1}(y)\}}{=} \lim_{t\to y} \frac{f^{-1}(t)-f^{-1}(y)}{f\big(f^{-1}(t)\big)-y} = \lim_{t\to y} \frac{f^{-1}(t)-f^{-1}(y)}{t-y} =: \big(f^{-1}\big)'(y),$$

а следовательно, $f^{-1} \in D\big(\operatorname{int}(I_y)\big)$.

Пусть $k \geqslant 2$ и теорема верна для $k-1$. Так как $f \in D^k\big(\operatorname{int}(I_x)\big) \subset$ $\subset D^{k-1}\big(\operatorname{int}(I_x)\big)$, то в силу предположения индукции для доказательства теоремы осталось проверить, что $f^{-1} \in D^k\big(\operatorname{int}(I_y)\big)$. Так как $f' \in D^{k-1}\big(\operatorname{int}(I_x)\big)$, то по следствию 3.1 имеем

$$\frac{1}{f'} \in D^{k-1}\big(\operatorname{int}(I_x)\big).$$

Так как $f^{-1} \in D^{k-1}\big(\operatorname{int}(I_y)\big)$ по предположению индукции и $f^{-1}\big(\operatorname{int}(I_y)\big) \subset$ $\subset \operatorname{int}(I_x)$, то по теореме 3.2 о композициях функций класса $\mathbf{D^k}$ имеем

$$\frac{1}{f'} \circ f^{-1} \in D^{k-1}\big(\operatorname{int}(I_y)\big),$$

причём эта функция совпадает с $\big(f^{-1}\big)'$ на интервале $\operatorname{int}(I_y)$ (нетрудно проверить, что эти функции вообще *равны*, см. замечание 0.5.4 о равенстве функций), а следовательно, $\big(f^{-1}\big)' \in D^{k-1}\big(\operatorname{int}(I_y)\big)$. По определению 3.2 имеем

$$f^{-1} \in D^k\big(\operatorname{int}(I_y)\big). \qquad \blacktriangleleft$$

Замечание 4. Если при выполнении условий теоремы 8 о дифференцируемой обратной функции под производными функций f, f^{-1} в граничных точках промежутков I_x, I_y понимать соответствующие *односторонние производные* (правые в левых граничных и левые в правых граничных точках), то формула

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$$

остаётся верной также в граничных точках y промежутка I_y, если выполнено естественное условие $f'\big(f^{-1}(y)\big) \neq 0$. При этом её доказательство дословно повторяет соответствующее доказательство для случая $y \in \operatorname{int}(I_y)$, приведённое выше.

Замечание 5. Из теоремы 3.3 о композициях функций класса C^{k} вытекает, что теорема 8 о дифференцируемой обратной функции остаётся в силе при замене $D^k\big(\operatorname{int}(I_x)\big)$ и $D^k\big(\operatorname{int}(I_y)\big)$ на $C^k\big(\operatorname{int}(I_x)\big)$ и $C^k\big(\operatorname{int}(I_y)\big)$ соответственно.

Теорема 9. *Существуют*

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6}$$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{7}$$

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} \tag{8}$$

$$\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \tag{9}$$

во всех точках x, внутренних (см. определение 1.4.4) *для области определения соответствующей функции.*

Доказательство. По теореме 8 о дифференцируемой обратной функции для всех $x \in (-1, 1)$ имеем

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} \overset{\text{т. } 1.2}{=} \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

и равенство (6) установлено. По той же теореме для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} \overset{\text{т. } 1.2}{=} \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2},$$

и равенство (8) установлено. Равенства (7) и (9) вытекают соответственно из равенств (6) и (8) с учётом равенств

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

и теоремы 1.4 об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями. ◀

§ 4.5. О производных простейшей неявно заданной функции

Определение 1 (плоской кривой). Для *произвольных функций* $x, y\colon \Omega \to$ $\to \mathbb{R}$ их *упорядоченную пару* $\gamma := (x, y)$ называют ***параметризованной плоской кривой***, а множество $G_\gamma := \big\{\big(x(t), y(t)\big) : t \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^2$ — ***следом*** (***носителем***) кривой γ (см. далее общее определение 8.1.1).

Пусть на некотором *невырожденном промежутке* I_t (см. определение 1.4.4) определена функция $x\colon I_t \to \mathbb{R}$ такая, что $x \in D\big(\mathrm{int}(I_t)\big) \cap C(I_t)$ и $x'(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathrm{int}(I_t)$. По теореме 4.8 о дифференцируемой обратной функции на невырожденном промежутке $I_x := x(I_t)$ определена строго монотонная обратная функция $x^{-1}\colon I_x \to I_t$, $x^{-1} \in D\big(\mathrm{int}(I_x)\big) \cap C(I_x)$. Рассмотрим *произвольную функцию* y и *параметризованную кривую* $\gamma := (x\big|_\Omega, y\big|_\Omega)$, где $\Omega := I_t \cap \mathrm{Dom}(y)$. Определим функцию

$$g := y \circ x^{-1}. \tag{1}$$

Из определения функции g вытекает, что $\mathrm{Dom}(g) \subset I_x$ и $G_\gamma = \big\{\big(h, g(h)\big) : h \in \mathrm{Dom}(g)\big\}$, то есть *след параметризованной кривой* γ в рассматриваемом случае является *графиком функции* g *одной переменной*. При этом говорят, что функция g задана ***неявно***.

Теорема 1. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, на некотором невырожденном промежутке I_t определена функция $x\colon I_t \to \mathbb{R}$, $x \in D^k\big(\mathrm{int}(I_t)\big) \cap C(I_t)$ и $x'(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathrm{int}(I_t)$. Пусть определена функция $y \in D^k\big(\mathrm{int}(I_t)\big)$. Тогда для функции g, определённой равенством* (1)*, выполнено*

$$g \in D^k\big(\mathrm{int}(I_x)\big),$$

где $I_x := x(I_t)$. При дополнительном условии $y \in C(I_t)$ имеем $g \in C(I_x)$.

Доказательство. По теореме 4.8 о дифференцируемой обратной функции на невырожденном промежутке $I_x = x(I_t)$ определена строго монотонная обратная функция $x^{-1}\colon I_x \to I_t$, $x^{-1} \in D^k\big(\mathrm{int}(I_x)\big) \cap C(I_x)$. Из леммы 3.3.2 вытекает, что $x^{-1}\big(\mathrm{int}(I_x)\big) \subset \mathrm{int}(I_t)$, поэтому из условий $x^{-1} \in D^k\big(\mathrm{int}(I_x)\big)$ и $y \in D^k\big(\mathrm{int}(I_t)\big)$ по теореме 3.2 о композициях функций класса $\mathbf{D^k}$ имеем $g \in D^k\big(\mathrm{int}(I_x)\big)$. Так как $x^{-1} \in C(I_x)$, то из условия $y \in C(I_t)$ по теореме 3.2.4′ о непрерывности композиции непрерывных функций имеем $g \in C(I_x)$. ◀

Определение 2. Пусть функция x удовлетворяет условиям теоремы 1 и $n \in$ $\in \mathbb{N}_0$. Для любой функции y определим функцию

$$y_x^{(n)} := g^{(n)} \circ x, \tag{2}$$

где функция g определяется равенством (1).

Теорема 2. *Пусть функции x и y удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда* $\operatorname{Dom}\big(y_x^{(n)}\big) = \operatorname{int}(I_t)$, $y_x^{(n)} \in D^{k-n}\big(\operatorname{int}(I_t)\big)$ *и выполнены равенства функций* (см. замечание 0.5.4)

$$y'_x = \frac{y'}{x'}, \tag{3}$$

$$y_x^{(n)} = \big(y_x^{(n-1)}\big)'_x \tag{4}$$

при всех $n \in \overline{1,k}$.

Доказательство. Так как $\operatorname{Dom}(g) \subset I_x$, то $\operatorname{Dom}(g^{(n)}) \subset \operatorname{int}(I_x)$, а следовательно, $\operatorname{Dom}(g^{(n)}) = \operatorname{int}(I_x)$ для всех $n \in \overline{1,k}$ в силу теоремы 1. В силу строгой монотонности и непрерывности функций x и x^{-1} (см. доказательство теоремы 4.8 о дифференцируемой обратной функции) из леммы 3.3.2 вытекает, что $x\big(\operatorname{int}(I_t)\big) \subset \operatorname{int}(I_x)$, а также $x^{-1}\big(\operatorname{int}(I_x)\big) \subset \operatorname{int}(I_t)$ и $x\big(I_t \backslash \operatorname{int}(I_t)\big) \subset I_x \backslash \operatorname{int}(I_x)$. Это означает, что $\operatorname{Dom}\big(y_x^{(n)}\big) = \operatorname{int}(I_t)$ при всех $n \in \overline{1,k}$. Поскольку для любого $t_0 \in \operatorname{int}(I_t)$ имеем $x_0 := x(t_0) \in \operatorname{int}(I_x)$, то по теореме 4.8 о дифференцируемой обратной функции и теореме 1.3 о дифференцируемости композиции функций имеем существование

$$y'_x(t_0) \overset{(2)}{:=} g'(x_0) \overset{(1)}{:=} \big(y \circ x^{-1}\big)'(x_0) \overset{\text{Т. } 4.8,\ \text{Т. } 1.3}{=} \frac{y'\big(x^{-1}(x_0)\big)}{x'\big(x^{-1}(x_0)\big)} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)},$$

что и завершает проверку равенства (3), так как областью определения его правой части также является $\operatorname{int}(I_t)$. Так как $x', y' \in D^{k-1}\big(\operatorname{int}(I_t)\big)$, то по следствию 3.1 имеем

$$\frac{1}{x'} \in D^{k-1}\big(\operatorname{int}(I_t)\big)$$

и

$$y'_x \overset{(3)}{=} \frac{1}{x'}y' \overset{\text{Т. } 3.1}{\in} D^{k-1}\big(\operatorname{int}(I_t)\big). \tag{5}$$

Для проверки равенства (4) запишем цепочку равенств

$$y_x^{(n)} \overset{(2)}{=} g^{(n)} \circ x = \big(g^{(n-1)}\big)' \circ x = \big(g^{(n-1)} \circ (x \circ x^{-1})\big)' \circ x \overset{\text{Утв. } 0.5.1}{=}$$
$$\overset{\text{Утв. } 0.5.1}{=} \big((g^{(n-1)} \circ x) \circ x^{-1}\big)' \circ x \overset{(2)}{=} \big(y_x^{(n-1)} \circ x^{-1}\big)' \circ x \overset{(1),(2)}{=} \big(y_x^{(n-1)}\big)'_x.$$

Из (4) и (5) по индукции получаем, что $y_x^{(n)} \in D^{k-n}\big(\operatorname{int}(I_t)\big)$ при всех $n \in$ $\in \overline{1,k}$. ◀

Следствие 1 теоремы 2. *Пусть функции x и y удовлетворяют условиям теоремы 1 при $k \geqslant 2$. Тогда*

$$y''_x \overset{(4)}{=} (y'_x)'_x \overset{(3)}{=} \frac{(y'_x)'}{x'} \overset{(3)}{=} \frac{\left(\dfrac{y'}{x'}\right)'}{x'} \overset{\text{Т. } 1.4}{=} \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}.$$

Замечание 1. В случае, когда имеется множество невырожденных промежутков I_t^m с непересекающимися внутренностями (а следовательно это не более чем счётное множество), на каждом из которых функция x удовлетворяет условиям теоремы 4.8 о дифференцируемой обратной функции, мы получим множество различных функций g_m, определённых, вообще говоря, на *пересекающихся* промежутках I_x^m. При $t \in I_t^m$ величины $y_x^{(n)}(t)$ являются производными порядка n соответствующей функции g_m (то есть номер m зависит от t) в точке $x(t)$, могут быть вычислены по явным формулам (3), (4) и являются крайне полезным инструментом исследования следа кривой γ в целом. Именно поэтому в определении 2 фигурирует функция $g^{(n)} \circ x$, а не просто $g^{(n)}$.

Утверждение 1 (о касательной к следу параметризованной кривой). *Пусть функции x и y удовлетворяют условиям теоремы 1 и $t_0 \in \operatorname{int}(I_t)$. Тогда след $\Omega = \big\{\big(x(t), y(t)\big) : t \in I_t\big\}$ параметризованной кривой $\gamma = (x, y)$ является графиком функции g, определённой равенством (1). Прямая l, касательная к графику функции g в точке $x_0 := x(t_0)$, называется* ***касательной прямой к следу параметризованной кривой*** *γ в точке t_0. При этом уравнение прямой l в плоскости Oxy имеет вид*

$$x'(t_0)(y - y_0) = y'(t_0)(x - x_0), \tag{6}$$

где $y_0 := y(t_0)$.

Доказательство. По определению 2.1 касательной прямой уравнение прямой l имеет вид

$$y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0) = g'\big(x(t_0)\big)(x - x_0) \overset{\text{О. 2}}{=} y'_x(t_0)(x - x_0) \overset{\text{Т. 2}}{=} \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0),$$

отсюда и вытекает равенство (6). ◀

§ 4.6. Формула Тейлора

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что $x_0 \in \mathbb{R}$ и $f \in D^k(x_0)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}_0$. Представление

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} h^m + r_k(f, x_0, h) \tag{1}$$

называется ***формулой Тейлора***, $P_k(f, x_0, h) := f(x_0) + \sum\limits_{m=1}^{k} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} h^m$ — ***многочленом Тейлора***, $r_k(f, x_0, h)$ — ***остаточным членом***.

Лемма 1. *Пусть* $k \in \mathbb{N}_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, I *— отрезок с концами* $x_0, x_0 + h$ *и* $\operatorname{int}(I)$ *— интервал с теми же концами. Пусть* $f \in D^{k+1}\big(\operatorname{int}(I)\big) \cap C^k(I)$, $g \in D\big(\operatorname{int}(I)\big) \cap C(I)$ *и* $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x \in \operatorname{int}(I)$. *Тогда остаточный член* $r_k(f, x_0, h)$ *в формуле* (1) *имеет вид*

$$r_k(f, x_0, h) = \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta h)}{k!} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{g'(x_0 + \theta h)} (1 - \theta)^k h^k, \tag{2}$$

где $\theta \in (0, 1)$.

Доказательство. Для всех $t \in I$ рассмотрим функцию

$$F(t) := f(x_0 + h) - P_k(f, t, x_0 + h - t) =$$
$$= f(x_0 + h) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x_0 + h - t) + \ldots + \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x_0 + h - t)^k \right].$$

Имеем

$$F(x_0) = r_k(f, x_0, h),\ \ F(x_0 + h) = 0, \tag{3}$$

$F \in C(I)$ и для всех $t \in \operatorname{int}(I)$ существует

$$F'(t) = -\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x_0 + h - t)^k. \tag{4}$$

Таким образом, для пары функций F, g выполнены все условия теоремы 4.5 Коши на отрезке I, поэтому для некоторого $\theta \in (0, 1)$ имеем

$$\frac{-r_k(f, x_0, h)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \overset{(3)}{=} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \overset{\text{т. }4.5}{=}$$
$$\overset{\text{т. }4.5}{=} \frac{F'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)} \overset{(4)}{=} -\frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta h)}{k! g'(x_0 + \theta h)}(h - \theta h)^k,$$

отсюда и вытекает равенство (2). ◄

Теорема 1 (Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть* $k \in \mathbb{N}_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, I *— отрезок с концами* $x_0, x_0 + h$ *и* $\operatorname{int}(I)$ *— интервал с теми же концами. Пусть* $f \in D^{k+1}\big(\operatorname{int}(I)\big) \cap C^k(I)$. *Тогда остаточный член в формуле* (1) *представим в виде*

$$r_k(f, x_0, h) = \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta h)}{(k+1)!} h^{k+1},\ \text{где}\ \theta \in (0, 1).$$

Доказательство. Рассмотрев функцию $g(t) := (x_0 + h - t)^{k+1}$, получим, что пара f, g удовлетворяет всем условиям леммы 1. Записывая для такой функции g равенство (2), получим

$$r_k(f, x_0, h) = \frac{f^{(k+1)}(x_0+\theta h)}{k!} \frac{0 - h^{k+1}}{-(k+1)(h-\theta h)^k}(h-\theta h)^k = \frac{f^{(k+1)}(x_0+\theta h)}{(k+1)!}h^{k+1},$$

что и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 1. Теорема 4.6 Лагранжа является частным случаем теоремы 1 Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа при $k = 0$.

Замечание 2. Используя в лемме 1 функцию $g(t) := |x_0+h-t|^p$ при $\mathbb{R} \ni p > 0$, получим остаточный член в форме ***Шлёмильха-Роша***:

$$r_k(f, x_0, h) = \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta h)}{k!p} \frac{(1-\theta)^{k+1}}{(1-\theta)^p} h^{k+1}.$$

При $p = 1$ он называется остаточным членом в форме ***Коши***, а при $p = k + 1$ совпадает с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 2 (Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $f \in D^k(x_0)$. Тогда остаточный член $r_k(f, x_0, \cdot)$ в формуле (1) определён в некоторой окрестности $O_\delta(0)$ и может быть представлен в виде $r_k(f, x_0, h) = o(h^k)$ при $h \to 0$.*

Доказательство проведём по индукции. При $k = 1$ теорема верна по определению 1 дифференцируемой функции. Пусть $k \geqslant 2$ и теорема верна для $k - 1$. Для функции $\varphi(h) := r_k(f, x_0, h) = f(x_0 + h) - P_k(f, x_0, h)$ имеем $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(h) - \varphi(0) = r_k(f, x_0, h)$. Из условия $f \in D^k(x_0)$ вытекает существование $\delta > 0$ такого, что $f \in D^{k-1}\big(O_\delta(x_0)\big)$, а следовательно, $\varphi \in D^{k-1}\big(O_\delta(0)\big)$ по теореме 3.2 о композициях функций класса $\mathbf{D^k}$, так как функция $h \mapsto x_0 + h$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$. Так как $f' \in D^{k-1}(x_0)$ и $k - 1 \geqslant 1$, то для всех $h \in O_\delta(0)$ существует

$$\varphi'(h) = f'(x_0 + h) - \left[f'(x_0) + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{m!} h^m\right] = r_{k-1}(f', x_0, h) = o(h^{k-1})$$

при $h \to 0$ по предположению индукции. В силу последнего равенства по теореме 4.6 Лагранжа для всех $h \in O_\delta(0)$ получим

$$r_k(f, x_0, h) = \varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\theta h)h =$$
$$= o(\theta^{k-1}h^{k-1})h = o\big(O(h^{k-1})\big)h = o(h^{k-1})h = o(h^k),$$

так как $\theta = \theta(h) \in (0, 1)$. Теорема доказана по индукции. ◀

Теорема 3 (единственности представления функции многочленом с остатком в форме Пеано). *Пусть x_0 — предельная точка для множества* $\mathrm{Dom}(f)$ *и*

$$f(x_0+h) = P_k(h) + o(h^k),\ \ f(x_0+h) = Q_k(h) + o(h^k)$$

при $h \to 0$, где $P_k(h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_k h^k$, $Q_k(h) = b_0 + b_1 h + \ldots + b_k h^k$ — многочлены степени не выше $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда $P_k = Q_k$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$R_k(h) \coloneqq P_k(h) - Q_k(h) = c_0 + c_1 h + \ldots + c_k h^k$$

степени не выше k, где $c_m = a_m - b_m$ при $m \in \overline{0,k}$. Заметим, что имеет место равенство $R_k(h) = o(h^k)$ при всех h таких, что $x_0 + h \in \mathrm{Dom}(f)$, а значит, для всех таких h получим

$$c_0 = o(h^k) - c_1 h - \ldots - c_k h^k \to 0$$

при $h \to 0$, поэтому $c_0 = 0$. Далее

$$c_1 = \frac{o(h^k)}{h} - c_2 h - \ldots - c_k h^{k-1} = o(h^{k-1}) - c_2 h - \ldots - c_k h^{k-1} \to 0$$

при $h \to 0$, поэтому $c_1 = 0$. Действуя по индукции, получим $c_m = 0$, а следовательно, и $a_m = b_m$ для всех $m \in \overline{0,k}$. Это и означает, что $P_k = Q_k$. ◀

Утверждение 1 [В представление чётной (нечётной) функции $f(x)$ в окрестности нуля многочленом с остатком в форме Пеано входят лишь чётные (нечётные) степени x]. *Пусть функция f чётна (нечётна), 0 — предельная точка для множества* $\mathrm{Dom}(f)$, *$k \in \mathbb{N}_0$ и*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k + o(x^k)$$

при $x \to 0$. Тогда $c_{2m+1} = 0$ ($c_{2m} = 0$) для всех $m \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Пусть функция f чётна (случай нечётной функции рассматривается аналогично), то есть $f(x) = f(-x)$ для всех $x \in \mathrm{Dom}(f)$ и верны равенства

$$f(-x) = c_0 - c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + (-1)^k c_k x^k + o(x^k),$$

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = c_0 + c_2 x^2 + \ldots + c_{2p} x^{2p} + o(x^k),$$

где $p \in \mathbb{N}_0$, $2p \leqslant k$. По теореме 3 единственности представления функции многочленом с остатком в форме Пеано это и означает, что $c_1 = c_3 = \ldots$ $\ldots = 0$. ◀

Пример 1. В силу равенства $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$ по индукции убеждаемся, что $\operatorname{arctg} \in C^\infty(\mathbb{R})$. По формуле суммы геометрической прогрессии имеем равенство

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(-1)^k x^{2k+2}}{1+x^2} = O(x^{2k+2}) = o(x^{2k})$$

при $x \to 0$, поэтому

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^k x^{2k} + o(x^{2k}).$$

В силу теоремы 2 Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и теоремы 3 единственности представления функции многочленом с остатком в форме Пеано получим, что

$$\frac{\operatorname{arctg}^{(2m+1)}(0)}{(2m)!} = (-1)^m$$

при $m \in \mathbb{N}_0$, а также

$$\operatorname{arctg}^{(2m)}(0) = 0.$$

Отсюда по теореме 2 Тейлора с остаточным членом в форме Пеано получаем формулу

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2}).$$

Пример 2 (Коши). Рассмотрим функцию

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0; \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и докажем по индукции, что $f^{(k)}(0) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Для $k = 0$ утверждение верно по определению функции f, пусть $k \in \mathbb{N}$ и оно верно для $k-1$. По индукции легко убедиться в том, что

$$f^{(k-1)}(x) = \frac{P_1(x) e^{-\frac{1}{x^2}}}{Q_1(x)}$$

при $x \neq 0$, где P_1 и $Q_1 \neq \mathbf{0}$ — многочлены. По определению производной, так как $f^{(k-1)}(0) = 0$ по предположению индукции, имеем

$$f^{(k)}(0) := \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{P_1(x) e^{-\frac{1}{x^2}}}{x Q_1(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{P_1(x) e^{-\frac{1}{x^2}}}{Q(x)},$$

где $Q(x) \coloneqq xQ_1(x)$ — многочлен. Так как $\lim\limits_{x\to 0} P_1(x) = const \in \mathbb{R}$, то нам достаточно доказать, что для произвольного многочлена $Q \neq \mathbf{0}$ выполнено

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{Q(x)} = 0. \tag{5}$$

Пусть q — *младшая степень* в многочлене Q, то есть $Q(x) = x^q\big(c_q + o(1)\big)$, где $q \in \mathbb{N}_0$ и $c_q \neq 0$. Для проверки равенства (5) нам достаточно доказать, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^q} = \lim_{x\to 0} x^q \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2q}} = 0 \tag{6}$$

для любого $q \in \mathbb{N}_0$. Для проверки последнего равенства заметим, что $\lim\limits_{x\to 0} x^q = const \in \mathbb{R}$ и что

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2q}} \overset{\{1/x^2 = t\to +\infty\}}{=} \lim_{t\to +\infty} \frac{t^q}{e^t} = 0$$

по теореме 4.7 Бернулли [Правило Лопиталя]. Таким образом, равенства (6) и (5) установлены, отсюда получаем $f^{(k)}(0) = 0$.

Отметим, что $f(x) \neq 0$ для всех $x \neq 0$ несмотря на то, что все коэффициенты её многочлена Тейлора в нуле равны нулю.

Теорема 4 (об асимптотических представлениях некоторых элементарных функций в нуле).

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + o(x^k), \tag{7}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}), \tag{8}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}), \tag{9}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^k), \tag{10}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^k), \tag{11}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+2}) \tag{12}$$

при $x \to 0$, причём o-малые во всех формулах бесконечно дифференцируемы в нуле.

Доказательство. Формулы (7)-(11) устанавливаются с помощью теоремы 2 и равенств

$$f^{(m)}(x) = e^x, \quad f^{(m)}(0) = 1 \text{ при } f(x) \coloneqq e^x;$$
$$f^{(m)}(x) = \sin\Big(x + \frac{\pi}{2}m\Big), \quad f^{(m)}(0) = \sin\Big(\frac{\pi}{2}m\Big) \text{ при } f(x) \coloneqq \sin x;$$
$$f^{(m)}(x) = \cos\Big(x + \frac{\pi}{2}m\Big), \quad f^{(m)}(0) = \cos\Big(\frac{\pi}{2}m\Big) \text{ при } f(x) \coloneqq \cos x;$$
$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{(1+x)^m},$$
$$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1}(m-1)! \text{ при } f(x) \coloneqq \ln(1+x);$$
$$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m},$$
$$f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1) \text{ при } f(x) \coloneqq (1+x)^\alpha$$

соответственно. Формула (12) была установлена в примере 1. ◀

Замечание 3. В формулах (7)–(12) все $o(x^k)$, $o(x^{2k+1})$, $o(x^{2k+2})$ могут быть заменены на $O(x^{k+1})$, $O(x^{2k+2})$, $O(x^{2k+3})$ соответственно.

§ 4.7. Исследование функций методами дифференциального исчисления

4.7.1. Достаточные условия экстремума

Теорема 1 (о достаточном условии экстремума для дифференцируемых функций). *Пусть* $f \in C\big(O_\delta(x_0)\big) \cap D\big(\mathring{O}_\delta(x_0)\big)$ *для некоторого* $\delta > 0$. *Тогда:*

(а) *если* $f'(x) < 0$ *при всех* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *и* $f'(x) > 0$ *при всех* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, *то* x_0 — *точка строгого локального минимума;*

(б) *если* $f'(x) > 0$ *при всех* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *и* $f'(x) < 0$ *при всех* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, *то* x_0 — *точка строгого локального максимума;*

(в) *если* $f'(x) < 0$ *при всех* $x \in \mathring{O}_\delta(x_0)$ *либо* $f'(x) > 0$ *при всех* $x \in \mathring{O}_\delta(x_0)$, *то в точке* x_0 *экстремума нет.*

Доказательство. Для любого $x \in \mathring{O}_\delta(x_0)$ по теореме 4.6 Лагранжа имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \tag{1}$$

где точка ξ лежит между точками x и x_0. Из равенства (1) непосредственно вытекает, что при условиях пункта (а) выполнено неравенство $f(x) - f(x_0) > 0$, а при условиях пункта (б) — неравенство $f(x) - f(x_0) < 0$ при всех $x \in \mathring{O}_\delta(x_0)$, что и означает наличие в точке x_0 строгого локального минимума или максимума соответственно (см. определения 4.1 и 4.2). В случае (в) из равенства (1) вытекает, что знак выражения $f(x) - f(x_0)$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ противоположен знаку этого выражения при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, что и означает отсутствие экстремума в точке x_0 (см. определение 4.3). ◀

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) := |x|$. Так как $f'(x) = -1 < 0$ при $x < 0$, $f'(x) = 1 > 0$ при $x > 0$ и $f \in C(\mathbb{R})$, то по пункту (а) теоремы 1 о достаточном условии экстремума для дифференцируемых функций функция f имеет в точке $x = 0$ строгий локальный минимум. Используя теорему 4.6 Лагранжа и действуя по аналогии с доказательством теоремы 1 о достаточном условии экстремума для дифференцируемых функций, получим, что $x = 0$ является точкой строгого *глобального* минимума функции f.

Теорема 2 (о достаточном условии экстремума для многократно дифференцируемых функций). *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $f \in D^k(x_0)$, $f^{(m)}(x_0) = 0$ для всех натуральных $m \leqslant k - 1$ и $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Тогда:*

(а) *если k чётное и $f^{(k)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого локального минимума;*

(б) *если k чётное и $f^{(k)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого локального максимума;*

(в) *если k нечётное, то в точке x_0 экстремума нет.*

Доказательство. По теореме 6.2 Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для некоторого $\delta > 0$ и всех $h \in O_\delta(0)$ получим

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^k) = \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + o(1)\right)h^k. \qquad (2)$$

Так как $o(1) \to 0$ при $h \to 0$, то при достаточно малом $\delta_1 \in (0, \delta]$ знак выражения

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + o(1)$$

совпадает со знаком числа $f^{(k)}(x_0)$ при всех $h \in \mathring{O}_{\delta_1}(0)$. Из равенства (2) вытекает, что при всех $h \in \mathring{O}_{\delta_1}(0)$ в случае чётного k выражение $f(x_0 + h) - f(x_0)$ сохраняет знак, совпадающий со знаком числа $f^{(k)}(x_0)$, а в случае нечётного k знак этого выражения при $h \in (-\delta_1, 0)$ противоположен его знаку при $h \in (0, \delta_1)$. Для завершения доказательства теоремы осталось воспользоваться определениями 4.1 — 4.3 точек экстремума. ◀

4.7.2. О выпуклых функциях

Определение 1 (выпуклого числового множества). Множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ называется ***выпуклым***, если для любых $x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $x_1 \leqslant x_2$, имеем $[x_1, x_2] \subset \Omega$.

Замечание 1 (о выпуклых числовых множествах). Из определения 1 выпуклого числового множества вытекает, что *промежутки* (см. определение 1.4.4), и только они, являются выпуклыми подмножествами $\mathbb{R}$.

Определение 2 (выпуклой функции). Пусть функция f определена на *выпуклом множестве* (то есть на *промежутке*) $I \subset \mathrm{Dom}(f)$. Если для всех $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполнено неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \tag{3}$$

для всех $x_1, x_2 \in I$, то функция f называется ***выпуклой*** на I. Если при этом для всех $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ и $x_1 \neq x_2$ неравенство (3) строгое, то функцию f называют ***строго выпуклой*** на I. Выпуклые функции также называют ***выпуклыми вниз***.

Если при тех же условиях выполнено неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \tag{4}$$

для всех $x_1, x_2 \in I$, то функция f называется ***вогнутой*** или ***выпуклой вверх*** на I. Если при этом для всех $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ и $x_1 \neq x_2$ неравенство (4) строгое, то функцию f называют ***строго вогнутой*** на I.

Пример 2. Из определения 2 выпуклой функции вытекает, что при любых $k, b \in \mathbb{R}$ функция $f(x) := kx + b$ является одновременно *выпуклой вниз и вверх* на любом промежутке I.

Теорема 3. *Функция f является выпуклой на промежутке I $\iff$ на любом отрезке $[x_1, x_2] \subset I$ график функции f лежит не выше хорды* (см. рис. 8), *соединяющей точки $\big(x_1, f(x_1)\big)$ и $\big(x_2, f(x_2)\big)$.*

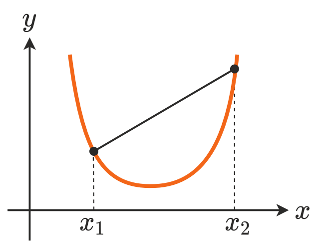


Рис. 8

Доказательство. Если $x_1 \neq x_2$, то уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, имеет вид

$$y(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1). \tag{5}$$

$\Longrightarrow$: Любая точка $x \in [x_1, x_2]$ имеет вид $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Подставляя это выражение для x в уравнение (5), получим

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\big((\alpha_1 - 1)x_1 + \alpha_2 x_2\big) = \\ &= f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\alpha_2(x_2 - x_1) = \\ &= (1 - \alpha_2)f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Для выпуклой функции f в силу неравенства (3) это означает, что

$$f(x) \leqslant y(x) \tag{7}$$

для всех $x \in [x_1, x_2]$.

$\Longleftarrow$: Пусть на любом отрезке $[x_1, x_2] \subset I$ неравенство (7) выполнено для всех $x \in [x_1, x_2]$. Так как для любых $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполнено $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in [x_1, x_2]$, то из (6) и (7) вытекает выполнение неравенства (3) в случае $x_1 < x_2$. Меняя x_1 и x_2 местами, получим выполнение неравенства (3) также и для случая $x_1 > x_2$, случай $x_1 = x_2$ тривиален. ◀

Теорема 4. *Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и функция f является выпуклой на (a, b). Тогда выполнено:*

(а) *$f \in C(a, b)$;*

(б) *всюду на (a, b) определены неубывающие левая и правая производные f'_- и f'_+ функции f* (см. замечание 1.1 об односторонних производных)*, причём для всех $x, y \in (a, b)$ при $x < y$ выполнено неравенство*

$$f'_-(x) \leqslant f'_+(x) \leqslant f'_-(y) \leqslant f'_+(y); \tag{8}$$

(в) *$f \in D\big((a, b) \setminus \Omega\big)$ для некоторого множества Ω такого, что* $\operatorname{card}(\Omega) \leqslant \aleph_0$.

Доказательство. Для начала докажем существование у функции f левой и правой производных всюду на (a, b), а также выполнение неравенства (8). Пусть

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b,$$

тогда найдётся $\lambda \in (0,1)$, для которого

$$x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3, \tag{9}$$

что равносильно равенствам

$$x_2 - x_1 = \lambda(x_3 - x_1), \tag{10}$$

$$(1-\lambda)(x_3 - x_1) = x_3 - x_2. \tag{11}$$

Из равенства (9) и неравенства (3) для выпуклой функции f вытекает неравенство

$$f(x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3), \tag{12}$$

равносильное неравенствам

$$f(x_2) - f(x_1) \leqslant \lambda\big(f(x_3) - f(x_1)\big), \tag{13}$$

$$(1-\lambda)\big(f(x_3) - f(x_1)\big) \leqslant f(x_3) - f(x_2). \tag{14}$$

Разделив неравенство (13) почленно на равенство (10), получим неравенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}. \tag{15}$$

Разделив неравенство (14) почленно на равенство (11), получим неравенство

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{16}$$

Далее пусть

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < b. \tag{17}$$

Заменяя в неравенствах (15) и (16) числа x_1, x_2, x_3 на x_2, x_3, x_4 соответственно, получим неравенства

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leqslant \frac{f(x_4) - f(x_2)}{x_4 - x_2} \tag{18}$$

и

$$\frac{f(x_4) - f(x_2)}{x_4 - x_2} \leqslant \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}. \tag{19}$$

Заметим, что неравенства (15), (16), (18), (19) могут быть записаны в виде цепочки неравенств

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \overset{(15)}{\leqslant} \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \overset{(16)}{\leqslant} \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \overset{(18)}{\leqslant}$$
$$\overset{(18)}{\leqslant} \frac{f(x_4) - f(x_2)}{x_4 - x_2} \overset{(19)}{\leqslant} \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}, \tag{20}$$

верных для *всех чисел* x_1, x_2, x_3, x_4, удовлетворяющих неравенствам (17). Теперь *зафиксируем* произвольную точку $x_2 \in (a, b)$. Из неравенства (18) вытекает, что функция

$$g(x) := \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

не убывает на (x_2, b). Далее *зафиксируем* произвольную точку $x_1 \in (a, x_2)$. Из неравенств (15) и (16) вытекает, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant g(x_3)$$

для всех $x_3 \in (x_2, b)$. Из теоремы 3.4.1 о пределе монотонной функции вытекает существование $f'_+(x_2)$, а также выполнение неравенства

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant f'_+(x_2) \overset{\text{з. } 1.1}{:=} \lim_{x_3 \to x_2+} g(x_3) \tag{21}$$

для всех $x_1 \in (a, x_2)$. В силу произвольности точки $x_2 \in (a, b)$ существование правой производной функции f на (a, b) доказано. Совершенно аналогично с помощью неравенств (16), а затем (18) и (19) по теореме 3.4.1 о пределе монотонной функции устанавливается существование $f'_-(x_3)$ во всех точках $x_3 \in (a, b)$.

Далее для любого $x_2 \in (a, b)$ из неравенства (21) в силу теоремы 3.1.5 о предельном переходе в неравенстве при $x_1 \to x_2-$ и установленного выше существования $f'_-(x_2)$ получим

$$f'_-(x_2) \leqslant f'_+(x_2). \tag{22}$$

Далее для любых чисел $a < x_1 < x_3 < x_4 < b$ из цепочки (4.7.2) вытекает, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4}$$

для всех $x_2 \in (x_1, x_3)$. В силу теоремы 3.1.5 о предельном переходе в неравенстве при $x_2 \to x_1+$ и установленного выше существования $f'_+(x_1)$ это означает, что

$$f'_+(x_1) \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4}.$$

Так как при любых фиксированных $a < x_1 < x_4 < b$ последнее равенство верно для всех $x_3 \in (x_1, x_4)$, то по аналогичным соображениям при $x_3 \to x_4-$ получим

$$f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_4). \tag{23}$$

Из неравенств (22) и (23) сразу вытекает неравенство (8), а также неубывание функций f'_+ и f'_- на (a, b), что завершает доказательство пункта (б).

Утверждение пункта (а) вытекает из пункта (б), в котором для любой точки $x_1 \in (a,b)$ установлено существование $f'_+(x_1)$ и $f'_-(x_1)$, а следовательно, (см. замечание 1.1 об односторонних производных) и выполнение равенств

$$\lim_{x \to x_1+} f(x) = \lim_{x \to x_1-} f(x) = f(x_1),$$

обеспечивающих непрерывность функции f в точке x_1 (см. замечания 3.2.1 и 3.1.2).

Пусть функция f не является дифференцируемой в некоторой точке $y \in \in (a,b)$. В силу замечания 1.1 об односторонних производных из неравенства (8) получаем неравенство

$$f'_+(x) \leqslant f'_-(y) < f'_+(y)$$

для всех $x \in (a,y)$. Из теоремы 3.4.1 о пределе монотонной функции вытекает существование $f'_+(y-)$, а также выполнение неравенства

$$f'_+(y-) := \lim_{x \to y-} f'_+(x) \leqslant f'_-(y) < f'_+(y).$$

Это означает, что монотонная функция f'_+ терпит разрыв в точке y, а следовательно множество всех таких точек y не более чем счётно (см. теорему 3.4.2 о точках разрыва монотонной функции). На этом завершается доказательство пункта (в), а с ним и всей теоремы. ◀

Замечание 2. Из выпуклости функции f на *отрезке* $[a,b]$, вообще говоря, не следует, что $f \in C[a,b]$.

Действительно, по определению 2 выпуклой функции нетрудно убедиться в выпуклости функции

$$f(x) := \begin{cases} 0 \text{ при } x \in (0,1), \\ 1 \text{ при } x \in \{0,1\} \end{cases}$$

на отрезке $[0,1]$, хотя в граничных точках этого отрезка она терпит разрыв. ◀

Замечание 3. Для теоремы 4 справедливо следующее обратное утверждение (см. [49, с. 311]): если у функции $f \in C(a,b)$ всюду на (a,b) существует одна из её односторонних производных f'_+ или f'_-, которая не убывает на (a,b), то функция f является выпуклой на этом интервале.

Теорема 5. *Пусть* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ *и* $f \in D(a,b)$. *Тогда функция* f *является выпуклой на* (a,b) $\iff$ *функция* f' *не убывает на* (a,b).

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Вытекает непосредственно из пункта (б) теоремы 4 в силу того, что

$$f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$$

для всех $x \in (a, b)$.

$\Longleftarrow$: Пусть

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b,$$

в силу неубывания функции f' по теореме 4.6 Лагранжа имеем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

отсюда получаем неравенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \tag{24}$$

равносильное неравенству

$$\left(\frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_3 - x_2}\right) f(x_2) \leqslant \frac{f(x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_3)}{x_3 - x_2}.$$

Из последнего неравенства получаем

$$f(x_2) \leqslant \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3). \tag{25}$$

Для произвольного $\lambda \in (0, 1)$ и любых x_1, x_3, удовлетворяющих неравенствам $a < x_1 < x_3 < b$, обозначим

$$x_2 \coloneqq (1 - \lambda) x_1 + \lambda x_3.$$

Так как $x_2 \in (x_1, x_3)$, в силу неравенства (25) и равенств

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} = 1 - \lambda, \quad \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \lambda$$

получим

$$f\big((1 - \lambda) x_1 + \lambda x_3\big) \leqslant (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Заменяя λ на $1 - \lambda$ и меняя обозначения x_1 и x_3 местами, получим выполнение последнего неравенства также для случая $a < x_3 < x_1 < b$. Так как случаи $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ и $x_1 = x_3$ тривиальны, имеем выпуклость функции f на (a, b) по определению 2 выпуклой функции. ◀

Замечание 4. Выполнение (строгого) неравенства (24) для всех

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b$$

равносильно (строгой) выпуклости функции f на (a, b).

Действительно, для (строго) выпуклой функции f (строгое) неравенство (24) получается как следствие (строгих) неравенств (15) и (16) (см. доказательство теоремы 4). Обратно, (строгая) выпуклость функции f вытекает из (строгого) неравенства (24) (см. доказательство теоремы 5). ◀

Теорема 5′. *Пусть* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ *и* $f \in D(a, b)$. *Тогда функция* f *является строго выпуклой на* (a, b) $\iff$ *функция* f' *возрастает на* (a, b).

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Из строгой выпуклости функции f вытекает (см. замечание 4) выполнение строгого неравенства (24), из которого для любых x_1, x_3 при $a < x_1 < x_3 < b$ в силу теоремы 5 и теоремы 4.6 Лагранжа, выбирая произвольный $x_2 \in (x_1, x_3)$, получим

$$f'(x_1) \overset{\text{Т. } 5}{\leqslant} f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \overset{(24)}{<} \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_2) \overset{\text{Т. } 5}{\leqslant} f'(x_3),$$

и возрастание функции f' доказано.

$\Longleftarrow$: В силу возрастания функции f' при

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b$$

по теореме 4.6 Лагранжа получим

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

а значит, выполнено строгое неравенство (24), из которого (см. замечание 4) вытекает строгая выпуклость функции f. ◀

Теорема 6. *Пусть* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ *и* $f \in D(a, b)$. *Тогда функция* f *является выпуклой на* (a, b) $\iff$ *график функции* f *на* (a, b) *лежит не ниже любой проведённой к нему касательной.*

Доказательство. Уравнение прямой, касательной (см. определение 2.1) к графику функции f в точке x_0, имеет вид

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

отсюда по теореме 4.6 Лагранжа для любого $x \in (a, b)$ имеем

$$f(x) - l(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \big(f'(\xi) - f'(x_0)\big)(x - x_0), \quad (26)$$

где точка ξ лежит между точками x_0 и x.

$\Longrightarrow$: Если функция f выпукла [строго выпукла] на (a,b), то функция f' не убывает [возрастает] на (a,b) по теореме 5 [5′], поэтому правая часть равенства (26) неотрицательна для всех $x \in (a,b)$ [положительна для всех $x \in (a,b)\setminus\{x_0\}$], а значит, таким свойством обладает и его левая часть.

$\Longleftarrow$: Если для любого $x_0 \in (a,b)$ и для всех $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ выполнено

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geqslant [>]\ 0,$$

то

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant [<]\ f'(x_0) \tag{27}$$

для всех $x_1 \in (a, x_0)$ и

$$\frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} \geqslant [>]\ f'(x_0) \tag{28}$$

для всех $x_3 \in (x_0, b)$. Из неравенств (27) и (28) при

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b,$$

полагая $x_0 := x_2$, получим

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant [<]\ \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

что совпадает со (строгим) неравенством (24), которое равносильно выпуклости [строгой выпуклости] функции f на (a,b) в силу замечания 4. ◀

Теорема 7. *Пусть* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ *и* $f \in D^2(a,b)$. *Тогда функция* f *является выпуклой на* (a,b) $\iff$ $f''(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in (a,b)$.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из теоремы 5 в силу следствия 4.2 теоремы Лагранжа. ◀

Замечание 5. Теоремы 5 - 7 и 5′ остаются в силе при замене (a,b) на произвольный *промежуток* (см. определение 1.4.4) I.

4.7.3. Неравенства Йенсена, Янга, Гёльдера, Коши-Буняковского, Минковского

Утверждение 1 [Неравенство Йенсена]. *Пусть функция f выпукла* (см. определение 2) *на отрезке* $[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in [a,b]$, $\alpha_i \geqslant 0$ *при всех* $i \in \overline{1,n}$ *и* $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. *Тогда* $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in [a,b]$ *и*

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n). \tag{29}$$

Доказательство. При $n = 1$ утверждение верно, так как верно равенство $f(x_1) = f(x_1)$. Предположим, что $n \geqslant 2$ и утверждение верно для $n-1$. Обозначим

$$\beta \coloneqq \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geqslant 0.$$

Если $\beta = 0$, то $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, $\alpha_1 = 1$ и неравенство (29) выполнено, так как выполнено равенство $f(x_1) = f(x_1)$. Если $\beta > 0$, то

$$\frac{\alpha_2}{\beta} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta} = 1,$$

поэтому

$$y \coloneqq \frac{\alpha_2}{\beta}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta}x_n \in [a,b]$$

по предположению индукции. Так как $\alpha_1 + \beta = 1$, то

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \alpha_1 x_1 + \beta y \in [a,b].$$

Также по определению 2 выпуклой функции и по предположению индукции имеем

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = f(\alpha_1 x_1 + \beta y) \overset{\text{О. 2}}{\leqslant}$$
$$\overset{\text{О. 2}}{\leqslant} \alpha_1 f(x_1) + \beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right) \overset{\text{инд.}}{\leqslant}$$
$$\overset{\text{инд.}}{\leqslant} \alpha_1 f(x_1) + \beta\frac{\alpha_2}{\beta}f(x_2) + \ldots + \beta\frac{\alpha_n}{\beta}f(x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n),$$

что и завершает доказательство утверждения по индукции. ◀

Утверждение 2 [Неравенство Янга]. *Пусть* $a, b \geqslant 0$; $p, q > 1$ *и*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{30}$$

причём равенство в (30) *достигается тогда и только тогда, когда* $a^p = b^q$.

Доказательство. Если $ab = 0$, то неравенство (30) очевидно выполнено, причём равенство в нём достигается тогда и только тогда, когда $a^p = b^q = 0$. Пусть $a, b > 0$. Функция $f(x) \coloneqq -\ln x$ является строго выпуклой на луче $(0, +\infty)$ по теореме $5'$, так как

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

при всех $x \in (0, +\infty)$, а значит функция f' возрастает на этом луче по следствию 4.2 теоремы Лагранжа. По определению 2 строго выпуклой функции имеем

$$-\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) = f\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \overset{\text{O. } 2}{\leqslant} \frac{1}{p}f(a^p) + \frac{1}{q}f(b^q) =$$
$$= -\left(\frac{\ln(a^p)}{p} + \frac{\ln(b^q)}{q}\right) = -\ln(ab),$$

что равносильно неравенству (30), причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $a^p = b^q$ ◀

Утверждение 3 [Неравенство Гёльдера]. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$; $x_i, y_i \geqslant 0$ *при всех* $i \in \overline{1, n}$; $p, q > 1$ *и*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{31}$$

причём равенство в (31) *достигается тогда и только тогда, когда векторы* $(x_1^p, \ldots, x_n^p)$ *и* $(y_1^q, \ldots, y_n^q)$ *коллинеарны.*

Доказательство. Обозначим

$$X := \sum_{i=1}^{n} x_i^p, \ Y := \sum_{i=1}^{n} y_i^q.$$

Если $X = 0$ или $Y = 0$, то $x_1 = \ldots = x_n = 0$ или $y_1 = \ldots = y_n = 0$ и в (31) очевидно достигается равенство. Пусть $X, Y > 0$. Обозначая

$$a := \frac{x_i}{X^{\frac{1}{p}}}, \ b := \frac{y_i}{Y^{\frac{1}{q}}}$$

и применяя неравенство (30) Янга при всех $i \in \overline{1, n}$ получим

$$\frac{x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{x_i^p}{pX} + \frac{y_i^q}{qY}, \tag{32}$$

а следовательно,

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p}{pX} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q}{qY} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

что равносильно неравенству (31), равенство в котором достигается тогда и только тогда, когда достигается равенство в (32) при всех $i \in \overline{1, n}$. По утверждению 2 последнее имеет место тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\frac{x_i^p}{X} = \frac{y_i^q}{Y}$$

при всех $i \in \overline{1, n}$, что равносильно коллинеарности векторов $(x_1^p, \ldots, x_n^p)$ и $(y_1^q, \ldots, y_n^q)$. ◀

Утверждение 4 [Неравенство Коши-Буняковского]. *Для любых $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{33}$$

причём равенство в (33) достигается тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} := (y_1, \ldots, y_n)$ коллинеарны.

Доказательство. Так как $|x_i|, |y_i| \geqslant 0$ при всех $i \in \overline{1, n}$, то по утверждению 3 при $p = q = 2$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{34}$$

причём равенство в (34) достигается тогда и только тогда, когда векторы $(x_1^2, \ldots, x_n^2)$ и $(y_1^2, \ldots, y_n^2)$ коллинеарны, что равносильно коллинеарности векторов $\mathbf{x}' := (|x_1|, \ldots, |x_n|)$ и $\mathbf{y}' := (|y_1|, \ldots, |y_n|)$. Используя неравенство 1.4.4 треугольника, по индукции получим

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|. \tag{35}$$

Из неравенств (34) и (35) вытекает неравенство (33).

Пусть в (33) достигается равенство, тогда оно достигается одновременно в (34) и (35). Из равенства в (34) вытекает коллинеарность векторов $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$, то есть существование такого $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{x}'$ или $\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{y}'$. Пусть $\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{x}'$ (второй случай рассматривается аналогично). Из равенства в (35) вытекает, что числа $x_i y_i$ одновременно неотрицательны или неположительны. В первом случае при всех $i \in \overline{1, n}$ имеем

$$\begin{cases} x_i y_i \geqslant 0 \\ |y_i| = \lambda |x_i|, \end{cases}$$

а следовательно, $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$. В случае $x_i y_i \leqslant 0$ аналогично получим $\mathbf{y} = -\lambda\mathbf{x}$. Таким образом проверено, что векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ коллинеарны. Обратно: если векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ коллинеарны, то равенство в (33) проверяется непосредственно. ◀

Утверждение 5 [Неравенство Минковского]. *Для любых $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ и $p \geqslant 1$ выполнено неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{36}$$

При $p > 1$ равенство в (36) достигается тогда и только тогда, когда существует $\lambda \geqslant 0$ такое, что $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$ или $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n)$.

Доказательство. При $p = 1$ неравенство (36) получается из неравенства 1.4.4 треугольника по индукции, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $x_i y_i \geqslant 0$ при всех $i \in \overline{1, n}$.

Далее рассмотрим случай $p > 1$. В силу неравенства треугольника при всех $i \in \overline{1, n}$ имеем

$$|x_i + y_i|^p \leqslant |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + |y_i||x_i + y_i|^{p-1}, \tag{37}$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1}. \tag{38}$$

Полагая

$$q := \frac{p}{p-1}$$

и применяя к каждой из сумм, стоящих в правой части неравенства (38), неравенство (31) Гёльдера, получим

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Обозначим

$$S := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Если $S > 0$, то, разделив последнее неравенство на S, получим требуемое неравенство (36). Если $S = 0$, то $\mathbf{z} := (|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|) = \mathbf{0}$, поэтому левая часть неравенства (36) обращается в ноль, а следовательно, и само это неравенство выполнено.

Пусть в (36) достигается равенство. Если $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, то имеем $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Если $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, то $S \neq 0$, а значит, в неравенствах (37) и в соответствующих неравенствах Гёльдера достигаются равенства, поэтому (по аналогии с доказательством утверждения 4 [Неравенство Коши-Буняковского]) векторы $\mathbf{x}', \mathbf{z}$ коллинеарны и векторы $\mathbf{y}', \mathbf{z}$ коллинеарны, где $\mathbf{x}' := (|x_1|, \ldots, |x_n|)$ и $\mathbf{y}' := (|y_1|, \ldots, |y_n|)$. Так как $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, то это означает существование чисел α, β таких, что $\mathbf{x}' = \alpha\mathbf{z}$ и $\mathbf{y}' = \beta\mathbf{z}$, при этом выполнены соотношения $\alpha, \beta \geqslant 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Рассмотрим случай $\alpha > 0$ и положим

$$\lambda := \frac{\beta}{\alpha} \geqslant 0,$$

тогда $\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{x}'$. Для любого $i \in \overline{1,n}$ из равенства в (37) следует, что $y_i + x_i = 0$ или $x_i y_i \geqslant 0$. Таким образом, для любого $i \in \overline{1,n}$ выполнено $y_i = \lambda x_i$ или $x_i = y_i = 0$. Это означает, что $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$. В случае $\beta > 0$ аналогично получим существование $\lambda \geqslant 0$ такого, что $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$. Обратно: если для некоторого $\lambda \geqslant 0$ выполнено $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$ или $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, то равенство в (36) проверяется непосредственно. ◀

4.7.4. Об асимптотах и точках перегиба графика функции

Определение 3 (вертикальной асимптоты). Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции f, если

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty.$$

Определение 4 (наклонной асимптоты). Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции f, если

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где

$$\lim_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0.$$

Утверждение 6. *Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции f тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = b \end{cases} \tag{39}$$

или

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b. \end{cases} \tag{40}$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Вытекает непосредственно из определения 4 наклонной асимптоты.

$\Longleftarrow$: Вытекает из вторых равенств в системах (39), (40) и замечания 3.1.4. ◀

Определение 5 (точки перегиба). Точка x_0 называется ***точкой перегиба графика функции*** f, если f непрерывна в x_0 и для некоторого $\delta > 0$ выполнено одно из двух условий:

(а) для любого $\delta' \in (0, \delta]$ на интервале $(x_0 - \delta', x_0)$ функция f является выпуклой вниз, но не является выпуклой вверх, а на интервале $(x_0, x_0+\delta')$ она является выпуклой вверх, но не является выпуклой вниз (см. определение 2);

(б) для любого $\delta' \in (0, \delta]$ на интервале $(x_0 - \delta', x_0)$ функция f является выпуклой вверх, но не является выпуклой вниз, а на интервале $(x_0, x_0+\delta')$ она является выпуклой вниз, но не является выпуклой вверх (см. определение 2).

Замечание 6. Из теоремы 4 вытекает, что если x_0 — точка перегиба графика функции f, то $f \in C\big(O_\delta(x_0)\big)$ для некоторого $\delta > 0$.

Теорема 8 (о необходимом условии перегиба для дифференцируемых функций). *Пусть x_0 — точка перегиба графика функции f и $f \in$ $\in D(x_0)$. Тогда для некоторого $\delta > 0$ на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ график функции f располагается в различных полуплоскостях относительно прямой, касательной к графику f в точке x_0.*

Доказательство. Пусть в определении 5 точки перегиба выполнено условие (а) (условие (б) рассматривается аналогично либо сводится к условию (б) умножением функции f на -1). Сначала покажем, что функция f является выпуклой на полуинтервале $(x_0 - \delta, x_0]$. По определению 2 выпуклой функции для всех $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполнено неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

для всех $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0)$. Воспользовавшись непрерывностью функции f на на полуинтервале $(x_0 - \delta, x_0]$ и переходя при фиксированном $x_2 \in (x_0 - \delta, x_0)$ в последнем неравенстве к пределу при $x_1 \to x_0-$, при тех же α_1, α_2 получим неравенство

$$f(\alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_0) + \alpha_2 f(x_2)$$

для всех $x_2 \in (x_0 - \delta, x_0)$. Выпуклость функции f на полуинтервале $(x_0 - \delta, x_0]$ установлена. Далее рассмотрим функцию

$$l(x) \coloneqq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

график которой является прямой, касательной к графику функции f в точке x_0, и покажем, что

$$f(x) > l(x) \tag{41}$$

для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. В силу выпуклости функции f на полуинтервале $(x_0 - \delta, x_0]$ для всех $t \in (0, 1]$ по определению 2 выпуклой функции имеем

$$\frac{f(x_0 + (x - x_0)t) - f(x_0)}{t} = \frac{f(tx + (1-t)x_0) - f(x_0)}{t} \overset{\text{о. }2}{\leqslant}$$
$$\overset{\text{о. }2}{\leqslant} \frac{tf(x) + (1-t)f(x_0) - f(x_0)}{t} = f(x) - f(x_0),$$

поэтому

$$f'(x_0)(x - x_0) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(x_0 + (x - x_0)t) - f(x_0)}{t} \leqslant f(x) - f(x_0),$$

что равносильно неравенству

$$f(x) \geqslant l(x) \tag{42}$$

при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0]$. Если для некоторого $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполнено равенство $f(x_1) = l(x_1)$, то отрезок $\big[\big(x_1, l(x_1)\big), \big(x_0, l(x_0)\big)\big]$ прямой l является хордой графика функции f, а следовательно, по теореме 3 для всех $x \in [x_1, x_0]$ выполнено неравенство

$$f(x) \leqslant l(x),$$

которое вместе с неравенством (42) даёт равенство $f(x) = l(x)$ для всех $x \in$ $\in [x_1, x_0]$. Таким образом, график функции f на интервале (x_1, x_0) является прямой, а значит, функция f выпукла одновременно вниз и вверх на этом интервале, что противоречит определению 5 точки перегиба. Полученное противоречие означает выполнение неравенства (41). Совершенно аналогично показывается, что

$$f(x) < l(x)$$

для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. ◀

Замечание 7. Метод, аналогичный доказательству теоремы 8 о необходимом условии перегиба для дифференцируемых функций, может быть применён при доказательстве ($\Longrightarrow$) теоремы 6 при условиях дифференцируемости выпуклой на интервале (a, b) функции f *лишь в одной точке* $x_0 \in (a, b)$, в которой и рассматривается касательная прямая.

Теорема 9 (о необходимом условии перегиба для дважды дифференцируемых функций). *Если x_0 — точка перегиба графика функции f и $f \in D^2(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть в определении 5 точки перегиба выполнено условие (а) (условие (б) рассматривается аналогично либо сводится к условию (б) умножением функции f на -1). Для некоторого $\delta_1 > 0$ функция f' определена на интервале $(x_0 - \delta_1, x_0)$, а функция f является выпуклой на нём, следовательно, функция f' не убывает на этом интервале по теореме 5. Аналогично устанавливается невозрастание функции f' на интервале $(x_0, x_0 + \delta_2)$ для некоторого $\delta_2 > 0$. В силу дифференцируемости, а следовательно, непрерывности функции f' в точке x_0, по теореме 3.4.1 о пределе монотонной функции получим, что в этой точке функция f' имеет локальный максимум. По теореме 4.2 о необходимом условии экстремума [Лемма Ферма] получим $f''(x_0) = 0$. ◀

Теорема 10 (о достаточном условии перегиба для дважды дифференцируемых функций). *Если функция f непрерывна в точке x_0, $f''(x) > 0$ $\left[f''(x) < 0\right]$ при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f''(x) < 0$ $\left[f''(x) > 0\right]$ при всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$, то x_0 — точка перегиба графика функции f.*

Доказательство. По следствию 4.2 теоремы Лагранжа функция f' строго возрастает [убывает] на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и строго убывает [возрастает] на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$. По теореме $5'$ это означает, что функция f строго выпукла вниз [вверх] на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и строго выпукла вверх [вниз] на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$. По определению 5 это и означает, что x_0 — точка перегиба графика функции f. ◀

Теорема 11 (о достаточном условии перегиба для многократно дифференцируемых функций). *Пусть число $k \geqslant 3$ нечётно, $f \in D^k(x_0)$, $f^{(m)}(x_0) = 0$ для всех $m \in \overline{2, k-1}$ и $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 — точка перегиба графика функции f.*

Доказательство. По теореме 6.2 Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для некоторого $\delta > 0$ и всех $h \in O_\delta(0)$ получим

$$f''(x_0 + h) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!} h^{k-2} + o(h^{k-2}) = \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!} + o(1) \right) h^{k-2}.$$

Так как $o(1) \to 0$ при $h \to 0$, то при достаточно малом $\delta_1 \in (0, \delta]$ знак выражения

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!} + o(1)$$

совпадает со знаком числа $f^{(k)}(x_0)$ при всех $h \in \mathring{O}_{\delta_1}(0)$. В силу нечётности числа $k-2$ это означает, что функция f'' принимает значения разных знаков на множествах $(x_0 - \delta_1, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta_1)$. Так как функция f дифференцируема, а следовательно, непрерывна в точке x_0, то по теореме 10 о достаточном условии перегиба для дважды дифференцируемых функций точка x_0 — точка перегиба графика функции f. ◀

Глава 5

Первообразная

§ 5.1. Основные свойства первообразной и неопределённого интеграла

Определение 1 (первообразной). Пусть I — некоторый *невырожденный промежуток* (см. определение 1.4.4). Функция $F\colon I \to \mathbb{R}$ называется ***первообразной функции*** f ***на промежутке*** $I \subset \mathrm{Dom}(f)$, если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$. Если точка $x_0 \in I$ является левой или правой граничной точкой промежутка I, то под $F'(x_0)$ понимается $F'_+(x_0)$ или $F'_-(x_0)$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть функции F_1 и F_2 являются первообразными функции f на промежутке I. Тогда найдётся константа $c \in \mathbb{R}$ такая, что*

$$F_1(x) = F_2(x) + c \tag{1}$$

для всех $x \in I$.

Доказательство. Так как

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$$

для всех $x \in \mathrm{int}(I)$, то по следствию 4.4.1 теоремы Лагранжа получим, что $F_1(x) - F_2(x) \equiv c$ для всех $x \in I$, отсюда и вытекает равенство (1). ◄

Определение 2 (неопределённого интеграла). ***Неопределённым интегралом*** функции f на *невырожденном промежутке* I называется *множество всех первообразных* функции f на I и обозначается

$$\int f(x)dx. \tag{2}$$

В обозначении (2) промежуток I явно не указывается и считается фиксированным заранее. Если множество первообразных функции f на промежутке I непусто, то говорят, что неопределённый интеграл (2) *существует*.

Замечание 1. Если множество первообразных функции f на промежутке I непусто и F — произвольная функция из этого множества, то по теореме 1 имеем

$$\int f(x)dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

При этом чаще всего используется *упрощённая запись*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

в которой символом C обозначают *класс всевозможных постоянных функций*.

Теорема 2. *Пусть $p \neq -1$, тогда*

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

где все неопределённые интегралы рассматриваются на произвольном невырожденном промежутке, целиком входящем в область определения соответствующей функции.

Доказательство вытекает из формул для производных элементарных функций (см. теоремы 4.1.2 и 4.4.9) и замечания 1. ◀

Определение 3. Пусть множества A и B состоят из функций, φ — произвольная функция, $\alpha \in \mathbb{R}$. Определим множества

$$\alpha A := \{\alpha a : a \in A\},$$

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

$$\varphi + A := \{\varphi\} + A,$$

$$A \circ \varphi := \{a \circ \varphi : a \in A\}.$$

Теорема 3. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, функции f и g обладают первообразными на промежутке I и $V \in D(I)$. Тогда*

$$\int V'(x)dx = V\big|_I(x) + C; \tag{3}$$

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx; \tag{4}$$

$$\int \big(\alpha f(x)\big)dx = \alpha \int f(x)dx, \text{ если } \alpha \neq 0; \tag{5}$$

$$\int \big(\alpha f(x)\big)dx + \int g(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \int g(x)dx. \tag{6}$$

Доказательство. Равенство (3) вытекает из замечания 1 и из того факта, что функция $V\big|_I$ по определению является первообразной функции V' на промежутке I.

Пусть F и G — некоторые первообразные функций f и g на промежутке I соответственно. Вложения классов из правых частей равенств (4)-(6) в соответствующие классы из левых частей этих равенств вытекают из того факта, что функция $\alpha F + \beta G$ является первообразной функции $\alpha f + \beta g$ на I (см. теорему 4.1.4 об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями и замечание 4.1.3). Для доказательства этих равенств осталось проверить обратные вложения. Пусть W и U — некоторые первообразные функций $f + g$ и αf на промежутке I соответственно. Из равенств

$$W = (W - G) + G, \ U = \alpha\alpha^{-1}U \text{ при } \alpha \neq 0$$

и того факта, что функции $W - G$ и $\alpha^{-1}U$ являются первообразными функции f на промежутке I, вытекают равенства (4) и (5). Равенство (6) в случае $\alpha \neq 0$ вытекает из (5), а в случае $\alpha = 0$ — из того, что первообразные нулевой функции суть константы, а функция $G + const$ является первообразной функции g на промежутке I. ◀

Утверждение 1. *Пусть $-\infty \leqslant a < c < b \leqslant +\infty$, $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, функции $F\big|_{(a,c)}$ и $F\big|_{(c,b)}$ являются первообразными функции f на (a,c) и на (c,b) соответственно. Если F и f непрерывны в точке c, то функция F является первообразной функции f на (a,b).*

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно проверить, что $F'(c) = f(c)$. Так как существует

$$\lim_{x\to c} F'(x) = \lim_{x\to c} f(x) = f(c),$$

то по следствию 4.4.3 существует $F'(c) = f(c)$. ◀

Теорема 4 (о замене переменной). *Пусть I_t и I_x — невырожденные промежутки, $\varphi \in D(I_t)$, $\varphi(I_t) \subset I_x$ и функция F является первообразной функции f на I_x. Тогда существует*

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \left(\int f(x)dx\right) \circ \varphi\big|_{I_t} = F\big(\varphi(t)\big) + C, \tag{7}$$

где равенство (7) рассматривается на промежутке I_t.

Доказательство. По утверждению 4.1.3 существует функция $\widehat{F}$ такая, что $\widehat{F}\big|_{I_x} = F$ и $\widehat{F}'(x) = f(x)$ для всех $x \in I_x$. По теореме 4.1.3 о дифференцируемости композиции функций имеем равенство $(\widehat{F}\circ\varphi)'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ для всех $t \in I_t$. Так как $(\widehat{F} \circ \varphi)\big|_{I_t} = (F \circ \varphi)\big|_{I_t}$, то значения производной во внутренних точках, правой производной в левых граничных и левой производной в правых граничных точках промежутка I_t функции $(F \circ \varphi)\big|_{I_t}$ совпадают со значениями производной функции $\widehat{F} \circ \varphi$ в соответствующих точках. По определению 1 первообразной это означает, что функция $(F \circ \varphi)\big|_{I_t} = F \circ \varphi\big|_{I_t}$ является первообразной функции $(f \circ \varphi)\varphi'$ на промежутке I_t, поэтому равенство (7) вытекает из замечания 1. ◀

Пример 1.

$$\int \sin^3 t \cos t dt \overset{\{x = \sin t\}}{=} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C \overset{\text{Т. }4}{=} \frac{\sin^4 t}{4} + C.$$

Теорема 5 (об обратимой замене). *Пусть I_t — невырожденный промежуток, $\varphi \in D(I_t)$, $\varphi'(t) \neq 0$ для всех $t \in I_t$ и функция G является первообразной функции $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ на промежутке I_t. Тогда существует*

$$\int f(x)dx = \left(\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt\right) \circ \varphi^{-1} = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C, \tag{8}$$

где равенство (8) рассматривается на промежутке $I_x := \varphi(I_t)$, а функция $\varphi^{-1} := (\varphi|_{I_t})^{-1} : I_x \to I_t$ является обратной (см. определение 0.5.12) *для функции $\varphi\big|_{I_t}$.*

Доказательство. По теореме 4.4.8 о дифференцируемой обратной функции на промежутке I_x определена обратная функция $\varphi^{-1} : I_x \to I_t$. В силу замечания 4.4.4 по утверждению 4.1.3 существует функция v такая, что для всех $x \in I_x$

выполнено

$$v(x) = \varphi^{-1}(x), \tag{9}$$

$$v'(x) = \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)}. \tag{10}$$

По теореме 4 на промежутке I_x имеем

$$G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C \overset{(9)}{=} G\big(v(x)\big) + C = \left(\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt\right) \circ v \overset{\text{T. }4}{=}$$
$$\overset{\text{T. }4}{=} \int f\Big(\varphi\big(v(x)\big)\Big)\varphi'\big(v(x)\big)v'(x)dx \overset{(9),(10)}{=} \int f(x)\frac{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)}dx = \int f(x)dx. \blacktriangleleft$$

Пример 2. На интервале $I_x := (-1, 1)$ имеем

$$\int \sqrt{1-x^2}dx \overset{\{x=\sin t,\ t=\arcsin x\}}{=} \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(t + \frac{1}{2}\sin 2t\Big) + C \overset{\text{T. }5}{=} \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C.$$

Утверждение 2. *Если функция* $f\big|_I$ *непрерывна в граничных точках промежутка* I, $F \in C(I)$ *и функция* $F\big|_{\operatorname{int}(I)}$ *является первообразной функции* f *на* $\operatorname{int}(I)$, *то* $F\big|_I$ *является первообразной функции* f *на* I.

Доказательство. По определению 1 первообразной имеем равенство $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in \operatorname{int}(I)$. Если $I \ni a$ — левая граничная точка промежутка I, то по теореме 4.4.7 Бернулли [Правило Лопиталя] имеем

$$F'_+(a) := \lim_{x\to a+}\frac{F(x)-F(a)}{x-a} \overset{\text{T. }4.4.7}{=} \lim_{x\to a+}\frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a).$$

Аналогично устанавливается равенство $F'_-(b) = f(b)$ в случае, если $I \ni b$ — правая граничная точка промежутка I. По определению 1 первообразной это означает, что функция $F\big|_I$ является первообразной функции f на промежутке I. ◀

Пример 3. В примере 2 на интервале $(-1, 1)$ установлено равенство

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C,$$

которое также верно на отрезке $[-1, 1]$ по утверждению 2.

Теорема 6 (об интегрировании по частям). *Пусть I — невырожденный промежуток, $u, v \in D(I)$ и у одной из функций uv' или vu' существует первообразная на I. Тогда у второй из этих функций существует первообразная на I и выполнено равенство*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \tag{11}$$

часто неформально записываемое в виде

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доказательство. Пусть на промежутке I существует первообразная G функции vu' (случай существования первообразной функции uv' сводится к этому, если поменять обозначения функций u и v местами). Из формулы производной произведения (см. теорему 4.1.4) вытекает, что функция $uv - G$ является первообразной функции uv' на промежутке I. В силу замечания 1 это означает, что классы, стоящие в левой и правой частях равенства (11) совпадают и равны $\{uv - G + c : c \in \mathbb{R}\}$. ◀

Замечание 2. Требование существования первообразной у одной из функций uv' или vu' в теореме 6 об интегрировании по частям существенно, в качестве иллюстрации можно рассмотреть функции

$$u(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases} \qquad v(x) := \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^4}\right) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

на интервале $(-1, 1)$.

§ 5.2. О комплексных числах, многочленах и рациональных функциях

5.2.1. Комплексные числа

Определение 1. На множестве $\mathbb{R}^2$ определим арифметические операции сложения $(+) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и умножения $(\cdot) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ равенствами

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

для всех $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Множество $\mathbb{R}^2$ с введёнными выше арифметическими операциями называется ***полем комплексных чисел*** и обозначается символом $\mathbb{C}$, а его элементы называются ***комплексными числами***.

Для любого $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ число

$$x =: \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$$

называется ***действительной частью*** комплексного числа z, а

$$y =: \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$$

называется его ***мнимой частью***.

Замечание 1. Из соответствующих свойств вещественных чисел вытекает, что множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел обладает свойствами 1-9 (см. § 1.1), где $0 := (0, 0)$, $1 := (1, 0)$, $-(x, y) := (-x, -y)$ и

$$(x, y)^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \text{ при } (x, y) \neq (0, 0).$$

Таким образом, множество $\mathbb{C}$ действительно является *полем*.

Замечание 2. Рассмотрим множество $\mathbb{R}' := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ и определим *биекцию* $\varphi \colon \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}'$ равенством $\varphi(x) := (x, 0)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. По определению 1 для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ имеем

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$
$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0),$$

поэтому $\mathbb{R}'$ является *подполем* $\mathbb{C}$, а функция φ является *изоморфизмом полей* $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ $\big($то есть для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ выполнено: $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, $\varphi(x_1 x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\big)$. В дальнейшем мы будем *отождествлять* множество $\mathbb{R}'$ с множеством $\mathbb{R}$ (посредством изоморфизма φ), а его элементы называть просто ***вещественными*** числами (ранее мы аналогичным образом поступили с рациональными числами, см. замечание 1.1.5). Для комплексного числа $(x, 0) \in$ $\in \mathbb{C}$ будем использовать сокращённое обозначение x.

Определение 2 (числа i). Комплексное число

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}$$

называется ***мнимой единицей***. По определению 1 проверяется равенство

$$i^2 = (-1, 0) = -1.$$

Для любого $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ по определению 1 проверяется равенство

$$z = x + iy, \tag{1}$$

в котором *вещественные* числа x, y рассматриваются как *комплексные* (см. замечание 2). Представление (1) называется ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Определение 3 (комплексного сопряжения). Для любого $z = x + iy \in \mathbb{C}$ число

$$\overline{z} := x - iy$$

называется ***сопряжённым*** к числу z.

Утверждение 1 (о свойствах комплексного сопряжения). *Для любых $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполнено:*

1. $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$.
3. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z$.
4. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.
5. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
6. $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$ *при* $z \neq 0$.

Доказательство. Свойства 1-5 вытекают из определений 1 и 3, свойство 6 является прямым следствием свойств 2 и 5. ◀

Определение 4 (модуля комплексного числа). ***Модулем комплексного числа*** $z = (x, y)$ называется число

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+.$$

Утверждение 2 [Неравенство треугольника для комплексных чисел]. *Для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполнено*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{2}$$

Доказательство. Неравенство (2) является частным случаем неравенства 4.7.5 Минковского при $n = p = 2$. ◀

Замечание 3. Ниже будет дано определение 8.0.2 *евклидовой нормы* $\|\cdot\|_2$ на пространстве $\mathbb{R}^2$, по которому для всех $z \in \mathbb{C}$ имеем равенство $|z| = \|z\|_2$.

Теорема 1 (о полярной системе координат). *Пусть $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $(x, y) \neq (0, 0)$. Тогда существует, и притом единственная, пара $(r, \varphi) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}^2$, для которой*

$$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi). \tag{3}$$

Доказательство. Из равенства (3) и основного тригонометрического тождества вытекает равенство $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$. Обозначим

$$a := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ b := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Из свойств тригонометрических функций и равенства $a^2 + b^2 = 1$ вытекает (см. пункт 3.5.2) существование единственного $\varphi \in (-\pi, \pi]$, для которого $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 4. Из 2π-периодичности функции $\varphi \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi)$ вытекает, что в теореме 1 полуинтервал $(-\pi, \pi]$ можно заменить на *любой* полуинтервал I длины 2π. В литературе часто рассматривается случай $I = [0, 2\pi)$.

Для любого $z \in \mathbb{C}$ из теоремы 1 о полярной системе координат вытекает существование $\varphi \in \mathbb{R}$, для которого выполнено равенство

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{4}$$

Представление (4) называется ***тригонометрической формой*** комплексного числа.

Определение 5 (аргумента комплексного числа). Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. ***Аргументом комплексного числа*** z называется любое число $\varphi \in \mathbb{R}$, для которого выполнено равенство (4). Множество всех аргументов числа z обозначается $\mathrm{Arg(z)}$. Из теоремы 1 о полярной системе координат вытекает существование единственного $\varphi_0 \in \mathrm{Arg(z)} \cap (-\pi, \pi]$, называемого ***главным значением аргумента***, для которого используется обозначение $\mathrm{arg(z)} := \varphi_0$. Для $z = 0$ аргумент не определён.

Замечание 5. В литературе часто встречается определение главного значения аргумента, по которому $\mathrm{arg(z)} \in \mathrm{Arg(z)} \cap [0, 2\pi)$ (см. замечание 4). Мы же используем определение, принятое в [16].

Утверждение 3. *Для любого* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *имеем*

$$\mathrm{Arg(z)} = \{\mathrm{arg(z)} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{5}$$

Доказательство. Если $\varphi \in \{\mathrm{arg(z)} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$, то $\varphi \in \mathrm{Arg(z)}$ по определению 5 аргумента комплексного числа. Если $\varphi \in \mathrm{Arg(z)}$, то найдутся $\alpha \in (-\pi, \pi]$ и $k \in \mathbb{Z}$, для которых выполнено равенство $\varphi = \alpha + 2\pi k$, из которого вытекает

$$z = |z|\big(\cos\mathrm{arg(z)} + i\sin\mathrm{arg(z)}\big) = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Так как $\alpha, \mathrm{arg(z)} \in (-\pi, \pi]$, то $\alpha = \mathrm{arg(z)}$ по теореме 1 о полярной системе координат, что и завершает доказательство утверждения. ◀

Определение 6 (комплексной экспоненты). Для любого $z = x + iy \in \mathbb{C}$ определим функцию $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ равенством

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y).$$

Утверждение 4 (о свойствах комплексной экспоненты). *Для любых z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}^+$ выполнено:*

1. $|re^{i\varphi}| = r$, *в частности* $|e^{i\varphi}| = 1$.
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Доказательство. Свойство 1 вытекает непосредственно из определения 4 модуля комплексного числа и основного тригонометрического тождества. Далее для любых $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ имеем равенства

$$e^{z_1}e^{z_2} \overset{\text{О. 6}}{=} e^{x_1}e^{x_2}\big(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)\big) =$$
$$= e^{x_1+x_2}\big(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)\big) \overset{\text{О. 6}}{=} e^{z_1+z_2},$$

из которых вытекает свойство 2. ◀

Следствие 1 утверждения 4 [Формула Муавра]. *Для любого $z = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ при $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство*

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}. \qquad (6)$$

Утверждение 5 (о свойствах модуля комплексного числа). *Для любых $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполнено:*

1. $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
3. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ *при* $z \neq 0$.
4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ *при* $z_2 \neq 0$.

Доказательство. Свойство 1 вытекает непосредственно из определений 3 комплексного сопряжения, 4 модуля комплексного числа. Свойство 2 вытекает из равенств

$$|z_1 z_2| \overset{(4)}{=} \big||z_1|e^{i\varphi_1}|z_2|e^{i\varphi_2}\big| \overset{\text{Утв. 4}}{=} \big||z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\big| \overset{\text{Утв. 4}}{=} |z_1||z_2|.$$

Свойство 3 вытекает из равенств

$$1 = |z^{-1}z| \overset{2}{=} |z^{-1}||z|.$$

Свойство 4 является прямым следствием свойств 2 и 3. ◀

Теорема 2 (об извлечении корня). *Для любых $\alpha, z \in \mathbb{C}$ при $z = |z|e^{i\varphi}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем*

$$\alpha^n = z \iff \alpha \in \{\alpha_k : k \in \overline{0, n-1}\},$$

где числа

$$\alpha_k := \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$$

попарно различны при $k \in \overline{0, n-1}$ в случае $z \neq 0$.

Доказательство. Равенство $\alpha_k^n = z$ для любого $k \in \overline{0, n-1}$ вытекает непосредственно из формулы (6) Муавра. Также

$$\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \in \left[\frac{\varphi}{n}, 2\pi\frac{n-1}{n} + \frac{\varphi}{n}\right] \subset \left[\frac{\varphi}{n}, 2\pi + \frac{\varphi}{n}\right)$$

при всех $k \in \overline{0, n-1}$, отсюда следует (см. замечание 4), что все α_k попарно различны в случае $|z| \neq 0$, то есть в случае $z \neq 0$.

Пусть для некоторого $\alpha = |\alpha|e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ выполнено равенство $\alpha^n = z$, тогда по формуле (6) Муавра получим

$$|\alpha|^n e^{in\theta} = |z|e^{i\varphi}. \tag{7}$$

Так как

$$|\alpha|^n \overset{\text{Утв. 4}}{=} \left||\alpha|^n e^{in\theta}\right| \overset{(7)}{=} \left||z|e^{i\varphi}\right| \overset{\text{Утв. 4}}{=} |z|,$$

имеем

$$|\alpha| = \sqrt[n]{|z|}.$$

Также в случае $z \neq 0$ имеем равенство

$$e^{in\theta} = e^{i\varphi},$$

из которого по утверждению 4 о свойствах комплексной экспоненты получим

$$e^{i(n\theta - \varphi)} = e^0 = 1,$$

а значит, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Так как всегда существуют $k_0 \in \overline{0, n-1}$ и $m \in \mathbb{Z}$, для которых выполнено равенство $k = k_0 + mn$, получим

$$\alpha = \sqrt[n]{|z|}e^{i2\pi m + i\frac{\varphi+2\pi k_0}{n}} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\varphi+2\pi k_0}{n}} = \alpha_{k_0},$$

что и завершает доказательство теоремы. ◀

5.2.2. Многочлены

Определение 7 (алгебраического многочлена от одной переменной). ***Алгебраическим многочленом*** (от одной переменной) над *полем* $\mathcal{R}$ назовём элемент кольца $\mathcal{R}[x]$ *финитных последовательностей* элементов поля $\mathcal{R}$, то есть таких последовательностей, все элементы которых равны нулю начиная с некоторого номера N (см. [5, с. 93]). Для алгебраических многочленов вместо $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ будем использовать обозначения $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ или $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, где $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{R}$.

Определение 8. Пусть $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathcal{R}[x]$ и $a_n \neq 0$. Число

$$\deg(P) := n \in \mathbb{N}_0$$

называется ***степенью*** (ненулевого) многочлена P. Нулевой многочлен будем обозначать символом $\mathbf{0}$. По определению будем полагать, что $\deg(\mathbf{0}) = -\infty$.

Замечание 6. Кольцо многочленов $\mathcal{R}[x]$ определяется аналогичном образом также в случае, когда $\mathcal{R}$ — *произвольное кольцо* (см. [25, с. 118]), однако в нашем курсе в качестве $\mathcal{R}$ рассматриваются только *поля* $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Определение 9 (многочлена от одной переменной). ***Многочленом*** (от одной переменной), соответствующим *алгебраическому многочлену* $P = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{R}[x]$, будем называть функцию $\widetilde{P} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, определённую равенством

$$\widetilde{P}(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

для всех $z \in \mathcal{R}$. Значение функции $\widetilde{P}$ в точке z будем также обозначать $P(z)$ в случаях, когда не возникает двоякого прочтения.

Теорема 3 (о делении с остатком в кольце многочленов). *Пусть $A, B \in \mathcal{R}[x]$, причём $B \neq \mathbf{0}$. Тогда существуют однозначно определённые многочлены $Q, R \in \mathcal{R}[x]$ такие, что*

$$A = QB + R$$

и $\deg(R) < \deg(B)$.

Доказательство. См. [5, с. 96]. ◄

Теорема 4 (Безу). *Пусть $P \in \mathcal{R}[x]$ и $c \in \mathcal{R}$, тогда существует единственный многочлен $Q \in \mathcal{R}[x]$ такой, что*

$$P = (x - c)Q + P(c).$$

Доказательство. При $A := P$, $B := x - c$ по теореме 3 о делении с остатком в кольце многочленов получим существование однозначно определённых многочленов $Q, R \in \mathcal{R}[x]$ таких, что

$$P = (x - c)Q + R$$

и $\deg(R) < \deg(x-c) = 1$, то есть $R = r$, где $r \in \mathcal{R}$. Используя определение 9 многочлена от одной переменной и алгебраические свойства кольца $\mathcal{R}[x]$, получим

$$P(c) = (c-c)Q(c) + R(c) = r,$$

что и требовалось доказать. ◀

Определение 10 (корня многочлена). Элемент $c \in \mathcal{R}$ называется ***корнем многочлена*** $P \in \mathcal{R}[x]$, если $P(c) = 0$ (см. определение 9).

Следствие 2 теоремы 4 Безу. *Элемент $c \in \mathcal{R}$ является корнем многочлена $P \in \mathcal{R}[x]$ $\iff$ существует (единственный) многочлен $Q \in \mathcal{R}[x]$ такой, что*

$$P = (x-c)Q.$$

Определение 11 (корня кратности k). Пусть $k \in \mathbb{N}$. Элемент $c \in \mathcal{R}$ называется k-***кратным*** корнем многочлена $P \in \mathcal{R}[x]$, если

$$P = (x-c)^k Q,$$

где $Q \in \mathcal{R}[x]$ и $Q(c) \neq 0$. Корень кратности 1 называется ***простым корнем***.

Теорема 5 [Основная теорема алгебры]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $P = a_0 + a_1x + \ldots$ $\ldots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$ и $a_n \neq 0$. Тогда существует $c \in \mathbb{C}$ такое, что*

$$P(c) = 0.$$

Доказательство приведено в § 10.4. ◀

Следствие 3 теоремы 4 Безу и теоремы 5 [Основная теорема алгебры]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $P = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$ и $a_n \neq 0$. Тогда существуют $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$P = a_n(x-c_1)\ldots(x-c_n). \tag{8}$$

Из представления (8) вытекает, что $\Omega := \{c_1, \ldots, c_n\}$ — множество всех корней многочлена P и что $\operatorname{card}(\Omega) \leqslant n$. При помощи перестановки и группировки совпадающих сомножителей в (8) получим представление

$$P = a_n(x-z_1)^{\alpha_1}\ldots(x-z_m)^{\alpha_m}, \tag{9}$$

в котором $m \in \overline{1,n}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = n$ и $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$.

Лемма 1. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$; $c \in \mathbb{C}$; $P, Q \in \mathbb{C}[x]$; $P(c), Q(c) \neq 0$ и выполнено равенство*

$$(x-c)^\alpha P = (x-c)^\beta Q. \tag{10}$$

Тогда $\alpha = \beta$.

Доказательство. Пусть $\alpha \neq \beta$. Рассмотрим случай, когда $\beta = \alpha + n$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ (случай $\alpha = \beta + n$ рассматривается аналогично). Из равенства (10) получим равенство

$$(x-c)^{\alpha}(P-(x-c)^{n}Q) = \mathbf{0}.$$

Так как в кольце $\mathbb{C}[x]$ нет делителей нуля и $(x-c)^{\alpha} \neq \mathbf{0}$, то

$$P = (x-c)^{n}Q,$$

а следовательно,

$$P(c) = 0^{n}Q(c) = 0,$$

что противоречит условию леммы. Таким образом, $\alpha = \beta$ и $P = Q$. ◀

Утверждение 6 (о единственности разложения (9) с точностью до перестановки сомножителей). *Пусть $m, m' \in \mathbb{N}$; $\alpha_i, \alpha'_j \in \mathbb{N}$ при всех $i \in \overline{1,m}$, $j \in \overline{1,m'}$; $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$; $z'_i \neq z'_j$ при $i \neq j$ и*

$$(x-z_1)^{\alpha_1}\ldots(x-z_m)^{\alpha_m} = (x-z'_1)^{\alpha'_1}\ldots(x-z'_{m'})^{\alpha'_{m'}}. \tag{11}$$

Тогда $m' = m$ и найдётся перестановка σ чисел $\{1,\ldots,m\}$ такая, что при всех $j \in \overline{1,m}$ выполнены равенства

$$z'_j = z_{\sigma(j)}, \tag{12}$$

$$\alpha'_j = \alpha_{\sigma(j)}. \tag{13}$$

Доказательство. Для каждого $j \in \overline{1,m'}$ выберем произвольный номер $i \in \overline{1,m}$ такой, что $z_i = z'_j$ (отсутствие такого номера i приводит к противоречию), и обозначим его $\sigma(j) := i$. Функция $\sigma\colon \{1,\ldots,m'\} \to \{1,\ldots,m\}$ является *инъективной* в силу того, что числа z'_j попарно различны. Аналогично для произвольного $i_0 \in \overline{1,m}$ получим существование некоторого $j_0 \in \overline{1,m'}$ такого, что $z'_{j_0} = z_{i_0}$. По определению функции σ это означает, что

$$z_{\sigma(j_0)} = z'_{j_0} = z_{i_0},$$

а следовательно, $\sigma(j_0) = i_0$ в силу того, что числа z_i попарно различны. Таким образом, функция σ является *сюръективной*, а следовательно, *биективной*. Отсюда следуют равенство $m' = m$ и тот факт, что функция σ является *перестановкой*, при этом равенство (12) выполнено по определению функции σ. Из равенства (11) получаем равенство

$$(x-z_1)^{\alpha_1}\ldots(x-z_m)^{\alpha_m} = (x-z_{\sigma(1)})^{\alpha'_1}\ldots(x-z_{\sigma(m)})^{\alpha'_m}. \tag{14}$$

Переставляя сомножители в правой части равенства (14) (используя ассоциативность и коммутативность произведения), получим

$$(x-z_1)^{\alpha_1}\ldots(x-z_m)^{\alpha_m} = (x-z_1)^{\alpha'_{\sigma^{-1}(1)}}\ldots(x-z_m)^{\alpha'_{\sigma^{-1}(m)}}, \tag{15}$$

где перестановка σ^{-1} — обратная к σ. Так как числа z_i попарно различны, то по лемме 1 получим

$$\alpha_i = \alpha'_{\sigma^{-1}(i)}$$

при всех $i \in \overline{1,m}$. Подставляя в последнее равенство $i = \sigma(j)$, получим выполнение равенства (13), что и завершает доказательство утверждения. ◀

Лемма 2. *Пусть $P = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$; $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{C}$. Если $P(c) = 0$, то $P(\overline{c}) = 0$.*

Доказательство. Пользуясь свойствами 1 комплексного сопряжения, получим

$$0 = \overline{P(c)} = \overline{a_0 + a_1c + \ldots + a_nc^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{c} + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{c}^n = \\ = a_0 + a_1\overline{c} + \ldots + a_n\overline{c}^n = P(\overline{c}).$$ ◀

Утверждение 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $P = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ и $a_n \neq 0$. Тогда существуют числа $m, k \in \mathbb{N}_0$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ и $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{R}$ при $m \neq 0$; $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{N}$ и $p_1, q_1 \ldots, p_k, q_k \in \mathbb{R}$ при $k \neq 0$ такие, что $m + k \geqslant 1$; $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$; $(p_i, q_i) \neq (p_j, q_j)$ при $i \neq j$; $p_i^2 - 4q_i < 0$ при всех $i \in \overline{1,k}$; $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + 2(\beta_1 + \ldots + \beta_k) = n$ и*

$$P = a_n(x - z_1)^{\alpha_1} \ldots (x - z_m)^{\alpha_m}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_kx + q_k)^{\beta_k}. \quad (16)$$

При этом разложение (16) единственно с точностью до перестановки сомножителей.

Доказательство. Рассмотрим многочлен P как элемент кольца $\mathbb{C}[x]$ (см. замечание 2). Пусть $c = a + ib \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ и $P(c) = 0$. По следствию 2 найдётся многочлен $Q_1 \in \mathbb{C}[x]$ такой, что $P = (x - c)Q_1$. По лемме 2 имеем равенство $P(\overline{c}) = 0$. Так как $c \neq \overline{c}$, то $Q_1(\overline{c}) = 0$. По следствию 2 найдётся многочлен $Q_2 \in \mathbb{C}[x]$ такой, что $Q_1 = (x - \overline{c})Q_2$. Отсюда получим равенство

$$P = Q_2B, \quad (17)$$

в котором

$$B := (x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = (x - a)^2 + b^2. \quad (18)$$

Рассмотрев многочлены P и B как элементы кольца $\mathbb{R}[x]$ и разделив P на B с остатком (см. теорему 3), получим равенство

$$P = QB + R \quad (19)$$

для некоторых многочленов $Q, R \in \mathbb{R}[x]$, где

$$\deg(R) < \deg(B) = 2. \quad (20)$$

Для многочленов P, Q, B, R, рассматриваемых как элементы кольца $\mathbb{C}[x]$, равенство (19) и неравенство (20) также будут выполнены (см. замечание 2). С учётом равенства (17) в силу единственности частного и остатка (см. теорему 3 о делении с остатком в кольце многочленов) получим равенства $Q_2 = Q$ и $R = \mathbf{0}$ в кольце $\mathbb{C}[x]$. Это означает, что многочлен Q_2 в равенстве (17) имеет *вещественные* коэффициенты. Так как $\deg(Q_2) = \deg(P) - 2 = n - 2$, то по индукции получим равенство

$$P = B_1 \ldots B_p Q_0,$$

в котором многочлены $B_1, \ldots B_p$ суть некоторые квадратные трёхчлены вида (18) с отрицательными дискриминантами, а все корни многочлена $Q_0 \in \mathbb{C}[x]$ суть *вещественные числа*, либо $\deg(Q_0) = 0$ (то есть $Q_0 = a_n$). Сгруппировав совпадающие сомножители B_i и воспользовавшись для Q_0 представлением (9), получим искомое равенство (16), в котором все входящие в него многочлены рассмотрены как элементы кольца $\mathbb{C}[x]$. Учитывая замечание 2, то же равенство будет выполнено и в кольце $\mathbb{R}[x]$.

Единственность разложения (16) с точностью до перестановки сомножителей вытекает из единственности соответствующего разложения (9) многочлена P, рассмотренного как элемент кольца $\mathbb{C}[x]$ (см. утверждение 6), в котором каждый сомножитель $(x^2 + px + q)^\beta$ представлен в виде $(x - c)^\beta (x - \overline{c})^\beta$, где $\operatorname{Im} c > 0$. ◀

Следствие 4 утверждения 7. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ *и* $a_n \neq 0$. *Тогда* $\Omega := \{z_1, \ldots, z_m\}$ — *множество всех вещественных корней многочлена* P (*см. формулу* (16)). *При этом* $\operatorname{card}(\Omega) = m \leqslant n$.

Определение 12 (многочлена от многих переменных). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{R}$ — некоторое *поле*. Функция $P : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ называется ***многочленом*** (от n переменных), если она может быть представлена в виде

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{m} c_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

где $m \in \mathbb{N}_0$ и $c_{i_1, \ldots, i_n} \in \mathcal{R}$. При этом число

$$\deg(P) := \max\{i_1 + \ldots + i_n : i_1, \ldots, i_n \in \overline{0, m}, c_{i_1, \ldots, i_n} \neq 0\}$$

называется ***степенью*** ненулевого многочлена P. Нулевой многочлен будем обозначать символом $\mathbf{0}$. По определению будем полагать, что $\deg(\mathbf{0}) = -\infty$.

Замечание 7. Определение *алгебраического многочлена* многих переменных, аналогичное определению 7 алгебраического многочлена от одной переменной, см., например, в [5, с. 127].

5.2.3. Разложение рациональной функции на простейшие дроби

Определение 13 (рациональной функции одной переменной). Пусть $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q \neq \mathbf{0}$ и $\Omega := \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$ — множество вещественных корней многочлена Q. Функцию $R\colon \mathbb{R} \setminus \Omega \to \mathbb{R}$, определённую равенством

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{21}$$

будем называть ***рациональной*** (***рациональной дробью***). Если $\deg(P) < \deg(Q)$, то дробь R будем называть ***правильной***.

Замечание 8. Из теоремы 3 о делении с остатком в кольце многочленов вытекает, что *любая рациональная дробь* вида (21) имеет представление в виде суммы многочлена и *правильной дроби*, то есть

$$R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},$$

где $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$ и $\deg(P_2) < \deg(Q)$. Говоря о рациональных функциях, в дальнейшем мы как правило будем рассматривать именно *правильные дроби*.

Лемма 3. *Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{R} \ni a$ — корень кратности k знаменателя Q правильной рациональной дроби* (21)*, то есть* (см. определение 11 корня кратности k)

$$Q = (x-a)^k N,$$

где $N \in \mathbb{R}[x]$ и $N(a) \neq 0$. Тогда существуют единственные $A \in \mathbb{R}$ и $M \in \mathbb{R}[x]$ такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{M(x)}{(x-a)^{k-1}N(x)} \tag{22}$$

для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$, где $\Omega := \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$. При этом последняя дробь в равенстве (22) *является правильной.*

Доказательство. Сначала докажем единственность. Пусть равенство (22) выполнено для некоторых $A \in \mathbb{R}$ и $M \in \mathbb{R}[x]$ при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$. Тогда

$$P(x) = AN(x) + (x-a)M(x)$$

при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$. Так как Ω является конечным множеством по следствию 4, то по тому же следствию в кольце $\mathbb{R}[x]$ выполнено равенство

$$P - AN = (x-a)M, \tag{23}$$

а значит,

$$P(a) - AN(a) = 0. \tag{24}$$

Из последнего равенства с учётом условия $N(a) \neq 0$ получим

$$A = \frac{P(a)}{N(a)}. \tag{25}$$

В силу следствия 2 теоремы 4 Безу из равенства (24) вытекает существование единственного многочлена $M_1 \in \mathbb{R}[x]$, для которого выполнено равенство

$$P - AN = (x - a)M_1 \tag{26}$$

в кольце $\mathbb{R}[x]$. Из равенств (23) и (26) получим равенство

$$(x - a)(M - M_1) = \mathbf{0}$$

в кольце $\mathbb{R}[x]$, а следовательно,

$$M = M_1,$$

так как в $\mathbb{R}[x]$ нет делителей нуля и $x - a \neq \mathbf{0}$. Отсюда вытекает единственность многочлена M. Так как по условию $\deg(P), \deg(N) \leqslant \deg(Q) - 1$, то из равенства (23) вытекает, что $\deg(M) \leqslant \deg(Q) - 2 < \deg(Q) - 1$. Так как степень знаменателя последней дроби в равенстве (22) равна $\deg(Q) - 1$, то эта дробь правильная.

Для доказательства существования определим число A равенством (25) и положим $M := M_1$, где многочлен M_1 однозначно определён равенством (26). Равенство (22) при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$ проверяется непосредственно, а правильность последней дроби в нём была установлена выше. ◀

Лемма 4. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $c = a + ib \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$, знаменатель Q правильной рациональной дроби* (21) *имеет вид*

$$Q = (x^2 + px + q)^k N,$$

где $N \in \mathbb{R}[x]$, $x^2 + px + q = (x - c)(x - \bar{c})$ и числа $c, \bar{c}$ не являются корнями многочлена N, рассмотренного как элемент кольца $\mathbb{C}[x]$. Тогда существуют единственные $A, B \in \mathbb{R}$ и $M \in \mathbb{R}[x]$ такие, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{M(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} N(x)} \tag{27}$$

для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$, где $\Omega := \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$. При этом последняя дробь в равенстве (27) *является правильной.*

Доказательство. Сначала докажем единственность. Пусть равенство (27) выполнено для некоторых $A, B \in \mathbb{R}$ и $M \in \mathbb{R}[x]$ при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$. Тогда

$$P(x) = (Ax + B)N(x) + (x^2 + px + q)M(x)$$

при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$. Так как Ω является конечным множеством по следствию 4, то по тому же следствию в кольце $\mathbb{R}[x]$ выполнено

$$P - (Ax + B)N = (x^2 + px + q)M. \tag{28}$$

Рассматривая все многочлены, входящие в равенство (28), в кольце $\mathbb{C}[x]$ и подставляя в это равенство $x = c$ и $x = \overline{c}$, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных A, B над полем комплексных чисел:

$$\begin{cases} cA + B = \dfrac{P(c)}{N(c)} =: z \\ \overline{c}A + B = \dfrac{P(\overline{c})}{N(\overline{c})} = \dfrac{\overline{P(c)}}{\overline{N(c)}} = \overline{z}. \end{cases} \tag{29}$$

Так как определитель этой системы равен

$$\det \begin{bmatrix} c & 1 \\ \overline{c} & 1 \end{bmatrix} = 2ib \neq 0,$$

то существует её единственное решение $(A, B) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Взяв комплексное сопряжение от обеих частей уравнений системы (29), получим, что пара $(\overline{A}, \overline{B})$ также является решением этой системы. В силу единственности решения это означает, что $A = \overline{A}$, $B = \overline{B}$, а следовательно, $A, B \in \mathbb{R}$. Для однозначно определённых системой (29) чисел A, B получим, что числа c и $\overline{c}$ являются корнями рассмотренного в кольце $\mathbb{C}[x]$ многочлена

$$P - (Ax + B)N,$$

а следовательно существует единственный многочлен $M_1 \in \mathbb{R}[x]$, для которого выполнено (см. доказательство утверждения 7) равенство

$$P - (Ax + B)N = (x^2 + px + q)M_1. \tag{30}$$

Из равенств (28) и (30) получим равенство

$$(x^2 + px + q)(M - M_1) = \mathbf{0}$$

в кольце $\mathbb{R}[x]$, а следовательно

$$M = M_1,$$

так как в $\mathbb{R}[x]$ нет делителей нуля и $x^2 + px + q \neq \mathbf{0}$. Отсюда вытекает единственность многочлена M. Так как по условию $\deg(P) \leqslant \deg(Q) - 1$, $\deg(N) \leqslant \deg(Q) - 2$, то из равенства (28) вытекает, что $\deg(M) \leqslant \deg(Q) - 3 <$

$< \deg(Q) - 2$. Так как степень знаменателя последней дроби в равенстве (27) равна $\deg(Q) - 2$, то эта дробь правильная.

Для доказательства существования определим числа $A, B \in \mathbb{R}$ из системы (29) и положим $M := M_1$, где многочлен M_1 однозначно определён равенством (30). Равенство (27) при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$ проверяется непосредственно, а правильность последней дроби в нём была установлена выше. ◀

Следствие 5 лемм 3 и 4. *Пусть знаменатель правильной рациональной дроби* (21) *имеет вид* (см. утверждение 7)

$$Q = a_n(x - z_1)^{\alpha_1} \dots (x - z_m)^{\alpha_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_k x + q_k)^{\beta_k}.$$

Тогда существуют однозначно определённые коэффициенты $A, B, C \in \mathbb{R}$ с соответствующими индексами такие, что

$$\begin{gathered}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x - z_1} + \frac{A_2^1}{(x - z_1)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_1}^1}{(x - z_1)^{\alpha_1}} + \dots \\ \dots + \frac{A_1^m}{x - z_m} + \frac{A_2^m}{(x - z_m)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_m}^m}{(x - z_m)^{\alpha_m}} + \\ + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{B_2^1 x + C_2^1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_1}^1 x + C_{\beta_1}^1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}} + \dots \\ \dots + \frac{B_1^k x + C_1^k}{x^2 + p_k x + q_k} + \frac{B_2^k x + C_2^k}{(x^2 + p_k x + q_k)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_k}^k x + C_{\beta_k}^k}{(x^2 + p_k x + q_k)^{\beta_k}}. \qquad (31)\end{gathered}$$

для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega$, где $\Omega := \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$.

Существование представления (31) устанавливается по индукции при помощи последовательного применения лемм 3 и 4. Единственность коэффициентов A, B, C с соответствующими индексами в представлении (31) устанавливается с использованием единственности соответствующих коэффициентов и многочленов в формулах (22), (27) по индукции независимо в каждой цепочке начиная со старшей степени знаменателя. ◀

§ 5.3. Неопределённые интегралы рациональных функций

Согласно замечанию 8, любую рациональную дробь (см. определение 13) можно представить в виде

$$R(x) = P_1(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad (1)$$

где $P_1, P, Q \in \mathbb{R}[x]$ и дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ является *правильной*. Задачей этого параграфа является интегрирование (то есть нахождение первообразной) рациональной функции (1) на произвольном промежутке, не содержащем корней многочлена Q. Интегрирование многочлена P_1 производится при помощи табличного интеграла от степенной функции (см. теорему 1.2) и не вызывает трудностей. Из разложения (2.31) вытекает, что для интегрирования правильной рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ достаточно проинтегрировать дроби вида

$$\frac{1}{(x-z)^k}, \tag{2}$$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}, \tag{3}$$

где $k \in \mathbb{N}$. Интегрирование дробей вида (2) производится при помощи табличного интеграла от степенной функции (см. теорему 1.2) и не вызывает трудностей. Для интегрирования дроби вида (3) воспользуемся представлением (2.18):

$$x^2+px+q = (x-a)^2+b^2 = \left(x - \underbrace{\left(-\frac{p}{2}\right)}_{a}\right)^2 + \left(\underbrace{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}_{b}\right)^2.$$

Получим

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{Bx+C}{\big((x-a)^2+b^2\big)^k}dx \overset{\{t=x-a\}}{=} \int \frac{Bt+D}{(t^2+b^2)^k}dt,$$

где $D := Ba+C$. Далее,

$$\int \frac{t}{(t^2+b^2)^k}dt = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+b^2)}{(t^2+b^2)^k} = \begin{cases} \dfrac{(t^2+b^2)^{1-k}}{2(1-k)} + C \text{ при } k \neq 1, \\ \dfrac{\ln(t^2+b^2)}{2} + C \text{ при } k = 1, \end{cases}$$

и остаётся лишь найти интеграл

$$I_k := \int \frac{dt}{(t^2+b^2)^k}. \tag{4}$$

Применяя формулу интегрирования по частям (см. теорему 1.6), получим

$$I_k = \frac{t}{(t^2+b^2)^k} + 2k\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+b^2)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2+b^2)^k} + 2k\int \frac{(t^2+b^2)-b^2}{(t^2+b^2)^{k+1}}dt =$$
$$= \frac{t}{(t^2+b^2)^k} + 2kI_k - 2kb^2 I_{k+1},$$

отсюда следует рекуррентное соотношение

$$I_{k+1} = \frac{t}{2kb^2(t^2+b^2)^k} + \frac{2k-1}{2kb^2}I_k. \tag{5}$$

Вычислив интеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + b^2} = \frac{1}{b} \int \frac{d\left(\frac{t}{b}\right)}{\left(\frac{t}{b}\right)^2 + 1} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{b}\right) + C,$$

по индукции докажем существование и вычислим все интегралы вида (4) при помощи формулы (5).

§ 5.4. Неопределённые интегралы некоторых тригонометрических и иррациональных функций

5.4.1. Гиперболическая тригонометрия

Определение 1 (гиперболического синуса). Функция

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

называется ***гиперболическим синусом*** (см. график на рис. 9).

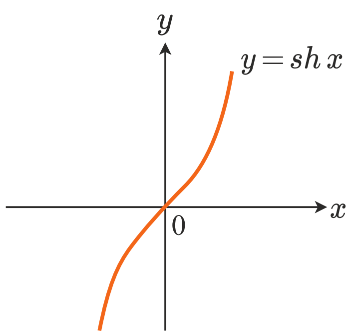


Рис. 9

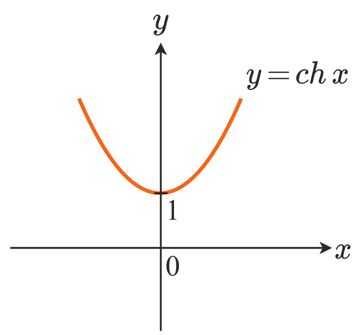


Рис. 10

Определение 2 (гиперболического косинуса). Функция

$$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$$

называется ***гиперболическим косинусом*** (см. график на рис. 10).

Определение 3 (гиперболического тангенса). Функция

$$\operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

называется ***гиперболическим тангенсом*** (см. график на рис. 11).

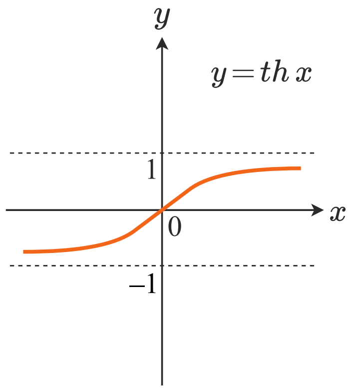


Рис. 11

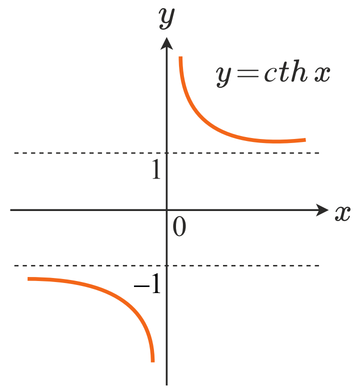


Рис. 12

Определение 4 (гиперболического котангенса). Функция

$$\operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

называется ***гиперболическим котангенсом*** (см. график на рис. 12).

Утверждение 1 (о некоторых свойствах гиперболических функций).

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x, \qquad \operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{th}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{th}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Все перечисленные свойства вытекают непосредственно из определений 1-3, формулы производной экспоненты (см. теорему 4.1.2 о производных простейших элементарных функций) и теоремы 4.1.4 об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями. ◀

Далее рассмотрим вопрос о нахождении функции, *обратной* к гиперболическому синусу. Используя обозначение $t := e^x$ и переписывая уравнение

$$\operatorname{sh} x = y$$

в виде квадратного уравнения

$$t^2 - 2yt - 1 = 0,$$

решим последнее относительно переменной t. С учётом неравенства $t = e^x > 0$ получим

$$t = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

что равносильно равенству

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Утверждение 2. *Функция* $\operatorname{sh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *имеет обратную* (см. определение 0.5.12) *функцию* $\operatorname{arsh} := (\operatorname{sh})^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, называемую **ареасинусом*** (см. график на рис. 13)*, причём для всех* $x \in \mathbb{R}$ *выполнено равенство*

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \tag{1}$$

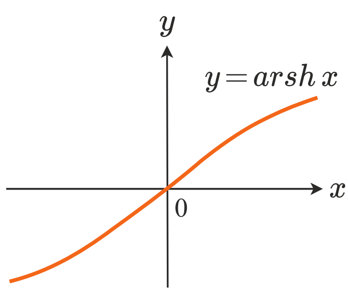


Рис. 13

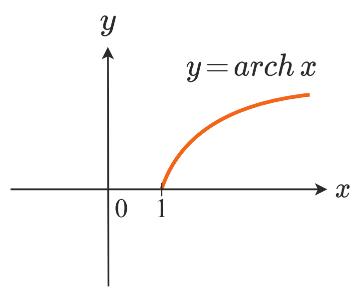


Рис. 14

Аналогично утверждению 2 доказываются следующие утверждения:

Утверждение 3. *Функция* $\operatorname{ch}\colon [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ *имеет обратную* (см. определение 0.5.12) *функцию* $\operatorname{arch}\colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)$*, называемую **ареакосинусом*** (см. график на рис. 14)*, причём для всех* $x \in [1, +\infty)$ *выполнено равенство*

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \tag{2}$$

Утверждение 4. *Функция* $\mathrm{th}\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$ *имеет обратную* (см. определение 0.5.12) *функцию* $\mathrm{arth} := (\mathrm{th})^{-1}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, *называемую* ***ареатангенсом*** (см. график на рис. 15), *причём для всех* $x \in (-1, 1)$ *выполнено равенство*

$$\mathrm{arth}\, x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \tag{3}$$

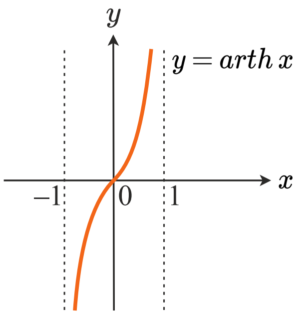


Рис. 15

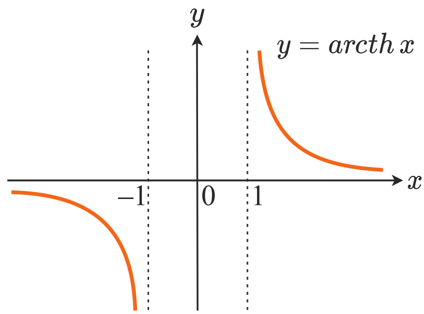


Рис. 16

Утверждение 5. *Функция* $\mathrm{cth}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ *имеет обратную* (см. определение 0.5.12) *функцию* $\mathrm{arcth} := (\mathrm{cth})^{-1}\colon (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \to$ $\to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *называемую* ***ареакотангенсом*** (см. график на рис. 16), *причём для всех* $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ *выполнено равенство*

$$\mathrm{arcth}\, x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right). \tag{4}$$

5.4.2. Нахождение интегралов вида $\int R(\sin t, \cos t)dt$, $\int R(\mathrm{sh}\, t, \mathrm{ch}\, t)dt$

Определение 5 (рациональной функции многих переменных). Пусть $P(x_1, \ldots, x_n), Q(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлены над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел (см. определение 2.12 многочлена от многих переменных), $\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n :$ $Q(\mathbf{x}) = 0\}$. Функцию $R\colon \mathbb{R}^n \setminus \Omega \to \mathbb{R}$, определённую равенством

$$R(x_1, \ldots, x_n) := \frac{P(x_1, \ldots, x_n)}{Q(x_1, \ldots, x_n)}, \tag{5}$$

будем называть ***рациональной*** (***рациональной дробью***).

Пусть $R(x, y)$ — рациональная функция двух переменных. Для нахождения интеграла $\int R(\sin t, \cos t)dt$ на любом промежутке, входящем в область определения подынтегральной функции и не содержащем точек вида $t = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, воспользуемся *универсальной тригонометрической подстановкой*

$$x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

Используя элементарные свойства тригонометрических функций и формулу производной тангенса (см. теорему 4.1.2 о производных простейших элементарных функций), получим

$$\sin t = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad dt = \frac{2dx}{1+x^2}$$

и

$$\int R(\sin t, \cos t)dt = \int R\left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\frac{2dx}{1+x^2} =$$
$$= \int R_1(x)dx \overset{\text{т. 1.4}}{=} \widetilde{R}_1\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right) + C,$$

где R_1 — некоторая *рациональная функция* одной переменной, а $\widetilde{R}_1$ — любая из её первообразных. Итак, задача сводится к интегрированию рациональной функции R_1, подробно разобранному в § 5.3.

Замечание 1. Изложенный выше способ интегрирования функции $R(\sin t, \cos t)$ хотя и обладает универсальностью, но далеко не всегда является самым эффективным. Также его недостатком являются особенности в точках вида $t = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, которых может и не быть у исходной функции. В этом случае необходимо склеивать первообразные, используя утверждение 1.1.

Для нахождения интеграла $\displaystyle\int R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)dt$ на любом промежутке, входящем в область определения подынтегральной функции, воспользуемся *универсальной гиперболической подстановкой*

$$x = \operatorname{th}\frac{t}{2}.$$

Используя утверждение 4.1 о некоторых свойствах гиперболических функций, получим

$$\operatorname{sh} t = \frac{2x}{1-x^2}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{1+x^2}{1-x^2}, \quad dt = \frac{2dx}{1-x^2}$$

и

$$\int R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)dt = \int R\left(\frac{2x}{1-x^2}, \frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\frac{2dx}{1-x^2} =$$
$$= \int R_1(x)dx \overset{\text{т. 1.4}}{=} \widetilde{R}_1\left(\operatorname{th}\frac{t}{2}\right) + C,$$

где R_1 — некоторая *рациональная функция* одной переменной, а $\widetilde{R}_1$ — любая из её первообразных. Итак, задача сводится к интегрированию рациональной функции R_1, подробно разобранному в § 5.3.

Замечание 2. Для нахождения интеграла $\int R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)dt$ также можно использовать замену $x = e^t$, при которой

$$\operatorname{sh} t = \frac{x^2-1}{2x}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{x^2+1}{2x}, \quad dt = \frac{dx}{x}$$

и

$$\int R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)dt = \int R\left(\frac{x^2-1}{2x}, \frac{x^2+1}{2x}\right)\frac{dx}{x} = \int R_2(x)dx \overset{\text{т. 1.4}}{=} \widetilde{R}_2\left(e^t\right) + C,$$

где R_2 — некоторая *рациональная функция* одной переменной, а $\widetilde{R}_2$ — любая из её первообразных, нахождение которых подробно разобрано в § 5.3.

5.4.3. Нахождение интегралов вида $\int R\left(t, \sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)dt$

Пусть $R(x, y)$ — рациональная функция двух переменных (см. определение 5). Для нахождения интеграла $\int R\left(t, \sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)dt$ в случае $ad \neq bc$ (случай $ad = bc$ тривиален) на любом промежутке, входящем в область определения подынтегральной функции, воспользуемся заменой

$$x = \sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}.$$

Используя арифметические свойства производной и элементарные преобразования, получим

$$t = \frac{dx^n - b}{a - cx^n}, \quad dt = \frac{ndx^{n-1}(a - cx^n) + cnx^{n-1}(dx^n - b)}{(a - cx^n)^2}dx,$$

и

$$\int R\left(t, \sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)dt =$$

$$= \int R\left(\frac{dx^n - b}{a - cx^n}, x\right)\frac{ndx^{n-1}(a - cx^n) + cnx^{n-1}(dx^n - b)}{(a - cx^n)^2}dx =$$

$$= \int R_1(x)dx \overset{\text{т. 1.4}}{=} \widetilde{R}_1\left(\sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}\right) + C,$$

где R_1 — некоторая *рациональная функция* одной переменной, а $\widetilde{R}_1$ — любая из её первообразных. Итак, задача сводится к интегрированию рациональной функции R_1, подробно разобранному в § 5.3.

5.4.4. Нахождение интегралов вида $\int R(t, \sqrt{at^2+bt+c})dt$

Пусть $R(x, y)$ — рациональная функция двух переменных (см. определение 5). Так как при $a = 0$ задача нахождения интеграла $\int R(t, \sqrt{at^2+bt+c})dt$ является частным случаем задачи, подробно разобранной в пункте 5.4.3, всюду ниже в настоящем пункте мы будем рассматривать случай $a \neq 0$. Случай, когда $a > 0$ и для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$at^2 + bt + c = a(t - t_0)^2,$$

сводится к интегрированию рациональных функций $R\big(t, \pm\sqrt{a}(t-t_0)\big)$, подробно разобранному в § 5.3. Все остальные случаи при помощи выделения полного квадрата в трёхчлене at^2+bt+c и соответствующей линейной замены сводятся к нахождению одного из трёх простейших интегралов:

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2+1})dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2-1})dx.$$

Для нахождения интеграла $\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$ на любом промежутке $I \subset \subset \mathrm{Dom}\big(R(x, \sqrt{1-x^2})\big) \cap (-1, 1)$ воспользуемся заменой

$$x = \sin t, \;\; t = \arcsin x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Используя свойства тригонометрических функций, получим

$$R(\sin t, \sqrt{1-\sin^2 t}) = R(\sin t, \cos t), \quad dx = \cos t\, dt$$

и

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx \overset{\text{Т. }1.5}{=} G(\arcsin x) + C,$$

где G — любая из первообразных функции $R(\sin t, \cos t)\cos t = R_1(\sin t, \cos t)$, нахождение которых подробно разобрано в пункте 5.4.2. Частный случай описанной выше схемы был ранее разобран в примере 1.2. Также для нахождения рассмотренного интеграла по аналогичной схеме может быть использована замена $x = \cos t$ или $x = \operatorname{th} t$. Ещё один способ нахождения этого интеграла

заключается в применении так называемых *подстановок Эйлера*, одной из которых является замена
$$t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}. \tag{6}$$
Используя арифметические свойства производной и элементарные преобразования, для всех $x \in (-1, 1)$ получим
$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt,$$
$$\sqrt{1-x^2} = t(x+1) = \frac{2t}{1+t^2}$$
и
$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt =$$
$$= \int R_1(t)dt \overset{\text{т. }1.4}{=} \widetilde{R}_1\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}\right) + C,$$
где R_1 — некоторая *рациональная функция* одной переменной, а $\widetilde{R}_1$ — любая из её первообразных. Итак, задача сводится к интегрированию рациональной функции R_1, подробно разобранному в § 5.3.

Отметим, что к полученной формуле также можно прийти, используя в исходном интеграле замену $x = \cos t$, $t = \arccos x \in (0, \pi)$, а затем применяя универсальную тригонометрическую подстановку (см. пункт 5.4.2).

Для нахождения интеграла $\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx$ на любом промежутке, входящем в область определения подынтегральной функции, воспользуемся заменой
$$x = \operatorname{sh} t, \ t = \operatorname{arsh} x \in \mathbb{R}.$$
Используя утверждение 4.1, получим
$$R(\operatorname{sh} t, \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}) = R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t), \quad dx = \operatorname{ch} t\, dt$$
и
$$\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx \overset{\text{т. }1.5}{=} G(\operatorname{arsh} x) + C,$$
где G — любая из первообразных функции $R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)\operatorname{ch} t = R_1(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$, нахождение которых подробно разобрано в пункте 5.4.2. Также для нахождения

рассмотренного интеграла по аналогичной схеме может быть использована замена $x = \operatorname{tg} t$ или $x = \operatorname{ctg} t$. Одной из *подстановок Эйлера*, позволяющих найти этот интеграл, является замена

$$t = x + \sqrt{x^2+1}. \tag{7}$$

Используя арифметические свойства производной и элементарные преобразования, для всех $x \in \mathbb{R}$ получим

$$x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2+1} = t - x = \frac{t^2+1}{2t}$$

и

$$\int R(x, \sqrt{1+x^2})dx = \int R\left(\frac{t^2-1}{2t}, \frac{t^2+1}{2t}\right)\frac{t^2+1}{2t^2}dt =$$
$$= \int R_1(t)dt \overset{\text{т. 1.4}}{=} \widetilde{R}_1\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C,$$

где R_1 — некоторая *рациональная функция* одной переменной, а $\widetilde{R}_1$ — любая из её первообразных. Итак, задача сводится к интегрированию рациональной функции R_1, подробно разобранному в § 5.3.

Для нахождения интеграла $\displaystyle\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$ на любом промежутке $I \subset \subset \operatorname{Dom}\big(R(x, \sqrt{x^2-1})\big) \cap (1, +\infty)$ воспользуемся заменой

$$x = \operatorname{ch} t, \; t = \operatorname{arch} x \in (0, +\infty).$$

Используя утверждение 4.1, получим

$$R(\operatorname{ch} t, \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}) = R(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t), \quad dx = \operatorname{sh} t\, dt$$

и

$$\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx \overset{\text{т. 1.5}}{=} G(\operatorname{arch} x) + C,$$

при этом (см. пункт 5.4.2) первообразная G функции $R(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)\operatorname{sh} t$ удовлетворяет равенству

$$G(t) = \widetilde{R}_1\left(\operatorname{th}\frac{t}{2}\right), \tag{8}$$

где функция $\widetilde{R}_1$ является произвольной первообразной рациональной функции

$$R_1(u) = \frac{4u}{(1-u^2)^2} R\left(\frac{1+u^2}{1-u^2}, \frac{2u}{1-u^2}\right). \tag{9}$$

Из утверждения 4.1 вытекают равенства

$$\operatorname{th}^2 t = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, \quad \operatorname{ch}^2 t = \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2},$$

из которых при $t = \dfrac{\operatorname{arch} x}{2}$ получим

$$\operatorname{th}^2 \frac{\operatorname{arch} x}{2} = 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Таким образом, при $x \in (1, +\infty)$ имеем равенство

$$\operatorname{th} \frac{\operatorname{arch} x}{2} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}},$$

которое перепишем в виде

$$\operatorname{th} \frac{\operatorname{arch} x}{2} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} =: v(x). \tag{10}$$

Из элементарно проверяемых для любого $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ равенств

$$\frac{1+v^2(x)}{1-v^2(x)} = x, \quad \frac{2v(x)}{1-v^2(x)} = \sqrt{x^2-1} \tag{11}$$

и из равенства (9) вытекает, что функция $R_1 \circ v$ корректно определена во всех точках множества $\Omega := \operatorname{Dom}\big(R(x, \sqrt{x^2-1})\big) \setminus \{-1, 1\}$. Используя для представления первообразной $\widetilde{R}_1$ функции R_1 формулы, полученные в § 5.3, определим её на всём множестве $\operatorname{Dom}(f)$. Таким образом получим, что функция $\widetilde{R}_1 \circ v$ корректно определена на множестве Ω. Из равенств (9), (10), (11), используя теорему 4.1.3 о дифференцируемости композиции функций и арифметические свойства производной, для всех $x \in \Omega$ получим равенство

$$(\widetilde{R}_1 \circ v)'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} R_1\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right) = R(x, \sqrt{x^2-1}).$$

Таким образом, доказано следующее

Утверждение 6.

$$\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx = \widetilde{R}_1\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right) + C$$

на любом промежутке $I \subset \operatorname{Dom}\big(R(x, \sqrt{x^2-1})\big) \setminus \{-1, 1\}$, *где функция* $\widetilde{R}_1$ *является произвольной первообразной функции* R_1, *определённой равенством* (9).

Утверждение 6 можно также доказать непосредственно, осуществляя замену

$$t = v(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$$

в исходном интеграле, являющуюся *подстановкой Эйлера* того же типа, что и (6). Используя арифметические свойства производной и элементарные преобразования, для всех $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ получим

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2-1} = t(x+1) = \frac{2t}{1-t^2}$$

и

$$\int R(x,\sqrt{x^2-1})dx = \int R\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt =$$

$$= \int R_1(t)dt \overset{\text{Т. } 1.4}{=} \widetilde{R}_1\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right) + C.$$

Замечание 3. Аналогично доказательству утверждения 6 устанавливается равенство

$$\int R(x,\sqrt{x^2-1})dx = \widetilde{R}_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C \qquad (12)$$

на любом промежутке $I \subset \mathrm{Dom}\big(R(x,\sqrt{x^2-1})\big) \setminus \{-1,1\}$, где функция $\widetilde{R}_2$ является произвольной первообразной функции (см. замечание 2)

$$R_2(u) = \frac{u^2-1}{2u^2}R\left(\frac{u^2+1}{2u}, \frac{u^2-1}{2u}\right).$$

Отметим, что функция $w(x) := x+\sqrt{x^2-1}$ тождественно совпадает с функцией $e^{\operatorname{arch} x}$ при $x \in [1,+\infty)$, по аналогичным соображениям мы определили функцию $v(x)$ равенством (10).

Формулу (12) можно также получить непосредственно, осуществляя замену

$$t = w(x) = x + \sqrt{x^2-1}$$

в исходном интеграле, являющуюся *подстановкой Эйлера* того же типа, что и (7).

Замечание 4. Из того, что функции $R(x,\sqrt{x^2-1})$, $R(x,\sqrt{1-x^2})$ непрерывны на своих областях определения как композиции непрерывных функций (см. теорему 9.1.8′) и из утверждения 1.2 вытекает, что в случае принадлежности одной из точек $\{-1,1\}$ области определения соответствующей функции её первообразную можно также доопределить в этой точке, как это продемонстрировано на примере 1.3.

Глава 6

Интеграл Римана

§ 6.1. Определённый интеграл

6.1.1. Основные определения

Определение 1 (разбиения отрезка). Вектор $P = (x_0, \ldots, x_n)$ при $n \in \mathbb{N}$ называется ***разбиением*** отрезка $[a, b]$ при $a < b$, если $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Разбиением отрезка $[a, a]$ называется вектор $P = (x_0, x_1) \coloneqq (a, a)$. Для i-го отрезка разбиения P будем использовать обозначение $\Delta_i \coloneqq [x_{i-1}, x_i]$.

Определение 2 (размеченного разбиения отрезка). Пара векторов $(P, \boldsymbol{\xi})$, где $P = (x_0, \ldots, x_n)$ — *разбиение* отрезка $[a, b]$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ при всех $i \in \overline{1, n}$ называется ***размеченным разбиением*** отрезка $[a, b]$ и обозначается $P_{\boldsymbol{\xi}} = (P, \boldsymbol{\xi})$.

Определение 3 (измельчения). Разбиение P' называется ***измельчением*** разбиения P того же отрезка, если все элементы P также являются элементами P'.

Определение 4 (объединения разбиений). Разбиение R называется ***объединением*** разбиений P и Q отрезка $[a, b]$, если R включает в себя все элементы P и Q, и только их. *Обозначение*: $R = P \cup Q$.

Определение 5 (интегральной суммы). Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$, $P_{\boldsymbol{\xi}}$ — его *размеченное разбиение*. Тогда число

$$\sigma(f, P, \boldsymbol{\xi}) = \sigma(f, P_{\boldsymbol{\xi}}) = \sigma(P_{\boldsymbol{\xi}}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = |\Delta_i| \coloneqq x_i - x_{i-1}$ и $n = n(P)$, называется ***интегральной суммой*** функции f, соответствующей *размеченному разбиению* $P_{\boldsymbol{\xi}}$.

Определение 6 (диаметра разбиения). Число $d(P_{\boldsymbol{\xi}}) = d(P) = \max\limits_{i \in \overline{1,n}} \Delta x_i$ называется ***диаметром*** (размеченного) разбиения P ($P_{\boldsymbol{\xi}}$).

Определение 7 (интеграла Римана). Пусть $[a,b]\subset\mathrm{Dom}(f)$. Число $I\in\mathbb{R}$ называется ***интегралом Римана*** от функции f по отрезку $[a,b]$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon\ \forall P_{\boldsymbol{\xi}}\ \ d(P_{\boldsymbol{\xi}})<\delta\implies|\sigma(P_{\boldsymbol{\xi}})-I|=\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon,$$

где $P_{\boldsymbol{\xi}}$ — *размеченное разбиение* отрезка $[a,b]$, $n=n(P)$. Для интеграла Римана используются следующие обозначения:

$$I=\int\limits_a^b f(x)dx=(R)\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{[a,b]}f(x)dx=(R)\int\limits_{[a,b]}f(x)dx.$$

В случае существования такого числа I функция f называется ***интегрируемой по Риману*** на отрезке $[a,b]$. Через $R[a,b]$ будем обозначать класс всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$. Если $a<b$ и $f\in R[a,b]$, то по определению положим

$$\int\limits_b^a f(x)dx:=-\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Замечание 1. Из определения 7 вытекает равенство

$$\int\limits_a^a f(x)dx=0$$

для любой функции f, определённой в точке a.

Замечание 2. Если ко множеству $\{P_{\boldsymbol{\xi}}\}$ всех размеченных разбиений отрезка $[a,b]$ добавить ещё один элемент, который мы обозначим символом ∞, а затем объявить открытыми множества $\{P_{\boldsymbol{\xi}}\,:\,d(P_{\boldsymbol{\xi}})<\delta\}\cup\{\infty\}$ для всех $\delta>0$, а также $\varnothing$ и всё множество $\Omega:=\{P_{\boldsymbol{\xi}},\infty\}$, то Ω превращается в *топологическое пространство* (см. определение 10.2.12), на котором (всюду кроме точки ∞) определена функция $\sigma: P_{\boldsymbol{\xi}}\mapsto\sigma(P_{\boldsymbol{\xi}})$, а интеграл Римана по определению 7 есть не что иное, как *предел функции* σ в точке ∞ (см. определение 10.2.24). При этом вместо $P_{\boldsymbol{\xi}}\to\infty$ используют обозначение $d(P_{\boldsymbol{\xi}})\to 0$ или просто $d(P)\to 0$. Таким образом, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx:=\lim_{d(P_{\boldsymbol{\xi}})\to 0}\sigma(P_{\boldsymbol{\xi}})=\lim_{d(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n(P)}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

При этом для интеграла Римана сохраняются общие свойства предела функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$, такие как его единственность (см. замечание 10.2.9), теорема 10.2.2 о предельном переходе в неравенстве, теорема 10.2.3 [Принцип двустороннего ограничения], теорема 10.2.4 [Критерий Коши существования предела функции] и теорема 10.2.5 об арифметических свойствах предела.

Пример 1. Пусть $f(x) \equiv c \in \mathbb{R}$. Если $a \leqslant b$, то для любого размеченного разбиения $P_{\boldsymbol{\xi}}$ отрезка $[a, b]$ имеем $\sigma(f, P_{\boldsymbol{\xi}}) = c(b-a)$, а значит, по определению 7

$$\int\limits_a^b c dx = c(b-a).$$

Это же равенство верно и в случае $b < a$, достаточно поменять a и b местами.

Теорема 1 (о необходимом условии интегрируемости).

$$f \in R[a, b] \implies f \text{ ограничена на } [a, b].$$

Доказательство. Пусть f *неограничена* на $[a, b]$. Тогда при любом разбиении P отрезка $[a, b]$ функция f окажется неограниченной хотя бы на одном из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения P. Это означает, что за счёт выбора точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ можно сделать величину $f(\xi_i)\Delta x_i$, а значит, и интегральную сумму $\sigma(P_{\boldsymbol{\xi}})$, сколь угодно большой по модулю. Но это противоречит утверждению 10.2.1 о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел для функции σ (см. замечание 2).

Противоречие можно получить и напрямую: зафиксируем произвольно выбранные точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ при $k \in \overline{1, n} \setminus \{i\}$, обозначим

$$c := \sum_{k \in \overline{1,n} \setminus \{i\}} f(\xi_k)\Delta x_k$$

и выберем $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(\xi_i)| \geqslant \frac{|c| + |I| + 1}{\Delta x_i}. \tag{1}$$

Получим *размеченное разбиение* P_ξ, для которого

$$|\sigma(P_\xi) - I| \geqslant |\sigma(P_\xi)| - |I| = |c + f(\xi_i)\Delta x_i| - |I| \geqslant |f(\xi_i)|\Delta x_i - |c| - |I| \overset{(1)}{\geqslant} 1,$$

что противоречит определению 7 интеграла Римана. ◀

Замечание 3. Ограниченность функции на $[a, b]$ ***не является*** достаточным условием её интегрируемости на $[a, b]$.

Действительно, рассмотрим функцию Дирихле:

$$D(x) := \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Пусть P — *произвольное* разбиение невырожденного отрезка $[a, b]$. Для всех $i \in \overline{1, n}$ будем выбирать $\xi_i' \in \mathbb{Q}$, $\xi_i'' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогда

$$\sigma(D, P_{\boldsymbol{\xi}'}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a,$$

в то время как

$$\sigma(D, P_{\boldsymbol{\xi}''}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Таким образом, интегральные суммы не могут иметь предела при $d(P_{\boldsymbol{\xi}}) \to 0$, то есть функция D *ограничена* на отрезке $[a, b]$, но *не интегрируема по Риману* на нём. ◀

Определение 8 (колебания функции). Пусть $\mathrm{Dom}(f) \supset \Omega \neq \varnothing$. ***Колебанием*** функции f на множестве Ω называется число

$$\omega(f, \Omega) := \sup_{x \in \Omega} f(x) - \inf_{x \in \Omega} f(x) = \sup_{\xi_1, \xi_2 \in \Omega} |f(\xi_1) - f(\xi_2)|.$$

В силу теоремы 1 о необходимом условии интегрируемости всюду далее в этом параграфе будем рассматривать произвольную *ограниченную* на отрезке $[a, b]$ функцию f. Для такой функции и *произвольного* разбиения P отрезка $[a, b]$ определены числа

$$m_k := \inf_{x \in \Delta_k} f(x), \quad M_k := \sup_{x \in \Delta_k} f(x) \text{ и}$$

$$\omega_k = \omega_k(f) := \omega(f, \Delta_k) = \omega(f, [x_{k-1}, x_k]) = M_k - m_k = \sup_{\xi_1, \xi_2 \in \Delta_k} |f(\xi_1) - f(\xi_2)|.$$

Определение 9 (нижней и верхней сумм). Пусть P — *разбиение* отрезка $[a, b]$. Числа

$$s_*(P) = \underline{S}(P) = s(P) := \sum_{i=1}^{n(P)} m_i \Delta x_i, \quad S^*(P) = \overline{S}(P) = S(P) := \sum_{i=1}^{n(P)} M_i \Delta x_i$$

будем называть соответственно ***нижней*** и ***верхней суммами Дарбу*** функции f для разбиения P.

Замечание 4. Суммы Дарбу, вообще говоря, ***не являются*** интегральными суммами.

6.1.2. Свойства сумм Дарбу

Лемма 1. *Для любого размеченного разбиения $P_{\boldsymbol{\xi}}$ отрезка $[a, b]$ имеем*

$$s_*(P) \leqslant \sigma(P_{\boldsymbol{\xi}}) \leqslant S^*(P).$$

Доказательство. Для любого $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ имеем $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$, таким образом,

$$\sum_k m_k \Delta x_k \leqslant \sum_k f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_k M_k \Delta x_k. \qquad ◀$$

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon > 0$, P — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда $\exists \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$:*

$$0 \leqslant S^*(P) - \sigma(P_{\boldsymbol{\xi}}) < \varepsilon, \quad 0 \leqslant \sigma(P_{\boldsymbol{\eta}}) - s_*(P) < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $a < b$ (случай $a = b$ тривиален). По определению $\sup$ и $\inf$ найдутся точки $\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ такие, что

$$0 \leqslant M_k - f(\xi_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{и} \quad 0 \leqslant f(\eta_k) - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

отсюда

$$0 \leqslant \sum_k M_k \Delta x_k - \sum_k f(\xi_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_k \Delta x_k = \varepsilon,$$
$$0 \leqslant \sum_k f(\eta_k)\Delta x_k - \sum_k m_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_k \Delta x_k = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. ◀

Следствие 1 лемм 1 и 2. *Для любого разбиения P отрезка $[a, b]$ имеем:*

$$S^*(P) = \sup_{\boldsymbol{\xi}} \sigma(P_{\boldsymbol{\xi}}), \quad s_*(P) = \inf_{\boldsymbol{\eta}} \sigma(P_{\boldsymbol{\eta}}).$$

Лемма 3. *Пусть P' — измельчение некоторого разбиения P отрезка $[a, b]$. Тогда*

$$S^*(P') \leqslant S^*(P), \quad s_*(P) \leqslant s_*(P').$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда P' получается из P добавлением одной точки $\overline{x}$ (общий случай рассматривается по индукции). Пусть $\overline{x} \in$ $\in (x_{k-1}, x_k)$. Обозначим

$$M_k := \sup_{x \in \Delta_k} f(x), \; M_k' := \sup_{x \in [x_{k-1}, \overline{x}]} f(x), \; M_k'' := \sup_{x \in [\overline{x}, x_k]} f(x).$$

Имеем

$$M_k',\ M_k'' \leqslant M_k \text{ и } S^*(P)-S^*(P') = M_k\Delta x_k - [M_k'(\overline{x}-x_{k-1})+M_k''(x_k-\overline{x})] \geqslant 0.$$

Второе неравенство проверяется аналогично. ◀

Лемма 4. *Пусть P_1, P_2 — произвольные разбиения отрезка $[a,b]$. Тогда*

$$s_*(P_1) \leqslant S^*(P_2).$$

Доказательство. Пусть $P := P_1 \cup P_2$. Тогда имеем

$$s_*(P_1) \overset{\text{л. }3}{\leqslant} s_*(P) \overset{\text{л. }1}{\leqslant} S^*(P) \overset{\text{л. }3}{\leqslant} S^*(P_2).$$ ◀

Следствие 2 леммы 4. *Множество нижних сумм ограниченной функции f ограничено сверху, а множество её верхних сумм ограничено снизу.*

Определение 10 (нижнего и верхнего интеграла Дарбу). Числа

$$I_* = \underline{I} := \sup_P s_*(P) \quad \text{и} \quad I^* = \overline{I} := \inf_P S^*(P),$$

где $\inf$ и $\sup$ берутся по всевозможным разбиениям P отрезка $[a,b]$, называются соответственно ***нижним*** и ***верхним интегралами Дарбу*** функции f по отрезку $[a,b]$.

Лемма 5. $I_* \leqslant I^*$.

Доказательство. Пусть $I_* > I^*$, тогда положим $\varepsilon := I_* - I^* > 0$. По определению 10 существуют P_1, P_2 — разбиения $[a,b]$ такие, что

$$S^*(P_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } s_*(P_2) > I_* - \frac{\varepsilon}{2} \iff \begin{cases} I_* < s_*(P_2) + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ -I^* < \dfrac{\varepsilon}{2} - S^*(P_1) \end{cases} \overset{(+)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(+)}{\Longrightarrow} \varepsilon = I_* - I^* < s_*(P_2) - S^*(P_1) + \varepsilon \implies s_*(P_2) > S^*(P_1),$$

получим противоречие с утверждением леммы 4. ◀

Замечание 5. Лемма 5 также напрямую вытекает из леммы 4 и принципа 1.4.2 полноты, в силу которого найдётся ξ такое, что $s_*(P_1) \leqslant \xi \leqslant S^*(P_2)$ для всех разбиений P_1, P_2 отрезка $[a,b]$, а следовательно $I_* \leqslant \xi \leqslant I^*$ по определению 1.3.3.

Лемма 6. *Пусть P' — измельчение некоторого разбиения P, полученное путём добавления l произвольных точек. Тогда*

$$S^*(P) - S^*(P') \leqslant (M - m)ld(P), \tag{2}$$

$$s_*(P') - s_*(P) \leqslant (M - m)ld(P), \tag{3}$$

где $m := \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M := \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Доказательство. Пусть $l = 1$. Тогда, аналогично доказательству леммы 3, но с использованием неравенств

$$M_k \leqslant M \quad \text{и} \quad m \leqslant M_k', M_k'',$$

получим

$$S^*(P) - S^*(P') = M_k \Delta x_k - \left[M_k'(\overline{x} - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \overline{x})\right] \leqslant$$
$$\leqslant (M - m)\Delta x_k \leqslant (M - m)d(P).$$

Далее предположим, что неравенство (2) выполнено для некоторого $l \in \mathbb{N}$ (*предположение индукции*). Добавляя к разбиению P' одну точку, получим произвольное измельчение P'' разбиения P, полученное путём добавления $l+1$ точек. Используя очевидное неравенство $d(P') \leqslant d(P)$, получим

$$S^*(P) - S^*(P'') = S^*(P) - S^*(P') + S^*(P') - S^*(P'') \leqslant$$
$$\leqslant (M - m)ld(P) + (M - m)d(P') \leqslant (M - m)(l + 1)d(P),$$

что и завершает доказательство неравенства (2) по индукции. Неравенство (3) устанавливается аналогично. ◀

Определение 11. Пусть на множестве $\{P\}$ разбиений отрезка $[a, b]$ определена некоторая функция $s : \{P\} \to \mathbb{R}$. Будем использовать обозначение

$$A = \lim_{d(P) \to 0} s(P),$$

если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon\ \forall P\ \ d(P) < \delta \implies |s(P) - A| < \varepsilon.$$

О том, как задать на множестве разбиений отрезка $[a, b]$ топологию так, чтобы введённый предел корректно определялся в этом топологическом пространстве, см. замечание 2, где аналогичный предел рассматривался для функции, определённой на множестве *размеченных разбиений*.

Теорема 2 [Основная лемма Дарбу]. *Для любой ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f выполнено:*

$$I^* = \lim_{d(P)\to 0} S^*(P), \ I_* = \lim_{d(P)\to 0} s_*(P).$$

Доказательство. Как и выше, будем обозначать

$$m := \inf_{x\in[a,b]} f(x), \ M := \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Если $m = M$, то $f(x) \equiv const$ и утверждение теоремы верно.

Пусть $M > m$. Из определения 10 нижнего и верхнего интеграла Дарбу вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение P_1 отрезка $[a, b]$ такое, что

$$S^*(P_1) - I^* < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим через l число точек разбиения P_1. Положим

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2l(M-m)}.$$

Пусть P — произвольное разбиение, у которого $d(P) < \delta$. Положим $P' := P \cup P_1$, тогда

$$0 \overset{\text{Л. } 3}{\leqslant} S^*(P) - S^*(P') \overset{\text{Л. } 6}{\leqslant} (M-m)ld(P) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Также из неравенств $I^* \overset{\text{О. } 10}{\leqslant} S^*(P') \overset{\text{Л. } 3}{\leqslant} S^*(P_1)$ следует, что

$$0 \leqslant S^*(P') - I^* \leqslant S^*(P_1) - I^* < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Суммируя соответствующие неравенства в (4) и (5), получим неравенство

$$0 \leqslant S^*(P) - I^* < \varepsilon,$$

верное для всех разбиений $P : d(P) < \delta$. По определению 11 имеем

$$\lim_{d(P)\to 0} S^*(P) = I^*.$$

Равенство $\lim\limits_{d(P)\to 0} s_*(P) = I_*$ устанавливается аналогично. ◀

Теорема 3 [Критерии интегрируемости]. *Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда следующие условия равносильны:*

1. $f \in R[a,b]$;
2. $\lim\limits_{d(P)\to 0}\big(S^*(P) - s_*(P)\big) = \lim\limits_{d(P)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n(P)}\omega_k\Delta x_k = 0$;
3. $\forall\varepsilon > 0\ \exists P\colon S^*(P) - s_*(P) = \sum\limits_{k=1}^{n(P)}\omega_k\Delta x_k < \varepsilon$;
4. $I^* = I_*$.

Доказательство будем проводить по схеме $1 \implies 2 \implies 3 \implies 4 \implies 1$.

$1 \implies 2$: По определению 7 интеграла Римана для некоторого числа I для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любых размеченных разбиений $P_{\boldsymbol{\xi}}$, $P_{\boldsymbol{\eta}}$ отрезка $[a,b]$ при $d(P) < \delta$ имеем

$$|\sigma(P_{\boldsymbol{\xi}}) - I| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{и} \quad |\sigma(P_{\boldsymbol{\eta}}) - I| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{6}$$

Для *любого* разбиения P в силу леммы 2 найдутся $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ такие, что

$$S^*(P) - \sigma(P_{\boldsymbol{\xi}}) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{и} \quad \sigma(P_{\boldsymbol{\eta}}) - s_*(P) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{7}$$

Тогда при $d(P) < \delta$ в силу неравенств (6) и (7) имеем

$$\begin{gathered}
S^*(P) - s_*(P) = |S^*(P) - s_*(P)| = \\
= |S^*(P) - \sigma(P_{\boldsymbol{\xi}}) + \sigma(P_{\boldsymbol{\xi}}) - I + I - \sigma(P_{\boldsymbol{\eta}}) + \sigma(P_{\boldsymbol{\eta}}) - s_*(P)| \leqslant \\
\leqslant |S^*(P) - \sigma(P_{\boldsymbol{\xi}})| + |\sigma(P_{\boldsymbol{\xi}}) - I| + |I - \sigma(P_{\boldsymbol{\eta}})| + |\sigma(P_{\boldsymbol{\eta}}) - s_*(P)| < \\
< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{gathered}$$

$2 \implies 3$: Очевидно.

$3 \implies 4$: Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение P отрезка $[a,b]$ такое, что $S^*(P) - s_*(P) < \varepsilon$, тогда

$$s_*(P) \overset{\text{о. }10}{\leqslant} I_* \overset{\text{л. }5}{\leqslant} I^* \overset{\text{о. }10}{\leqslant} S^*(P) \implies \begin{cases} -I_* + s_*(P) \leqslant 0 \\ I^* - S^*(P) \leqslant 0 \end{cases} \overset{(+)}{\implies}$$

$$\overset{(+)}{\implies} I^* - I_* \leqslant S^*(P) - s_*(P) < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получим $I^* = I_*$.

$4 \implies 1$: Пусть $I^* = I_* =: A$. Для размеченных разбиений $P_{\boldsymbol{\xi}}$ отрезка $[a,b]$ в силу леммы 1 и теоремы 2 [Основная лемма Дарбу] имеем

$$\begin{array}{ccccc} s_*(P) \leqslant \sigma(P_{\boldsymbol{\xi}}) & \leqslant & S^*(P) & \implies & \lim\limits_{d(P_{\boldsymbol{\xi}})\to 0}\sigma(P_{\boldsymbol{\xi}}) = A \\ \big\downarrow{\scriptstyle d(P)\to 0} & & \big\downarrow{\scriptstyle d(P)\to 0} & & \\ A & & A & & \end{array}$$

по принципу *двустороннего ограничения* (для формального применения этого принципа достаточно положить $s_*(P_{\boldsymbol{\xi}}) := s_*(P)$ и $S^*(P_{\boldsymbol{\xi}}) := S^*(P)$ для всех размеченных разбиений $P_{\boldsymbol{\xi}}$ отрезка $[a,b]$, а затем воспользоваться теоремой 10.2.3 [Принцип двустороннего ограничения]). ◀

6.1.3. Классы интегрируемых функций

Теорема 4 (об интегрируемости непрерывной функции). $C[a,b] \subset$ $\subset R[a,b]$.

Доказательство. Пусть $a < b$ (случай $a = b$ тривиален). Для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f \in C[a,b]$ по теореме 3.9.1 Кантора–Гейне найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $\xi', \xi'' \in [a,b]$ из $|\xi' - \xi''| < \delta$ следует $|f(\xi') - f(\xi'')| < \varepsilon/(b-a)$. Таким образом, для любого разбиения P отрезка $[a,b]$ такого, что $d(P) < \delta$, и при всех $k \in \overline{1,n}$ в силу теоремы 3.2.5 [Вторая теорема Вейерштрасса] имеем

$$\omega_k = M_k - m_k = f(\xi_k') - f(\xi_k'') < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

отсюда получаем

$$\sum_{k=1}^{n(P)} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n(P)} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Таким образом, $f \in R[a,b]$ по теореме 3 [Критерии интегрируемости]. ◀

Теорема 5 (об интегрируемости монотонной функции). *Если функция f монотонна на отрезке $[a,b]$, то $f \in R[a,b]$.*

Доказательство. Пусть f не убывает (случай невозрастания рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции f на -1). Если $f(a) =$ $= f(b)$, то $f(x) \equiv const$, и утверждение теоремы верно. Пусть $f(a) < f(b)$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta := \varepsilon/\big(f(b) - f(a)\big)$. Тогда для любого разбиения P отрезка $[a,b]$ такого, что $d(P) < \delta$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n(P)} \omega_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n(P)} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n(P)} \big[f(x_k) - f(x_{k-1})\big]\Delta x_k <$$
$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^{n(P)} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \big[f(b) - f(a)\big] = \varepsilon$$

и $f \in R[a,b]$ по теореме 3 [Критерии интегрируемости]. ◀

Теорема 6. *Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$, Ω — множество точек её разрыва на этом отрезке. Пусть* $\forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}$: $\Omega\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k,b_k)$ *и*

$$\sum_{k=1}^{n}|(a_k,b_k)|=\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\varepsilon$$

(другими словами, множество Ω имеет жорданову меру нуль). Тогда $f\in$ $\in R[a,b]$.

Доказательство. Как и ранее, будем обозначать $m:=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, $M:=$ $:=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$. Если $m=M$, то $f(x)\equiv const$ и утверждение теоремы верно.

Пусть $M>m$. Для любого $\varepsilon>0$ найдётся $n\in\mathbb{N}$ такое, что

$$\Omega\subset B:=\bigcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k)\quad\text{и}\quad\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\frac{\varepsilon}{2(M-m)}.$$

Пусть $[a,b]\not\subset B$, тогда существует представление множества

$$B\cap[a,b]=[c_1,d_1)\sqcup(c_2,d_2)\sqcup\ldots\sqcup(c_{q-1},d_{q-1})\sqcup(c_q,d_q]\supset\Omega$$

в виде объединения *непересекающихся (полу)интервалов*, где $a=c_1\leqslant d_1\leqslant$ $c_2<d_2\leqslant\ldots\leqslant c_{q-1}<d_{q-1}\leqslant c_q\leqslant d_q=b$ и $q\geqslant 2$, при этом

$$\sum_{k=1}^{q}(d_k-c_k)<\frac{\varepsilon}{2(M-m)}. \tag{8}$$

Тогда

$$A:=[a,b]\setminus B=\bigsqcup_{k=1}^{q-1}[d_k,c_{k+1}].$$

В силу $f\in C[d_k,c_{k+1}]$ при всех $k\in\overline{1,q-1}$ по теореме 4 об интегрируемости непрерывной функции имеем $f\in R[d_k,c_{k+1}]$, отсюда следует существование разбиений P_k отрезков $[d_k,c_{k+1}]$ таких, что $S^*(P_k)-s_*(P_k)<\varepsilon/(2q-2)$ (в силу теоремы 3 [Критерии интегрируемости]). Рассмотрим $P:=\bigsqcup\limits_{k=1}^{q-1}P_k\cup(a,b)$ — разбиение отрезка $[a,b]$. Обозначая $m_k:=\inf\limits_{x\in[c_k,d_k]}f(x)$, $M_k:=\sup\limits_{x\in[c_k,d_k]}f(x)$, и учитывая, что $M_k\leqslant M$ и $m_k\geqslant m$, получим

$$S^*(P)-s_*(P)=\sum_{k=1}^{q-1}\big(S^*(P_k)-s_*(P_k)\big)+\sum_{k=1}^{q}(M_k-m_k)(d_k-c_k)<$$

$$<(q-1)\frac{\varepsilon}{2(q-1)}+(M-m)\sum_{k=1}^{q}(d_k-c_k)\overset{(8)}{<}\frac{\varepsilon}{2}+(M-m)\frac{\varepsilon}{2(M-m)}=\varepsilon.$$

В случае $[a, b] \subset B$ для тривиального разбиения $P = (a, b)$ имеем

$$S^*(P) - s_*(P) = (M - m)(b - a) < (M - m)\frac{\varepsilon}{2(M - m)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем $f \in R[a, b]$ по теореме 3 [Критерии интегрируемости]. ◀

Определение 12 (множества лебеговой меры нуль). Говорят, что множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ имеет ***лебегову меру нуль***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует *не более чем счётное* покрытие множества Ω системой интервалов (a_k, b_k), сумма длин которых не превышает ε, то есть

$$\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|(a_k, b_k)| = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \varepsilon.$$

В этом случае интервалы (a_k, b_k) всегда можно выбрать *непересекающимися*. *Обозначение*: $\mu^L(\Omega) = 0$.

Утверждение 1.

(а) $\mu^L(\{x_0\}) = 0$;

(б) *если* $\mu^L(\Omega) = 0$ *и* $A \subset \Omega$, *то* $\mu^L(A) = 0$;

(в) *объединение не более чем счётного числа множеств лебеговой меры нуль есть множество лебеговой меры нуль.*

Доказательство. Свойства (а) и (б) следуют напрямую из определения 12 множества лебеговой меры нуль. Докажем (в). Пусть $\Omega := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ и $\mu^L(\Omega_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существует покрытие $\{(a_k^n, b_k^n)\colon k \in \mathbb{N}\}$ множества Ω_n такое, что

$$\Omega_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k^n, b_k^n) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(b_k^n - a_k^n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Но тогда

$$\Omega \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k^n, b_k^n) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(b_k^n - a_k^n) < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$ ◀

Следствие 3. *Из свойств (а) и (в) утверждения 1 получим, что любое не более чем счётное подмножество* $\mathbb{R}$ *имеет лебегову меру нуль. В частности,* $\mu^L(\mathbb{Q}) = 0$.

Теорема 7 [Критерий Лебега интегрируемости по Риману]. *Пусть* $[a, b] =: I \subset \mathrm{Dom}(f)$, Ω — *множество точек разрыва функции* f *на отрезке* I. *Тогда* $f \in R(I) \iff$ *функция* f *ограничена на* I *и* $\mu^L(\Omega) = 0$ (см. определение 12).

Доказательство приведено в § 10.1. ◀

Следствие 4. *Из теоремы 3.4.2 о точках разрыва монотонной функции, следствия 3 и критерия 7 Лебега сразу вытекает теорема 5 об интегрируемости монотонной функции на любом отрезке её области определения.*

Теорема 8. *Если* $\varphi \in R[a, b]$, *а функция* $h \in C\big(\varphi([a, b])\big)$ *является ограниченной на* $\varphi([a, b])$, *то* $f := h \circ \varphi \in R[a, b]$.

Доказательство. Пусть Ω_f и Ω_φ — множества точек разрыва функций f и φ на отрезке $[a, b]$ соответственно. По теореме 3.2.4′ о непрерывности композиции непрерывных функций имеем $\Omega_f \subset \Omega_\varphi$. По критерию 7 Лебега для функции φ имеем $\mu^L(\Omega_\varphi) = 0$. Тогда по утверждению 1 (б) имеем $\mu^L(\Omega_f) = 0$. Таким образом, по критерию 7 Лебега получаем $f \in R[a, b]$. В заключение отметим, что имеется доказательство этой теоремы без привлечения критерия Лебега (см. [12, с. 345]). ◀

Следствие 5 теоремы 8. *Если* $\varphi \in R[a, b]$, *то* $|\varphi| \in R[a, b]$.

Действительно, положив $h(x) := |x| \in C(\mathbb{R})$ и заметив, что функция h является ограниченной на $\varphi([a, b])$ в силу ограниченности функции φ, получим $h \circ \varphi = |\varphi| \in R[a, b]$ по теореме 8.

Отметим, что данное утверждение можно также доказать без привлечения теоремы 8. Действительно, по теореме 3 [Критерии интегрируемости] для любого $\varepsilon > 0$ найдётся разбиение P отрезка $[a, b]$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{n(P)} \omega_k(\varphi)\Delta x_k < \varepsilon.$$

Используя элементарное неравенство (см. следствие 1.4.4) $\big||t_1| - |t_2|\big| \leqslant |t_1 - t_2|$, верное для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, получим

$$\omega_k(|\varphi|) := \sup_{\xi_1, \xi_2 \in [x_{k-1}, x_k]} \big||\varphi(\xi_1)| - |\varphi(\xi_2)|\big| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\xi_1, \xi_2 \in [x_{k-1}, x_k]} |\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)| =: \omega_k(\varphi)$$

для всех $k \in \overline{1, n(P)}$. Но тогда

$$\sum_{k=1}^{n(P)} \omega_k(|\varphi|)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n(P)} \omega_k(\varphi)\Delta x_k < \varepsilon$$

и $|\varphi| \in R[a, b]$ по теореме 3 [Критерии интегрируемости]. ◀

Пример 2. Рассмотрим функцию Римана

$$R(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{при } x \in \mathbb{Q}, \text{ где } x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \text{НОД}(m, n) = 1 \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$, любого $x_0 \in \mathbb{R}$ и любого $\delta_1 > 0$ существует не более чем конечное множество чисел вида $\dfrac{m}{n} \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \cap \mathbb{Q}$ таких, что $n \leqslant N$, так как для каждого $n \in \overline{1, N}$ существует лишь конечное множество чисел $m \in \big[(x_0 - \delta_1)n, (x_0 + \delta_1)n\big] \cap \mathbb{Z}$. Таким образом, всегда найдётся $\delta(N, x_0) > 0$ такое, что для всех $x \in \mathring{O}_\delta(x_0)$ выполнено $R(x) = |R(x)| < 1/N$. Полагая $N :=$ $:= [1/\varepsilon] + 1$ для произвольного $\varepsilon > 0$, получим, что $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$ для всех $x_0 \in \mathbb{R}$. Таким образом, функция $R(x)$ непрерывна при $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и имеет устранимый разрыв при $x \in \mathbb{Q}$. По следствию 3 имеем $\mu^L(\mathbb{Q}) = 0$, поэтому $R \in R[a, b]$ для любого отрезка $[a, b]$ в силу утверждения 1, б) и критерия 7 Лебега.

Рассмотрение без привлечения критерия Лебега. Для любого невырожденного отрезка $[a, b]$ и любого $N \in \mathbb{N}$ существует не более, чем $K \in \mathbb{N}$ чисел вида $m/n \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$ таких, что $n \leqslant N$, при этом в остальных точках $x \in [a, b]$ имеем $R(x) < 1/N$. Таким образом, для произвольного размеченного разбиения $P_{\boldsymbol{\xi}}$ отрезка $[a, b]$ существует ровно $l \leqslant 2K$ отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ таких, что $f(\xi_i) \geqslant 1/N$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $N := [2(b - a)/\varepsilon] + 1$, $\delta := \varepsilon/(4K)$, тогда $\dfrac{1}{N} < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Пусть $d(P_{\boldsymbol{\xi}}) < \delta$, имеем

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n(P)} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{p=1}^{q} \underbrace{f(\xi_{i_p})}_{\substack{\wedge \\ 1/N}} \Delta x_{i_p} + \sum_{p=1}^{l} \underbrace{f(\xi_{j_p})}_{\substack{\wedge\!\!/ \\ 1}} \Delta x_{j_p} <$$

$$< \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{p=1}^{q} \Delta x_{i_p}}_{\substack{\wedge\!\!/ \\ b-a}} + \sum_{p=1}^{l} \underbrace{\Delta x_{j_p}}_{\substack{\wedge \\ \varepsilon/4K}} \overset{l \leqslant 2K}{<} (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + 2K\frac{\varepsilon}{4K} = \varepsilon.$$

По определению 7 интеграла Римана получаем $\displaystyle\int_a^b R(x)dx = 0$.

Пример 3 [Композиция интегрируемых по Риману функций не всегда интегрируема]. Пусть

$$f(x) := |\operatorname{sgn}(x)| = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0 \\ 1 & \text{при } x \neq 0 \end{cases},$$

тогда $f \in R[0,1]$ по теореме 6, так как $x = 0$ — единственная точка разрыва. Для функции Римана и любого отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$ имеем $R\colon [a,b] \to [0,1]$ и $R \in R[a,b]$ (см. пример 2). Но $f \circ R = D$ — функция Дирихле, причём $D \notin R[a,b]$ (см. замечание 3).

Замечание 6. Можно также построить пример функций $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$ таких, что $f \in C[0,1]$, $g \in R[0,1]$, но $g \circ f \notin R[0,1]$. В качестве g достаточно взять характеристическую функцию канторова множества C_0, а в качестве $f\colon [0,1] \to [0,1]$ — монотонную непрерывную биекцию, отображающую канторово множество C_α меры $\alpha > 0$ на C_0.

6.1.4. Свойства интеграла Римана

В формулировках всех дальнейших утверждений этого пункта обозначение $[t_1, t_2]$ будем использовать для *отрезка, соединяющего точки* t_1, t_2 в случае, когда взаимное расположение этих точек не оговаривается специально.

Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $f, g \in R[a,b]$, тогда выполнены следующие свойства.

1. *Линейность интеграла Римана.*
Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ выполнено $\alpha_1 f + \alpha_2 g \in R[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b \big(\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)\big)dx = \alpha_1 \int\limits_a^b f(x)dx + \alpha_2 \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{9}$$

Доказательство. Если $a \leqslant b$, то в силу арифметических свойств предела (см. замечание 2) и свойств интегральных сумм (см. определение 5 интегральной суммы) получим

$$\alpha_1 \int\limits_a^b f(x)dx + \alpha_2 \int\limits_a^b g(x)dx := \alpha_1 \lim_{d(P_{\boldsymbol\xi}) \to 0} \sigma(f, P_{\boldsymbol\xi}) + \alpha_2 \lim_{d(P_{\boldsymbol\xi}) \to 0} \sigma(g, P_{\boldsymbol\xi}) =$$
$$= \lim_{d(P_{\boldsymbol\xi}) \to 0} \big[\alpha_1 \sigma(f, P_{\boldsymbol\xi}) + \alpha_2 \sigma(g, P_{\boldsymbol\xi})\big] = \lim_{d(P_{\boldsymbol\xi}) \to 0} \sigma(\alpha_1 f + \alpha_2 g, P_{\boldsymbol\xi}) =:$$
$$=: \int\limits_a^b \big(\alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)\big)dx.$$

Умножением равенства (9) на -1 получим требуемое равенство при $b < a$. ◄

Таким образом, $\int\limits_a^b$ — *линейный функционал* на *линейном пространстве* $R[a,b]$.

2. *Интегрируемость произведения.*
$fg \in R[a,b]$.

Доказательство. В силу свойства 1 линейности интеграла Римана имеем $f+g, f-g \in R[a,b]$. Заметим, что

$$f(x)g(x)=\frac{1}{4}\big[f(x)+g(x)\big]^2-\frac{1}{4}\big[f(x)-g(x)\big]^2=\frac{1}{4}\underbrace{\big(h\circ(f+g)\big)}_{u}(x)-\frac{1}{4}\underbrace{\big(h\circ(f-g)\big)}_{v}(x),$$

где $h(x) := x^2 \in C(\mathbb{R})$. По теореме 8 имеем $h\circ(f\pm g) \in R[a,b]$. Таким образом, снова воспользовавшись свойством 1 линейности интеграла Римана, получаем

$$R[a,b] \ni \frac{1}{4}u - \frac{1}{4}v = fg. \qquad ◀$$

3. *Интегрируемость на любом вложенном отрезке.*
Пусть $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, тогда $f \in R[c,d]$.

Доказательство. По теореме 3 [Критерии интегрируемости] для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение P_1 отрезка $[a,b]$ такое, что $S^*(P_1) - s_*(P_1) < \varepsilon$. Для разбиения $P_2 := P_1 \cup (c,d)$ в силу леммы 3 имеем $S^*(P_2) - s_*(P_2) \leqslant \leqslant S^*(P_1) - s_*(P_1) < \varepsilon$. Рассмотрим разбиения P', P и P'' отрезков $[a,c]$, $[c,d]$ и $[d,b]$ соответственно, образованные точками разбиения P_2. Тогда

$$S^*(P_2) - s_*(P_2) = \underbrace{S^*(P') - s_*(P')}_{\geqslant 0} + S^*(P) - s_*(P) + \underbrace{S^*(P'') - s_*(P'')}_{\geqslant 0}.$$

Таким образом, $S^*(P) - s_*(P) \leqslant S^*(P_2) - s_*(P_2) < \varepsilon$, а значит, $f \in R[c,d]$ по теореме 3 [Критерии интегрируемости]. ◀

4. *Правило суммирования интегралов.*
Пусть $f \in R[a,c]$, $f \in R[c,b]$. Тогда $f \in R[a,b]$, причём

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx. \tag{10}$$

Доказательство. а) Пусть $a \leqslant c \leqslant b$. По теореме 3 [Критерии интегрируемости] для любого $\varepsilon > 0$ существуют P_1 и P_2 — разбиения отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно такие, что $S^*(P_1) - s_*(P_1) < \varepsilon/2$, $S^*(P_2) - s_*(P_2) < \varepsilon/2$.

Рассмотрим $P = P_1 \cup P_2$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда $S^*(P) - s_*(P) = S^*(P_1) + S^*(P_2) - s_*(P_1) - s_*(P_2) < \varepsilon$. По теореме 3 [Критерии интегрируемости] имеем $f \in R[a, b]$. Рассмотрим последовательность P_n разбиений отрезка $[a, b]$, содержащих точку c и таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} d(P_n) = 0$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $P_n = P'_n \cup P''_n$, где P'_n и P''_n — разбиения отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно, причём $d(P'_n) \to 0$, $d(P''_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Для произвольных разметок $\boldsymbol{\xi}_n$ разбиений P_n и соответствующих им разметок $\boldsymbol{\xi}'_n$, $\boldsymbol{\xi}''_n$ разбиений P'_n, P''_n получим $\sigma(P_n, \boldsymbol{\xi}_n) = \sigma(P'_n, \boldsymbol{\xi}'_n) + \sigma(P''_n, \boldsymbol{\xi}''_n)$. В силу интегрируемости функции f на соответствующих отрезках и теоремы 2.1.3 об арифметических операциях над сходящимися последовательностями по определению 7 интеграла Римана имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(P_n, \boldsymbol{\xi}_n) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \big(\sigma(P'_n, \boldsymbol{\xi}'_n) + \sigma(P''_n, \boldsymbol{\xi}''_n)\big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sigma(P'_n, \boldsymbol{\xi}'_n) + \lim_{n\to\infty} \sigma(P''_n, \boldsymbol{\xi}''_n) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

и равенство (10) установлено.

б) Остальные случаи сводятся к а). Пусть, например, $c \leqslant b \leqslant a$. Имеем $f \in R[c, a]$, а значит, $f \in R[b, a]$ по свойству 3 интеграла Римана. Используя результат пункта а), получаем

$$\int_c^a f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx \overset{\text{О. 7}}{\Longleftrightarrow} -\int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx,$$

что и означает выполнение равенства (10). Остальные случаи рассматриваются аналогично с использованием пункта а). ◀

Неравенства. *Во всех свойствах ниже будем предполагать, что $a \leqslant b$.*

5. Пусть $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

Доказательство. Для любого *размеченного разбиения* $P_{\boldsymbol{\xi}}$ отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sigma(P_{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{i=1}^{n(P)} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0.$$

Осуществляя в этом неравенстве предельный переход при $d(P_{\boldsymbol{\xi}}) \to 0$ (см. замечание 2), получаем требуемое неравенство. ◀

6. Пусть $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in [a, b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Имеем $g(x) - f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [a, b]$, отсюда получим

$$\int\limits_a^b g(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{св-во } 1}{=} \int\limits_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx \overset{\text{св-во } 5}{\geqslant} 0,$$

что и завершает проверку требуемого неравенства. ◀

7. Пусть $a < b$, $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [a, b]$, функция f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$ и $f(x_0) = y_0 > 0$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0.$$

Доказательство. В силу непрерывности функции f в точке x_0 найдутся числа c и d такие, что $c < d$, $x_0 \in [c, d] \subset [a, b]$ и $f(x) \geqslant y_0/2$ при всех $x \in [c, d]$. Используя ранее установленные свойства, получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{св-во } 4}{=} \underbrace{\int\limits_a^c f(x)dx}_{\substack{\geqslant \text{ св-во } 5\\ 0}} + \int\limits_c^d \underbrace{f(x)}_{\substack{\geqslant\\ \frac{y_0}{2}}} dx + \underbrace{\int\limits_d^b f(x)dx}_{\substack{\geqslant \text{ св-во } 5\\ 0}} \overset{\text{св-во } 6}{\geqslant}$$

$$\overset{\text{св-во } 6}{\geqslant} \int\limits_c^d \frac{y_0}{2}\, dx \overset{\text{Пр. } 1}{=} \frac{y_0}{2}(d - c) > 0. ◀$$

8. Выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство. По следствию 5 имеем $|f| \in R[a, b]$. Так как для всех $x \in [a, b]$ выполнены неравенства $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, используя свойства 1 и 6 интеграла Римана, получим

$$-\int\limits_a^b |f(x)|dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx \iff \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx. ◀$$

6.1.5. Формула Ньютона–Лейбница и теоремы о среднем

Теорема 9 [Основная теорема анализа. Часть I]. *Пусть* $a < b$, $c \in [a, b]$ *и* $f \in R[a, b]$. *Тогда*

$$F(x) := \int\limits_c^x f(t)dt \in C[a, b].$$

Более того, если функция f *непрерывна в точке* $x_0 \in [a, b]$, *то существует* $F'(x_0) = f(x_0)$, *где* $F'(a) := F'_+(a)$, $F'(b) := F'_-(b)$.

Доказательство. Пусть $x_0, x_0+h \in [a, b]$ и $\varepsilon > 0$. По теореме 1 о необходимом условии интегрируемости найдётся число $M > 0$ такое, что $|f(x)| \leqslant M$ при всех $x \in [a, b]$. По свойству 4 интеграла Римана имеем

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int\limits_c^{x_0+h} f(t)dt + \int\limits_{x_0}^{c} f(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt, \tag{11}$$

отсюда по свойствам 8 и 6 интеграла Римана получаем

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt\right| \leqslant M|h| < \varepsilon$$

при $|h| < \varepsilon/M$, а следовательно, $F \in C[a, b]$ по определению 3.2.1 Коши. Также при $h \neq 0$ по свойству 1 линейности интеграла Римана имеем

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \overset{(11)}{=} \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0) \overset{\text{Пр. } 1}{=}$$

$$\overset{\text{Пр. } 1}{=} \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt = \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)dt. \tag{12}$$

Пусть функция f непрерывна в точке x_0, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $t \in O_\delta(x_0) \cap [a, b]$ выполнено неравенство $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. По свойствам 8 и 6 интеграла Римана получаем

$$\left|\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \overset{(12)}{=} \frac{1}{|h|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon|h|}{2|h|} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

при $0 < |h| < \delta$, а следовательно $F'(x_0) = f(x_0)$ по определению 4.1.3 производной (в случаях $x_0 = a$ и $x_0 = b$ используется замечание 4.1.1 об односторонних производных). ◀

Теорема 10 [Основная теорема анализа. Часть II (Ньютон–Лейбниц)]. *Пусть I — отрезок с концами a, b; $\operatorname{int}(I)$ — интервал с теми же концами, $f \in R(I)$, $F_1 \in C(I)$ и $F_1'(x) = f(x)$ для всех $x \in \operatorname{int}(I)$ $\big($то есть F_1 — первообразная функции f на интервале $\operatorname{int}(I)\big)$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = F_1(b) - F_1(a) =: F_1\Big|_a^b. \tag{13}$$

Доказательство. При $a < b$ для произвольного разбиения P отрезка $[a, b]$ по теореме 4.4.6 Лагранжа имеем

$$F_1(b) - F_1(a) =$$

$$= F_1(\underbrace{x_n}_{b}) - F_1(x_{n-1}) + F_1(x_{n-1}) - F_1(x_{n-2}) + \ldots + F_1(x_1) - F_1(\underbrace{x_0}_{a}) \overset{\text{Т. 4.4.6}}{=}$$

$$\overset{\text{Т. 4.4.6}}{=} \sum_{k=1}^{n} F_1'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sigma(f, P_{\boldsymbol{\xi}}).$$

Учитывая, что $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(P)$ и переходя в последнем равенстве к пределу при $d(P) \to 0$, получаем равенство (13), так как

$$\lim_{d(P)\to 0} d(P_{\boldsymbol{\xi}(P)}) = \lim_{d(P)\to 0} d(P) = 0.$$

Случай $b < a$ сводится к уже рассмотренному умножением равенства (13) на -1, случай $a = b$ тривиален. ◀

Следствие 6 (теорем 9 и 10). *У любой функции $f \in C[a, b]$ существует первообразная на отрезке $[a, b]$. При этом*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где F — любая из первообразных функции f на отрезке $[a, b]$.

Теорема 11 (об интегрировании по частям). *Пусть I — отрезок с концами a, b; $u, v \in D(I)$, $u', v' \in R(I)$. Тогда выполнено равенство*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx, \tag{14}$$

часто неформально записываемое в виде

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Доказательство. Так как $u, v \in D(I) \subset C(I) \overset{\text{Т. }4}{\subset} R(I)$, по свойству 2 интеграла Римана имеем $u'v, uv' \in R(I)$, также верно равенство $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ при всех $x \in I$. Таким образом, в силу свойства 1 линейности интеграла Римана по формуле (13) Ньютона–Лейбница получим

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx \overset{(13)}{=}$$
$$\overset{(13)}{=} uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a). \qquad \blacktriangleleft$$

Теорема 12 (о замене переменной). *Пусть I_t — отрезок с концами α, β; $\varphi \in D(I_t)$, $\varphi' \in R(I_t)$, $\varphi(I_t) =: [c, d]$ и $f \in C[c, d]$. Тогда*

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx. \tag{15}$$

Доказательство. По теореме 9 [Основная теорема анализа. Часть I] существует F — *первообразная* функции f на отрезке $[c, d]$. Тогда для любого $t \in I_t$ по теореме 4.1.3 о дифференцируемости композиции функций имеем $(F \circ \varphi)'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) \in R(I_t)$ в силу интегрируемости непрерывной функции $f \circ \varphi$ (см. теоремы 3.2.4′ о непрерывности композиции непрерывных функций и 4 об интегрируемости непрерывной функции) и свойства 2 интеграла Римана, отсюда по формуле (13) Ньютона–Лейбница получим

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt \overset{(13)}{=} (F \circ \varphi)\Big|_\alpha^\beta \overset{(13)}{=} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 4.

$$\int_1^{10} \sin^3 t \cos t dt \overset{\text{Т. }12\ \{x = \sin t\}}{=} \int_{\sin 1}^{\sin 10} x^3 dx \overset{(13)}{=} \frac{\sin^4(10) - \sin^4(1)}{4},$$

при этом $\sin\big([1, 10]\big) = [-1, 1] \neq [\sin(10), \sin(1)]$.

Замечание 7. Формула (15) замены переменной верна также в случае, когда вместо φ' берётся произвольная функция $g \in R(I_t)$, а вместо $\varphi(t)$ — функция

$$G(t) := \int_\alpha^t g(y)dy + const.$$

При этом достаточно выполнения условия $f \in R\big(G(I_t)\big)$ (доказательство см. [43, 51]) либо условия $(f \circ G)g \in R(I_t)$ и ограниченности функции f на отрезке, соединяющем точки $G(\alpha), G(\beta)$ (доказательство см. [46]).

Пример 5. Пусть $f \in R[a,b]$, $g(t) := -1$, $\alpha := -a$, $\beta := -b$. Тогда при $G(t) := -t$ имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{3.7}{=} \int\limits_{-a}^{-b} f(-t)(-1)dt = \int\limits_{-b}^{-a} f(-t)dt.$$

Отметим, что полученное равенство можно проверить непосредственно, задав сохраняющую диаметр биекцию между всеми разбиениями $P_{\boldsymbol{\xi}}$ отрезка $[a,b]$ и всеми разбиениями $P'_{\boldsymbol{\eta}}$ отрезка $[-b,-a]$ по правилу $P_{\boldsymbol{\xi}} \mapsto P'_{\boldsymbol{\eta}} := -P_{\boldsymbol{\xi}}$.

Теорема 13 [Первая теорема о среднем]. *Пусть I — отрезок с концами a,b; $f,g \in R(I)$, $g(x) \geqslant 0$ (или $g(x) \leqslant 0$) для всех $x \in I$, $M := \sup\limits_{x\in I} f(x)$, $m := \inf\limits_{x\in I} f(x)$. Тогда существует число $\mu \in [m,M]$ такое, что выполнено следующее равенство:*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{16}$$

Если при этом $f \in C(I)$, то найдётся $\xi \in I$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $g(x) \geqslant 0$. Пусть $a \leqslant b$, тогда для всех $x \in [a,b]$ имеем

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \implies mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x),$$

причём $mg, fg, Mg \in R[a,b]$ в силу свойств 1 и 2 интеграла Римана. Также по свойствам 1 и 6 интеграла Римана имеем

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Это означает, что если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то соотношение (16) выполнено для любого $\mu \in \mathbb{R}$. Если $\int\limits_a^b g(x)dx \neq 0$, то равенство (16) выполнено при

$$\mu := \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \in [m,M].$$

Умножением равенства (16) на -1 получим его выполнение также при $b < a$. Если $f \in C(I)$, то в силу теоремы 3.2.5 [Вторая теорема Вейерштрасса] и теоремы 3.2.3 Больцано–Коши найдётся $\xi \in I$ такое, что $f(\xi) = \mu$.

Случай $g(x) \leqslant 0$ сводится к рассмотренному выше по свойству 1 линейности интеграла Римана в силу неравенства $-g(x) \geqslant 0$. ◀

Следствие 7 теоремы 13. *При* $g(x) \equiv 1$ *и* $f \in R(I)$ *имеем*

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$$

где $\inf\limits_{x\in I} f(x) =: m \leqslant \mu \leqslant M := \sup\limits_{x\in I} f(x)$. *В случае* $f \in C(I)$ *имеем*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),$$

где $\xi \in I$.

Теорема 14 [Вторая теорема о среднем (Бонне)]. *Пусть I — отрезок с концами a, b; $f \in R(I)$. Тогда:*

(а) *если $a \leqslant b$, а функция g не возрастает на отрезке $[a,b]$ и $g(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [a,b]$* (см. рис. 17 а)), *то найдётся $\xi \in [a,b]$ такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx;$$

(б) *если $a \leqslant b$, а функция g не убывает на отрезке $[a,b]$ и $g(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a,b]$* (см. рис. 17 б)), *то найдётся $\xi \in [a,b]$ такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx;$$

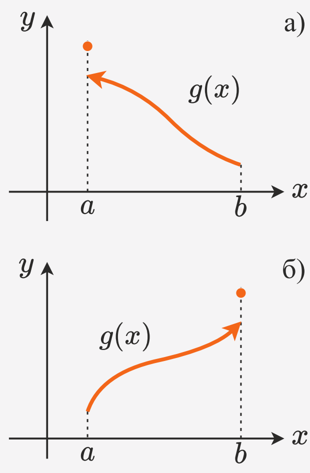


Рис. 17

(в) *если функция g монотонна на отрезке I, то найдётся $\xi \in I$ такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

Доказательство. Для начала докажем утверждение (a). Заметим, что $g \in$ $\in R[a,b]$ по теореме 5 об интегрируемости монотонной функции и $fg \in R[a,b]$ по свойству 2 интеграла Римана. Пусть P — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Используя представление $g(x) = g(x_{i-1}) + \big(g(x) - g(x_{i-1})\big)$, в силу свойств 3, 4, 1 интеграла Римана при $n = n(P)$ имеем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx}_{\substack{\shortparallel \\ s_1(P)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \big(g(x) - g(x_{i-1})\big) f(x)dx}_{\substack{\shortparallel \\ s_2(P)}},$$

где s_1, s_2 — функции от разбиения P. По необходимому условию 1 интегрируемости найдётся число $c \geqslant 0$ такое, что $|f(x)| \leqslant c$ при всех $x \in [a,b]$, отсюда получаем

$$|s_2(P)| \leqslant \sum_{i=1}^n \left| \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \big(g(x) - g(x_{i-1})\big) f(x)dx \right| \overset{\text{св-во } 8}{\leqslant}$$

$$\overset{\text{св-во } 8}{\leqslant} \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})| \underbrace{|f(x)|}_{\substack{\text{⩕} \\ c}} dx \overset{\text{св-во } 6}{\leqslant}$$

$$\overset{\text{св-во } 6}{\leqslant} c \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{|g(x) - g(x_{i-1})|}_{\substack{\text{⩕} \\ \omega_i(g)}} dx \overset{\text{св-во } 6}{\leqslant} c \sum_{i=1}^n \omega_i(g)\Delta x_i \overset{\text{Т. } 3}{\to} 0$$

при $d(P) \to 0$ (см. определение 11). Таким образом, для разбиений P отрезка $[a,b]$ выполнено

$$s_1(P) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx - \underset{\substack{\downarrow d(P)\to 0 \\ 0}}{s_2(P)} \xrightarrow{d(P)\to 0} \int\limits_a^b f(x)g(x)dx. \tag{17}$$

Рассмотрим функцию

$$F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt \overset{\text{Т. } 9}{\in} C[a,b].$$

Обозначим $m := \min\limits_{x\in[a,b]} F(x)$ и $M := \max\limits_{x\in[a,b]} F(x)$, тогда

$$s_1(P) = \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \overset{\text{св-во } 4}{=} \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})F(x_i) - \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)F(x_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1}\big(g(x_{k-1}) - g(x_k)\big)F(x_k) + g(x_{n-1})F(x_n) - g(\underbrace{x_0}_{a})\underbrace{F(x_0)}_{0}.$$

Так как $m \leqslant F(x_k) \leqslant M$ и $g(x_{k-1}) - g(x_k) \geqslant 0$ при всех $k \in \overline{1,n}$, а $g(x_{n-1}) \geqslant 0$, то

$$mg(a) = \sum_{k=1}^{n-1} m\big(g(x_{k-1}) - g(x_k)\big) + mg(x_{n-1}) \leqslant s_1(P) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} M\big(g(x_{k-1}) - g(x_k)\big) + Mg(x_{n-1}) = Mg(a).$$

Используя (17) и переходя в последнем неравенстве к пределу при $d(P) \to 0$, получим

$$mg(a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant Mg(a).$$

Если $g(a) = 0$, то $g(x) \equiv 0$ и утверждение (а) очевидно, верно. Если $g(a) > 0$, то для

$$\mu := \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{g(a)} \in [m, M]$$

в силу теоремы 3.2.5 [Вторая теорема Вейерштрасса] и теоремы 3.2.3 Больцано–Коши найдётся $\xi \in [a,b]$ такое, что $F(\xi) = \mu$. Таким образом, утверждение (а) полностью доказано.

Утверждение (б) следует из (а) при рассмотрении функций $f_1(x) := f(-x)$ и $g_1(x) := g(-x)$ на отрезке $[-b,-a]$ с использованием примера 5 (см. рис. 17 б)).

Перейдём к доказательству утверждения (в). Пусть $a \leqslant b$, а функция g не убывает на отрезке $[a,b]$. Тогда получим $g_1(x) := g(b) - g(x) \geqslant 0$ при всех

$x \in [a,b]$ и g_1 не возрастает на $[a,b]$. По утверждению (а) имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\big(g(b)-g(x)\big)dx = \big(g(b)-g(a)\big)\int\limits_a^\xi f(x)dx \xRightarrow{\text{св-во } 1}$$

$$\xRightarrow{\text{св-во } 1} \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)dx + g(b)\left[\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^\xi f(x)dx\right] \overset{\text{св-во } 4}{=}$$

$$\overset{\text{св-во } 4}{=} g(a)\int\limits_a^\xi f(x)dx + g(b)\int\limits_\xi^b f(x)dx,$$

что и требовалось доказать. Если функция g не возрастает на отрезке $[a,b]$, то имеем $g_2(x) := g(x) - g(b) \geqslant 0$ при всех $x \in [a,b]$ и g_2 не возрастает на $[a,b]$. Применяя утверждение (а) к функции g_2, как и выше, получим требуемое равенство.

Случай $b < a$ сводится к уже рассмотренному с помощью умножения искомого равенства на -1. ◀

6.1.6. Теорема Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема 15 (Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). *Пусть $x_0, h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, I — отрезок с концами x_0, x_0+h; $f \in D^{k+1}(I)$ и $f^{(k+1)} \in R(I)$. Тогда*

$$f(x_0+h) = \overbrace{f(x_0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}h^m}^{P_k(f,x_0,h)} + \frac{1}{k!}\int\limits_0^h (h-\tau)^k f^{(k+1)}(x_0+\tau)d\tau. \quad (18)$$

Доказательство. Интегрируемость функции $f^{(k+1)}(x_0+\tau)$ на отрезке с концами $0, h$ вытекает из совпадения её интегральных сумм с соответствующими суммами по разбиениям того же диаметра для функции $f^{(k+1)}$ на отрезке I, а также может быть установлена с помощью формулы (15) замены переменной (см. замечание 7). При $k = 0$ по формуле (13) Ньютона–Лейбница имеем

$$\int\limits_0^h f'(x_0+\tau)d\tau = f(x_0+h) - f(x_0),$$

и теорема верна. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и теорема верна для $k-1$. Так как $f \in D^{k+1}(I) \subset$ $\subset D^k(I)$ и $f^{(k)} \in D(I) \subset C(I) \overset{\text{Т. 4}}{\subset} R(I)$, то по предположению индукции

$$(x_0+h) = \overbrace{f(x_0)+\sum_{m=1}^{k-1}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}h^m}^{P_{k-1}(f,x_0,h)} + \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^h f^{(k)}(x_0+\tau)(h-\tau)^{k-1}d\tau. \tag{19}$$

По формуле (14) интегрирования по частям получим

$$\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^h f^{(k)}(x_0+\tau)(h-\tau)^{k-1}d\tau = -\frac{1}{k!}\int\limits_0^h f^{(k)}(x_0+\tau)d\big((h-\tau)^k\big) \overset{(14)}{=}$$

$$\overset{(14)}{=} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \frac{1}{k!}\int\limits_0^h f^{(k+1)}(x_0+\tau)(h-\tau)^k d\tau. \tag{20}$$

Из равенств (20) и (19) следует равенство (18), завершающее доказательство теоремы для всех $k \in \mathbb{N}_0$ по индукции. ◀

§ 6.2. Несобственный интеграл

Определение 1 (несобственного интеграла 1-го рода). Пусть $[a,+\infty)\subset$ $\subset \mathrm{Dom}(f)$, $f \in R[a,x]$ при всех $x \in (a,+\infty)$ и $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$. Тогда предел

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\int\limits_a^x f(t)dt =: \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

называется ***несобственным интегралом 1-го рода*** (см. рис. 18). Если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \in \mathbb{R}$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется ***сходящимся*** $\left(\text{кратко: } \exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\right)$, в противном случае — ***расходящимся*** $\left(\text{кратко: } \nexists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx\right)$.

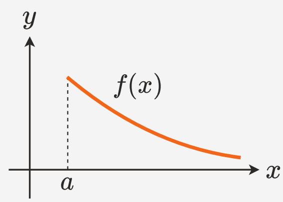


Рис. 18

Замечание 1. Из определения 1 несобственного интеграла 1-го рода вытекает, что

$$\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \implies \forall b \geqslant a \ \exists \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx.$$

Замечание 2. Если $(-\infty, b] \subset \mathrm{Dom}(f)$ и $f \in R[x,b]$ при всех $x \in (-\infty, b)$, то аналогичным образом определяется

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{x\to-\infty} \int\limits_x^b f(t)dt.$$

Определение 2 (несобственного интеграла 2-го рода). Пусть $a < b$, $(a,b] \subset \mathrm{Dom}(f)$, $f \in R[x,b]$ при всех $x \in (a,b)$ и $F(x) := \int\limits_x^b f(t)dt$. Тогда предел

$$\lim_{x\to a+} F(x) = \lim_{x\to a+} \int\limits_x^b f(t)dt =: \int\limits_a^b f(x)dx$$

называется ***несобственным интегралом 2-го рода*** (см. рис. 19).

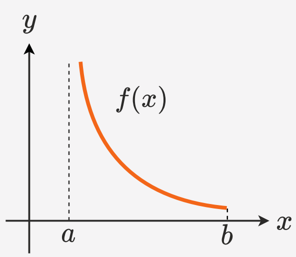


Рис. 19

Замечание 3. Заменой $x = a + \dfrac{1}{t}$ несобственный интеграл 2-го рода ***всегда*** (см. замечание 1.7) сводится к несобственному интегралу 1-го рода.

Замечание 4. Если $[a,b) \subset \mathrm{Dom}(f)$ и $f \in R[a,x]$ при всех $x \in (a,b)$, то аналогичным образом определяется

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{x\to b-} \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Утверждение 1 (о совпадении определённого и несобственного интеграла 2-го рода для ограниченных функций). *Пусть $a < b$ и найдётся $M > 0$ такое, что $|f(x)| \leqslant M$ при всех $x \in [a,b]$ и $f \in R[x,b]$ при всех $x \in (a,b)$. Тогда:*

(а) $f \in R[a,b]$;

(б) $\lim\limits_{x\to a+} \int\limits_x^b f(t)dt = (R)\int\limits_a^b f(t)dt.$

Доказательство.

(а): Для любого $\varepsilon > 0$ *фиксируем* $\delta := \min\{\varepsilon/(3M), b-a\}$. По теореме 1.3 [Критерии интегрируемости] из $f \in R[a+\delta, b]$ вытекает существование такого разбиения P' отрезка $[a+\delta, b]$, что

$$\sum_{P'} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}.$$

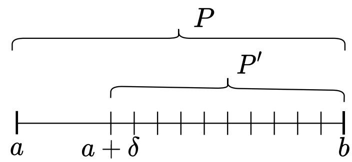


Рис. 20

Добавив к разбиению P' точку a, получим разбиение P отрезка $[a,b]$ (см. рис. 20). Тогда

$$\sum_{P}\omega_k\Delta x_k=\underbrace{\omega(f,[a,a+\delta])}_{\leqslant 2M}\ \underset{\leqslant\,\frac{\varepsilon}{3M}}{\delta}+\underbrace{\sum_{P'}\omega_i\Delta x_i}_{<\,\varepsilon/3}<\frac{2M\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

а значит, $f \in R[a,b]$ по теореме 1.3 [Критерии интегрируемости].

(б): Следует из непрерывности функции $F(x) = \int\limits_x^b f(t)dt$ (см. теорему 1.9 [Основная теорема анализа. Часть I]). ◄

Замечание 5. Утверждение 1 показывает, что определение 2 несобственного интеграла 2-го рода обретает содержательный смысл лишь для функции f, *не ограниченной* в любой окрестности точки a. В этом случае точку a называют ***особой точкой*** или ***особенностью*** функции f. Если какая-либо из несобственных точек $\pm\infty, \infty$ является предельной для $\mathrm{Dom}(f)$, то она по определению является особой. Особую точку a называют ***изолированной***, если в некоторой её окрестности у функции f отсутствуют другие особенности.

Замечание 6. В силу линейности предела (см. теорему 3.1.3) и свойства 1 линейности интеграла Римана это же свойство сохраняется и для несобственных интегралов.

Далее ограничимся рассмотрением несобственных интегралов *1-го рода* на $+\infty$ (для остальных трёх типов несобственных интегралов рассмотрение проводится аналогично с заменой соответствующих интервалов и пределов).

Теорема 1 [Критерий Коши сходимости несобственного интеграла 1-го рода]. *Пусть $f \in R[a,x]$ при всех $x \in (a,+\infty)$. Тогда*

$$\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\delta\in[a,+\infty):\forall x_1,x_2\in(\delta,+\infty)\ \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right|<\varepsilon.$$

Доказательство. Утверждение следует из критерия 3.1.2 Коши для функции $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ при $x\to+\infty$ с использованием свойства 4 интеграла Римана. ◀

Теорема 2 [Критерий сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции]. *Пусть $f(x)\geqslant 0$, $f\in R[a,x]$ при всех $x\in[a,+\infty)$. Тогда*

$$\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \iff \text{функция } F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt \text{ ограничена на } [a,+\infty).$$

Доказательство. По свойствам 4, 5 интеграла Римана функция F не убывает на $[a,+\infty)$.

$\Longrightarrow$: Вытекает из утверждения 3.1.3 о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел, теоремы 1.9 [Основная теорема анализа. Часть I] и теоремы 3.2.4 [Первая теорема Вейерштрасса].

$\Longleftarrow$: Вытекает из теоремы 3.4.1 о пределе монотонной функции. ◀

Теорема 3 [Мажорантный признак]. *Пусть $f\in R[a,x]$ и $|f(x)|\leqslant g(x)$ при всех $x\in[a,+\infty)$. Тогда*

$$\exists \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \Longrightarrow \exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $\exists \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$. Тогда в силу теоремы 1 [Критерий Коши сходимости несобственного интеграла 1-го рода] по свойству 5 интеграла Римана имеем

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in[a,+\infty):\forall[x_1,x_2]\subset(\delta,+\infty)\quad \varepsilon>\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} g(t)dt\right| = \int\limits_{x_1}^{x_2} g(t)dt,$$

отсюда по свойствам 8, 6 интеграла Римана получим

$$\forall[x_1,x_2]\subset(\delta,+\infty)\quad \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt\right| \leqslant \int\limits_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \leqslant \int\limits_{x_1}^{x_2} g(t)dt < \varepsilon,$$

а следовательно, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится по теореме 1 [Критерий Коши сходимости несобственного интеграла 1-го рода]. ◀

Следствие 1 теоремы 3 [Мажорантный признак]. *Пусть для всех $x \in [a, +\infty)$ выполнено $f(x), g(x), \alpha(x) \geqslant 0$; $f, g \in R[a, x]$, $f(x) = \alpha(x)g(x)$ и при этом $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = c$. Тогда:*

(а) *при $c \in (0, +\infty)$ имеем* $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \iff \exists \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$;

(б) *при $c = 0$ имеем* $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \Longleftarrow \exists \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$;

(в) *при $c = +\infty$ имеем* $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \Longrightarrow \exists \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Определение 3 (абсолютной и условной сходимости). Пусть $[a, +\infty) \subset \subset \mathrm{Dom}(f)$ и $f \in R[a, x]$ при всех $x \in (a, +\infty)$. Говорят, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ***сходится абсолютно***, если сходится $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то говорят, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ***сходится условно***.

Замечание 7. Из теоремы 3 [Мажорантный признак] при $g(x) = |f(x)|$ вытекает, что из абсолютной сходимости всегда следует сходимость. Также отметим, что для знакопостоянных функций понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны.

Пример 1. При всех $p \in \mathbb{R}$ исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ и $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

Теорема 4 [Признак Дирихле]. *Пусть функция g монотонна на $[a, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, $M > 0$, $f \in R[a, x]$ и*

$$|F(x)| := \left| \int\limits_a^x f(t)dt \right| \leqslant M$$

при всех $x \in (a, +\infty)$. Тогда

$$\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx.$$

Доказательство. Для любых $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$ имеем

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx\right| \overset{\text{Т. 1.14}}{=} \left|g(x_1)\int\limits_{x_1}^{\xi} f(x)dx + g(x_2)\int\limits_{\xi}^{x_2} f(x)dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant |g(x_1)|\,|F(\xi) - F(x_1)| + |g(x_2)|\,|F(x_2) - F(\xi)| \leqslant 2M(|g(x_1)| + |g(x_2)|).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ фиксируем $\delta \in [a, +\infty)$ такое, что $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$ при всех $x \in (\delta, +\infty)$. Тогда

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx\right| \leqslant 2M(|g(x_1)| + |g(x_2)|) < 2M\left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) = \varepsilon$$

при всех $x_1, x_2 \in (\delta, +\infty)$, и утверждение теоремы вытекает из теоремы 1 [Критерий Коши сходимости несобственного интеграла 1-го рода]. ◀

Теорема 5 [Признак Абеля]. *Пусть функция g монотонна и ограничена на $[a, +\infty)$ и $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Тогда $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$.*

Доказательство. По теореме 3.4.1 о пределе монотонной функции имеем

$$\exists \lim_{x\to+\infty} g(x) =: c \in \mathbb{R}.$$

Тогда функция $g_1(x) := g(x) - c$ монотонна на $[a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x) = 0$. Так как

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) := \lim_{x\to+\infty}\int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R},$$

то в силу утверждения 3.1.3 о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел, теоремы 1.9 [Основная теорема анализа. Часть I] и теоремы 3.2.4 [Первая теорема Вейерштрасса] найдётся $M > 0$ такое, что $|F(x)| \leqslant M$ при всех $x \in (a, +\infty)$. Таким образом, по теореме 4 [Признак Дирихле] $\exists \int\limits_a^{+\infty} g_1(x)f(x)dx$. Отсюда следует

$$\exists \int\limits_a^{+\infty} g(x)f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} (g_1(x)+c)f(x)dx \overset{3.6}{=} \int\limits_a^{+\infty} g_1(x)f(x)dx + c\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

◀

Замечание 8. Отметим, что признаки Дирихле и Абеля в случае, когда функция f знакопостоянна в некоторой окрестности $+\infty$, являются следствиями теорем 2 [Критерий сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции] и 3 [Мажорантный признак], поэтому для знакопостоянных функций они не содержательны.

Теорема 6 (об интегрировании по частям в несобственном интеграле). *Пусть $u, v \in D[a, +\infty)$; $u', v' \in R[a, x]$ при всех $x \in (a, +\infty)$ и*

$$\exists \lim_{x \to +\infty} u(x)v(x) = c \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\exists \int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx \iff \exists \int\limits_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx$$

и в случае сходимости одного из этих интегралов выполнено равенство

$$\int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx = \underbrace{uv\Big|_a^{+\infty}}_{\substack{\parallel \\ c - u(a)v(a)}} - \int\limits_a^{+\infty} v(x)u'(x)dx.$$

Доказательство. Утверждение теоремы выводится из формулы интегрирования по частям

$$\int\limits_a^x u(t)v'(t)dt = uv\Big|_a^x - \int\limits_a^x v(t)u'(t)dt$$

(см. теорему 1.11 об интегрировании по частям) предельным переходом при $x \to +\infty$. ◀

Теорема 7 (о замене переменной в несобственном интеграле). *Пусть $\varphi \in D[\alpha, +\infty)$, $\varphi' \in R[\alpha, \gamma]$ при всех $\gamma \in (\alpha, +\infty)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$, $f \in C[c, +\infty)$, где $\varphi\big([\alpha, +\infty)\big) =: [c, +\infty) \supset [\varphi(\alpha), +\infty)$. Тогда*

$$\int\limits_\alpha^{+\infty} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = I \iff \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{+\infty} f(x)dx = I.$$

Доказательство. По теореме 1.12 о замене переменной для всех $\gamma \in [\alpha, +\infty)$ имеем

$$\int\limits_\alpha^\gamma f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\gamma)} f(x)dx. \tag{1}$$

$\Longrightarrow$: Для $F(x) := \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{x} f(t)dt$ имеем $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} F\big(\varphi(\gamma)\big) \overset{(1)}{=} I$, поэтому $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\gamma_0 \in [\alpha, +\infty)\colon\ F\Big(\varphi\big((\gamma_0, +\infty)\big)\Big) \subset O_\varepsilon(I)$. В силу непрерывности функции φ по теореме 3.2.3 Больцано–Коши (см. рис. 21) имеем

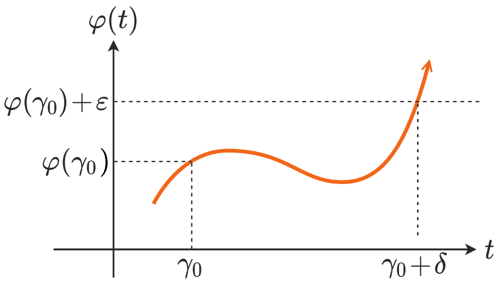


Рис. 21

$$\big(\varphi(\gamma_0), +\infty\big) \subset \varphi\big((\gamma_0, +\infty)\big) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow F\Big(\big(\varphi(\gamma_0), +\infty\big)\Big) \subset$$
$$\subset F\Big(\varphi\big((\gamma_0, +\infty)\big)\Big) \subset O_\varepsilon(I) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow F(x) \xrightarrow{x\to+\infty} I.$$

$$\Longleftarrow : \int\limits_{\alpha}^{+\infty} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt \overset{(1)}{=} \lim_{\gamma\to+\infty} F\big(\underbrace{\varphi(\gamma)}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}}\big) \overset{\text{Т. } 3.1.4}{=} I, \text{ где } F(x) := \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{x} f(t)dt. \blacktriangleleft$$

Пример 2.

$$\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{1+2\cos t}{(t+2\sin t)^2}dt = \int\limits_{10}^{+\infty} \frac{d(t+2\sin t)}{(t+2\sin t)^2} \overset{\text{Т. } 7}{=}$$
$$\overset{\text{Т. } 7}{=} \int\limits_{10+2\sin(10)}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Bigg|_{10+2\sin(10)}^{+\infty} = \frac{1}{10+2\sin(10)}.$$

Отметим, что функция $t + 2\sin t$ не является монотонной на $[10, +\infty)$.

Замечание 9. Теорема 7 о замене переменной в несобственном интеграле верна также (см. замечание 7) в случае замены φ' на функцию g, интегрируемую на $[\alpha, \gamma]$ при всех $\gamma \in (\alpha, +\infty)$ и такую, что

$$\varphi(t) := \int\limits_{\alpha}^{t} g(y)dy + const \xrightarrow{t\to+\infty} +\infty.$$

При этом достаточно выполнения условия $f \in R[c, x]$ при всех $x \in (c, +\infty)$, либо условия $(f\circ\varphi)g \in R[\alpha, t]$ при всех $t \in (\alpha, +\infty)$ и ограниченности функции f на отрезках $[\varphi(\alpha), x]$ при всех $x \in (\varphi(\alpha), +\infty)$ (см. [46]).

Пример 3 [Случай нескольких особенностей]. Пусть у функции f имеются ровно две конечные *особые точки* (см. замечание 5) — a и b (см. рис. 22). Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)dt :=$$

$$:= \int\limits_{-\infty}^{c_1} f(t)dt + \int\limits_{c_1}^{a} f(t)dt + \int\limits_{a}^{c_2} f(t)dt +$$

$$+ \int\limits_{c_2}^{b} f(t)dt + \int\limits_{b}^{c_3} f(t)dt + \int\limits_{c_3}^{+\infty} f(t)dt.$$

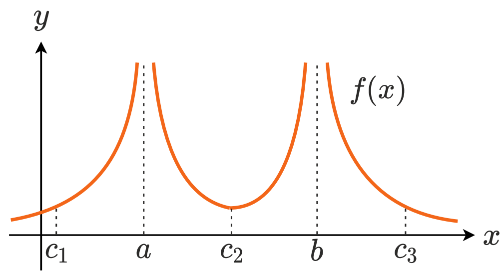


Рис. 22

По определению требуется, чтобы каждый из этих шести интегралов ***сходился***. При этом легко показать, что их сходимость, а также значение итоговой суммы не зависят от выбора точек $c_1 \in (-\infty, a)$, $c_2 \in (a, b)$, $c_3 \in (b, +\infty)$. Рассмотренный пример естественным образом обобщается на случай промежутка, содержащего *конечное множество особенностей* функции f.

Замечание 10. В случае, когда у функции f на луче $[a, +\infty)$ имеется *счётное множество изолированных особенностей* (см. замечание 5), в определении 1 несобственного интеграла 1-го рода интеграл $\int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ при каждом $x \in (a, +\infty)$ следует понимать как *несобственный* (см. пример 3) и требовать его сходимости.

Определение 4 (главного значения несобственного интеграла (Valeur Principale)).

(а) Пусть $f \in R[a, b]$ для любого $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Тогда

$$\text{V.P.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx.$$

(б) Пусть $a < c < b$ и $f \in R[a, c-\delta] \cap R[c+\delta, b]$ для любого $\delta \in (0, \min\{c-a, b-c\})$. Тогда

$$\text{V.P.} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{\delta\to 0+} \left(\int\limits_{a}^{c-\delta} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx \right).$$

Пример 4. $\text{V.P.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0$, $\text{V.P.} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$.

Глава 7

Некоторые приложения дифференциального и интегрального исчислений

§ 7.1. Вычисление корней уравнений

Метод последовательных приближений (поиск неподвижной точки)

Определение 1 (итерационной последовательности). Последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$, где $x_{n+1} := F(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$, будем называть ***итерационной последовательностью*** для функции F.

Утверждение 1. *Пусть $F \in C[a, b]$, $x_{n+1} = F(x_n)$ и $x_n \in [a, b]$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, то*

$$F(c) = c. \tag{1}$$

При этом точка c называется ***неподвижной****.*

Доказательство. Если $c \in [a, b]$ и $x_n \to c$, то $x_{n+1} = F(x_n) \to F(c)$. В силу единственности предела получаем $F(c) = c$. ◀

Вычисление корня уравнения $f(x) = 0$

Пусть $f \in C^1[a, b]$, f' монотонна и знакопостоянна на $[a, b]$. Будем рассматривать задачу поиска (вычисления) корня уравнения $f(x) = 0$, при выполнении одного из следующих четырёх наборов условий:

$$f'(x) > 0 \text{ и не убывает, } f(a) < 0, f(b) > 0, \tag{2}$$
$$f'(x) < 0 \text{ и не возрастает, } f(a) > 0, f(b) < 0, \tag{3}$$
$$f'(x) > 0 \text{ и не возрастает, } f(a) < 0, f(b) > 0, \tag{4}$$
$$f'(x) < 0 \text{ и не убывает, } f(a) > 0, f(b) < 0. \tag{5}$$

Заметим, что из выполнения любого из наборов условий (2)–(5) следует существование единственного корня c уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$. Опишем подробно случай (2), остальные рассматриваются аналогично.

Теорема 1 (о сходимости метода хорд). *Пусть $f \in C^1[a,b]$ и выполнен набор условий* (2). *Положим*

$$F(x) := \begin{cases} x - \dfrac{(b-x)f(x)}{f(b)-f(x)} & \textit{при } x \in [a,b); \\ b - \dfrac{f(b)}{f'(b)} & \textit{при } x = b. \end{cases}$$

Тогда итерационная последовательность x_n для функции F (см. определение 1) *при $x_0 := a$ сходится к единственному корню c уравнения $f(x) = 0$ на отрезке* $[a,b]$.

Доказательство. Из условий (2) вытекает, что $c \in (a,b)$. Пусть $x_n \in [a,c]$ для некоторого номера $n \geqslant 0$. Тогда

$$x_{n+1} - x_n = F(x_n) - x_n = -\frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)} =$$

$$= \frac{(b-x_n)\big(f(c)-f(x_n)\big)}{\big(f(b)-f(c)\big)+\big(f(c)-f(x_n)\big)} = \frac{(b-x_n)f'(\xi_n)(c-x_n)}{\underbrace{(b-c)}_{\substack{\vee \\ 0}}\;\underbrace{f'(\eta_n)}_{\substack{\geqslant \\ f'(\xi_n)>0}} + (c-x_n)f'(\xi_n)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(b-x_n)f'(\xi_n)(c-x_n)}{(b-c)f'(\xi_n)+(c-x_n)f'(\xi_n)} = c - x_n \implies x_{n+1} \leqslant c < b$$

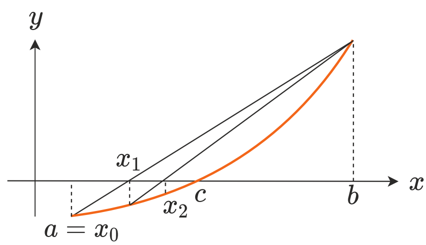


Рис. 23

(см. рис. 23). В силу $x_n < b$ имеем $b - x_n > 0$, $f(b) - f(x_n) > 0$ и $f(x_n) \leqslant 0$ (так как $x_n \leqslant c$). Тогда из равенства

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}$$

получим $x_{n+1} \geqslant x_n$. Из неубывания последовательности x_n и из её ограниченности сверху числом c вытекает существование $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c^*$. Но $F(c^*) = c^*$ по утверждению 1, значит, $f(c^*) = 0$, отсюда $c^* = c$. ◀

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 о сходимости метода хорд остаётся в силе также при выполнении условий (3). Аналогичная теорема справедлива при выполнении (4) либо (5), при этом в качестве нулевого приближения берётся точка $x_0 := b$, а функция F имеет вид

$$F(x) := \begin{cases} x - \dfrac{(a-x)f(x)}{f(a)-f(x)} & \text{при } x \in (a,b]; \\ a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} & \text{при } x = a. \end{cases}$$

Теорема 2 (о сходимости метода касательных (метод Ньютона)). *Пусть $f \in C^1[a,b]$ и выполнен набор условий* (2). *Положим*

$$F(x) \coloneqq x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Тогда итерационная последовательность x_n для функции F (см. определение 1) *при $x_0 \coloneqq b$ сходится к единственному корню c уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Из условий (2) вытекает, что $c \in (a,b)$. Пусть $x_n \in [c,b]$ для некоторого номера $n \geqslant 0$. Тогда по теореме 4.4.6 Лагранжа получим

$$x_n - x_{n+1} = x_n - F(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f(x_n) - \overbrace{f(c)}^{0}}{f'(x_n)} \overset{\text{т. } 4.4.6}{=}$$
$$\overset{\text{т. } 4.4.6}{=} (x_n - c)\underbrace{\frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}}_{\substack{\vee\!\vee\\ f'(\xi_n)}} \leqslant x_n - c \implies x_{n+1} \geqslant c$$

(см. рис. 24). Таким образом, $x_n \geqslant c$ для всех $n \geqslant 0$ и $f(x_n) \geqslant f(c) = 0$, отсюда $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_{n+1} \geqslant 0$, то есть последовательность x_n не возрастает и ограничена снизу числом c, отсюда вытекает существование $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c^*$. По утверждению 1 имеем $F(c^*) = c^*$, отсюда $f(c^*) = 0$, то есть $c = c^*$. ◀

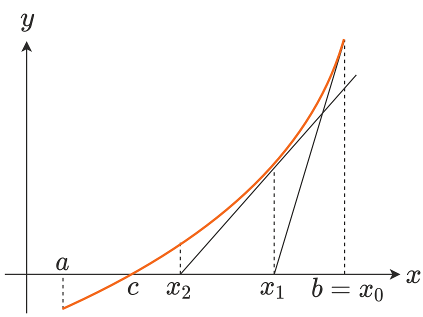


Рис. 24

Замечание 2. Утверждение теоремы 2 о сходимости метода касательных (метод Ньютона) остаётся в силе при выполнении условий (3). Утверждение теоремы 2 о сходимости метода касательных (метод Ньютона) также справедливо при выполнении условий (4) либо (5), если качестве нулевого приближения взять точку $x_0 \coloneqq a$.

§ 7.2. Численное интегрирование

Определение 1 (усреднения вектора с весом λ). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Любой вектор $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ будем называть (неотрицательным) ***весом***, если $\lambda_i \geqslant 0$ для всех $i \in \overline{1,n}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Пусть $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. ***Усреднением вектора* y *с весом* $\boldsymbol{\lambda}$** будем называть число $\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n =: \overline{\mathbf{y}_{\boldsymbol{\lambda}}}$.

Утверждение 1. *Пусть $f \in C[a,b]$, $x_i \in [a,b]$ и $y_i := f(x_i)$ для всех $i \in \overline{1,n}$; $\mathbf{y} := \big(f(x_i)\big)_{i=1}^{n}$ или кратко $\mathbf{y} = \big(f(x_i)\big)$, $\boldsymbol{\lambda}$ — вес. Тогда найдётся $\xi \in [a,b]$ такое, что*

$$f(\xi) = \overline{\big(f(x_i)\big)_{\boldsymbol{\lambda}}} = \overline{\mathbf{y}_{\boldsymbol{\lambda}}} = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Доказательство. Пусть $M := \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $m := \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Тогда

$$\begin{cases} m \leqslant f(x_1) \leqslant M, \\ \ldots \\ m \leqslant f(x_n) \leqslant M \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 m \leqslant \lambda_1 f(x_1) \leqslant \lambda_1 M, \\ \ldots \\ \lambda_n m \leqslant \lambda_n f(x_n) \leqslant \lambda_n M \end{cases} \xrightarrow{(+) \text{ и О. } 1}$$

$$\xrightarrow{(+) \text{ и О. } 1} m \leqslant \overbrace{\lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)}^{f(\xi),\ \xi \in [a,b]} \leqslant M$$

и утверждение вытекает из теоремы 3.2.3 Больцано–Коши. ◀

Замечание 1. Пусть $a < b$ и $f \in C[a,b]$. Обозначим

$$f_{[a,b]} := \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$$

(интегральное) среднее значение функции f на $[a,b]$. По теореме 6.1.13 [Первая теорема о среднем] для некоторого $\widetilde{\xi} \in [a,b]$ выполнено равенство $f_{[a,b]} = f(\widetilde{\xi})$. С другой стороны, в силу утверждения 1, для некоторого $\xi \in [a,b]$ выполнено равенство $f(\xi) = \overline{\big(f(x_i)\big)_{\boldsymbol{\lambda}}}$. В случае, когда $f(x) \equiv const$ на $[a,b]$, имеем равенство $f_{[a,b]} = \overline{\big(f(x_i)\big)_{\boldsymbol{\lambda}}}$.

Сформулируем *общую идею численного интегрирования*. Необходимо выбрать вес $\boldsymbol{\lambda}$ и точки x_i так, чтобы сумма $\lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) =: \overline{\big(f(x_i)\big)_{\boldsymbol{\lambda}}}$ хорошо приближала интегральное среднее $f_{[a,b]}$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \overline{\big(f(x_i)\big)_{\boldsymbol{\lambda}}}(b-a),$$

и вычисление интеграла сводится к вычислению *значений функции в точках*.

Метод прямоугольников (метод интегральных сумм)

Пусть $P^n = (x_0, \ldots, x_n)$ — *равномерное разбиение невырожденного отрезка* $[a, b]$ на n частей. Метод прямоугольников заключается в вычислении интеграла по следующей формуле

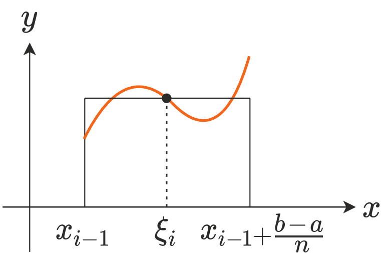


Рис. 25

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\Big) + R_n,$$

где R_n — ***остаточный член*** (см. рис. 25). Пусть $f \in C^2[a, b]$. Для оценки остаточного члена R_n проведём вспомогательные рассуждения.

Пусть $\delta > 0$, $I := [x_0, x_0 + \delta]$ — произвольный отрезок, $f \in C^2(I)$. Положим $c := x_0 + \delta/2$ и

$$r := \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dx - f(c)\delta.$$

Тогда

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dx \overset{\text{Т. 6.1.9}}{=} F(x_0+\delta) - F(x_0) = F\Big(c + \frac{\delta}{2}\Big) - F\Big(c - \frac{\delta}{2}\Big),$$

где $F'(t) = f(t)$ для всех $t \in [x_0, x_0 + \delta]$. По теореме Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для всех $x \in [0, \delta/2]$ имеем

$$F(c+x) - F(c-x) =: g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(\xi)}{6}x^3 =$$

$$= F(c) - F(c) + \big(f(c) + f(c)\big)x + \frac{f'(c) - f'(c)}{2}x^2 + \frac{f'''(\overbrace{c+\xi}^{\xi_1 \in I}) + f'''(\overbrace{c-\xi}^{\xi_2 \in I})}{6}x^3 =$$

$$= 2f(c)x + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}f''(\xi_1) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)\Big)x^3 \overset{\text{Утв. 1}}{=} 2f(c)x + \frac{f''(\widetilde{\xi})}{3}x^3,$$

отсюда при $x := \delta/2$ получим

$$r = \frac{f''(\widetilde{\xi})}{24}\delta^3. \tag{1}$$

Теперь, используя (1), оценим R_n. Обозначим

$$\boldsymbol{\lambda} := (1/n, \dots, 1/n), \quad \delta := (b-a)/n, \quad x_i := a + i\delta,$$
$$\Delta_i := [x_{i-1}, x_i] = [x_{i-1}, x_{i-1} + \delta], \quad \xi_i := (x_{i-1} + x_i)/2.$$

Тогда

$$R_n := \int\limits_a^b f(x)dx - \overbrace{\overline{\big(f(\xi_i)\big)}_{\boldsymbol{\lambda}}(b-a)}^{\sigma(P^n_{\boldsymbol{\xi}})} = \sum_{i=1}^n \int\limits_{\Delta_i} f(x)dx - \underbrace{\left(\frac{b-a}{n}\right)}_{\delta} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \Bigg(\overbrace{\int\limits_{\Delta_i} f(x)dx - f(\xi_i)\delta}^{r_i}\Bigg) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{f''(\widetilde{\xi}_i)}{24}\delta^3 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sum_{i=1}^n \frac{f''(\widetilde{\xi}_i)}{n} =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{24n^2} \overline{\big(f''(\widetilde{\xi}_i)\big)}_{\boldsymbol{\lambda}} \overset{\text{Утв. } 1}{=} \frac{(b-a)^3 f''(\xi)}{24} \frac{1}{n^2},$$

где $\xi \in [a, b]$. Отсюда в силу $f'' \in C[a, b]$ по теореме 3.2.4 [Первая теорема Вейерштрасса] имеем $\exists\, c : |R_n| \leqslant \dfrac{c(b-a)^3}{24} \dfrac{1}{n^2}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $R_n = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ — ***погрешность аппроксимации***.

Метод трапеций

Метод трапеций заключается в вычислении интеграла по следующей формуле:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \Big(\frac{1}{2} f(x_{i-1}) + \frac{1}{2} f(x_i)\Big) + R_n,$$

(см. рис. 26). Если $f \in C^2[a, b]$, то $R_n = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ (см. [12, с. 436]).

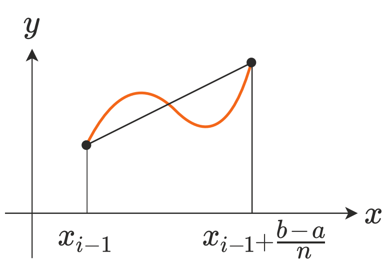


Рис. 26

Метод парабол (метод Симпсона)

Метод парабол заключается в вычислении интеграла по следующей формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{6}f(x_{i-1}) + \frac{2}{3}f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + \frac{1}{6}f(x_i)\right) + R_n,$$

(см. рис. 27). Если $f \in C^4[a,b]$, то $R_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ (см. [12, с. 438]), что *точнее по порядку*, чем оба предыдущих метода.

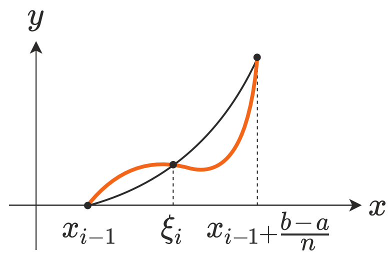


Рис. 27

Глава 8

Спрямляемые кривые, мера Жордана и её связь с интегралом Римана

§ 8.0. О нормированных пространствах

Для изложения этой и последующих глав нам понадобятся понятия открытого и замкнутого множеств, сходящейся последовательности и так далее. Эти объекты удобно вводить и рассматривать в *нормированных пространствах*, определение и основные свойства которых излагаются в этом параграфе.

Определение 1 (нормированного пространства). Пусть H — *линейное пространство* (над полем $\mathbb{R}$). Функция $\|\cdot\|\colon H \to \mathbb{R}$ называется ***нормой***, а пара $(H, \|\cdot\|)$ — (вещественным) ***нормированным пространством***, если для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$, $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено:

1) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$ (*неотрицательность*);

1.a) $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

2) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ (*абсолютная однородность*);

3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (*неравенство треугольника*).

При этом вместо $(H, \|\cdot\|)$ часто используют сокращённое обозначение H, автоматически подразумевая, что на H задана некоторая норма $\|\cdot\|$. В случаях, когда требуется явное указание пространства, на котором определена норма, для неё также используют обозначение $\|\cdot\|_H$.

Замечание 1. Поскольку в этом курсе мы изучаем исключительно *вещественный* анализ, то всюду далее будем предполагать, что все рассматриваемые линейные и нормированные пространства являются *вещественными*, то есть определены над полем $\mathbb{R}$.

Далее введём семейство норм, наиболее часто используемых в анализе.

Определение 2. Пусть $n \in \mathbb{N}, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Для всех $p \in [1, \infty]$ определим на линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ ***p-норму*** равенствами

$$\|\mathbf{x}\|_p \coloneqq (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \text{ при } p \in [1, \infty), \quad \|\mathbf{x}\|_\infty \coloneqq \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Неравенство треугольника для выше определённых норм при $p \in [1, \infty)$ есть не что иное, как неравенство 4.7.5 Минковского, а при $p = \infty$ является следствием неравенства 1.4.4 треугольника для чисел. Оставшиеся два свойства нормы проверяются непосредственно. Из курса алгебры известно, что лишь при $p = 2$ норма $\|\cdot\|_p$ является ***евклидовой***, то есть может быть представлена в виде $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle}$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — *некоторое скалярное произведение*. Конкретный вид этого скалярного произведения для $p = 2$ таков:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Так, введённое скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$ назовём ***стандартным*** и всюду далее будем пользоваться именно им.

Всюду далее в этом параграфе H — произвольное *вещественное нормированное пространство*, $H \supset \Omega$ — произвольное его подмножество. Через $\overline{\Omega} := H \setminus \Omega = \{\mathbf{x} \in H : \mathbf{x} \notin \Omega\}$ будем обозначать ***дополнение*** ко множеству Ω в пространстве H. Таким образом, для любых множеств $A, B \subset H$ верно равенство $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Лемма 1. *Для любых* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ *выполнено неравенство* $\big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Доказательство. Из неравенства треугольника получим $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Меняя $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ местами, получим $-(\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|) \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, отсюда и следует утверждение леммы. ◀

Определение 3. Пусть $\delta > 0$, $\mathbf{x}_0 \in H$.

Множество $O_\delta(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in H : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta\}$ называется ***открытым шаром*** радиуса δ с центром в $\mathbf{x}_0$.

Множество $\overset{\circ}{O}_\delta(\mathbf{x}_0) := O_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ называется ***проколотым открытым шаром*** радиуса δ с центром в $\mathbf{x}_0$.

Множество $S_\delta(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in H : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \delta\}$ называется ***сферой*** радиуса δ с центром в $\mathbf{x}_0$.

Множество $B_\delta(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in H : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leqslant \delta\} = O_\delta(\mathbf{x}_0) \cup S_\delta(\mathbf{x}_0)$ называется ***замкнутым шаром*** радиуса δ с центром в $\mathbf{x}_0$.

Пример 1. Ниже (см. рис. 28) приведены изображения единичной сферы $S_1(\mathbf{0})$ в пространствах $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ при $p = 1, 2, \infty$:

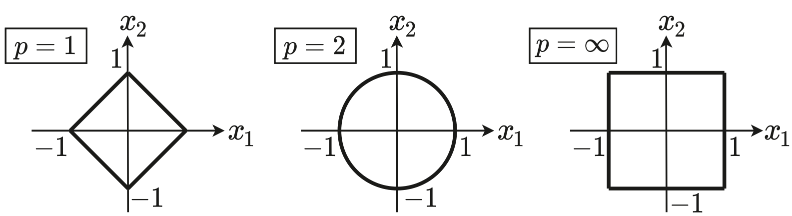


Рис. 28

Определение 4 (ограниченного множества). Множество Ω называется ***ограниченным***, если
$$\exists \delta > 0 : \Omega \subset O_\delta(\mathbf{0}).$$

Определение 5 (внутренней точки). Точка $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ называется ***внутренней*** точкой множества Ω, если
$$\exists \delta > 0 : O_\delta(\mathbf{x}_0) \subset \Omega.$$
Множество всех внутренних точек обозначается $\operatorname{int}(\Omega)$.

Определение 6 (открытого множества). Множество Ω называется ***открытым***, если $\Omega = \operatorname{int}(\Omega)$.

Определение 7. Точка $\mathbf{x}_0 \in H$ называется ***внешней*** для множества Ω, если
$$\exists \delta > 0 : \Omega \cap O_\delta(\mathbf{x}_0) = \varnothing.$$

Определение 8 (граничной точки). Точка $\mathbf{x}_0 \in H$ называется ***граничной*** для множества Ω, если $\mathbf{x}_0$ не является ни внутренней, ни внешней точкой Ω. Множество всех граничных точек обозначается $\partial(\Omega)$.

Замечание 2. Из определения 8 вытекает, что
$$\mathbf{x}_0 \text{ — граничная точка } \Omega \iff \forall \delta > 0 \ \exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in O_\delta(\mathbf{x}_0) : \mathbf{x}_1 \in \Omega, \ \mathbf{x}_2 \notin \Omega.$$

Определение 9 (предельной точки). Точка $\mathbf{x}_0 \in H$ называется ***предельной*** для множества Ω, если
$$\Omega \cap \mathring{O}_\delta(\mathbf{x}_0) \neq \varnothing \text{ для всех } \delta > 0.$$
Точки $x_0 \in \Omega$, не являющиеся предельными для множества Ω, называются ***изолированными*** точками множества Ω.

Определение 10 (замыкания). Пусть Ω' — множество всех *предельных* точек множества Ω. Тогда множество $\Omega \cup \Omega' =: \operatorname{cl}(\Omega)$ называется ***замыканием*** множества Ω.

Определение 11 (замкнутого множества). Множество Ω называется ***замкнутым***, если оно *содержит все свои предельные точки*, то есть если $\Omega = \operatorname{cl}(\Omega)$.

Замечание 3. Из определений 8 граничной точки, 9 предельной точки вытекает, что любая точка, не лежащая во множестве Ω, является для него предельной тогда и только тогда, когда она является граничной. Таким образом, $\operatorname{cl}(\Omega) = \Omega \cup \partial(\Omega)$. В силу того, что $\Omega \setminus \operatorname{int}(\Omega) \subset \partial(\Omega)$, также получим $\operatorname{cl}(\Omega) = \operatorname{int}(\Omega) \sqcup \partial(\Omega)$, отсюда $\operatorname{cl}(\Omega) \setminus \operatorname{int}(\Omega) = \partial(\Omega)$, $\operatorname{cl}(\Omega) \setminus \partial(\Omega) = \operatorname{int}(\Omega)$.

Лемма 2. *Ω замкнуто $\iff$ $\overline{\Omega}$ открыто.*

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Если $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$, то $\mathbf{x}_0$ не является предельной точкой для Ω, отсюда следует существование шара $O_\delta(\mathbf{x}_0) \subset \overline{\Omega}$.

$\Longleftarrow$: Если $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$, то существует шар $O_\delta(\mathbf{x}_0) \subset \overline{\Omega}$, а значит, $\mathbf{x}_0$ не является предельной точкой для Ω. ◀

Определение 12 (выпуклого множества). Множество Ω называется ***выпуклым***, если для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ имеем $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] := \{\mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) : t \in \in [0,1]\} \subset \Omega$.

Определение 13 (покрытия). ***Покрытием*** множества $\Omega \subset H$ в пространстве $(H, \|\cdot\|)$ называется любое семейство $A \subset \mathcal{P}(H)$ подмножеств H такое, что $\Omega \subset \bigcup A$. Если при этом все множества $\alpha \in A$ являются открытыми, то покрытие A называется ***открытым***.

Определение 14 (подпокрытия). ***Подпокрытием*** покрытия A множества Ω называется любое множество $B \subset A$ такое, что $\Omega \subset \bigcup B$.

Определение 15 (компакта). Множество Ω называется ***компактом***, если у любого его *открытого покрытия* существует *конечное* подпокрытие.

Определение 16. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество $A \subset H$ называется ***ε-сетью*** для множества Ω, если $\Omega \subset \bigcup\limits_{\mathbf{x}\in A} O_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Определение 17 (вполне ограниченного множества). Множество Ω называется ***вполне ограниченным***, если при любом $\varepsilon > 0$ для Ω существует *конечная ε-сеть*.

Замечание 4. Пусть множество $A \subset H$ является *ε-сетью* для множества Ω, то есть $\Omega \subset \bigcup\limits_{\mathbf{x}\in A} O_\varepsilon(\mathbf{x})$. Для каждого $\mathbf{x} \in A$ такого, что $\Omega \cap O_\varepsilon(\mathbf{x}) \neq \varnothing$, выберем произвольный элемент $\mathbf{y} \in \Omega \cap O_\varepsilon(\mathbf{x})$. В силу неравенства треугольника имеем $O_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset O_{2\varepsilon}(\mathbf{y})$, поэтому множество A', составленное из всех так выбранных точек $\mathbf{y}$, образует 2ε-сеть для множества Ω, и при этом $A' \subset \Omega$. ε-сети для множества Ω, являющиеся подмножествами Ω, будем называть ***внутренними***. Из сказанного выше вытекает, что если множество Ω *вполне ограничено*, то при любом $\varepsilon > 0$ для Ω существует *конечная внутренняя ε-сеть*.

Определение 18 (ограниченной последовательности). Последовательность $\mathbf{x}_k \in H$ называется ***ограниченной*** (***по норме*** $\|\cdot\|$), если *числовая последовательность* $\|\mathbf{x}_k\|$ *ограничена*.

Замечание 5. Ограниченность последовательности $\mathbf{x}_k$ по определению 18 совпадает, очевидно, с ограниченностью множества $\{\mathbf{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$ её значений по определению 4.

Определение 19 (сходящейся последовательности). Последовательность $\mathbf{x}_k \in H$ называется ***сходящейся*** (***по норме*** $\|\cdot\|$) к элементу $\mathbf{a} \in H$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| = 0$. При этом $\mathbf{a}$ называют ***пределом*** последовательности $\mathbf{x}_k$ (обозначения: $\mathbf{a} = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$ или $x_k \xrightarrow{k\to\infty} \mathbf{a}$ или $\mathbf{x}_k \overset{\|\cdot\|}{\to} \mathbf{a}$ или просто $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$).

Лемма 3 (об ограниченности сходящейся последовательности). *Любая сходящаяся последовательность $\mathbf{x}_k \in H$ является ограниченной.*

Доказательство. Если $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a} \in H$, то по определению 19 числовая последовательность $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\|$ является бесконечно малой, а следовательно, ограниченной (см. лемму 2.1.2). Но тогда последовательность $\|\mathbf{x}_k\| = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a} + \mathbf{a}\| \leqslant \leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{a}\|$ также является ограниченной. ◀

Лемма 4. *Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любых последовательностей $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in H$ таких, что $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a} \in H$, $\mathbf{y}_k \to \mathbf{b} \in H$, имеем*

$$\alpha\mathbf{x}_k + \beta\mathbf{y}_k \to \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}. \tag{1}$$

Доказательство. Используя свойства нормы и теорему 2.1.3 об арифметических операциях над сходящимися последовательностями, получим

$$0 \leqslant \|\alpha\mathbf{x}_k + \beta\mathbf{y}_k - (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})\| \leqslant |\alpha|\|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| + |\beta|\|\mathbf{y}_k - \mathbf{b}\| \to |\alpha|0 + |\beta|0 = 0.$$

Отсюда вытекает равенство (1) по принципу 2.1.2 двустороннего ограничения. ◀

Лемма 5. *Точка $\mathbf{a}$ является предельной для множества $\Omega \iff$ существует последовательность $\mathbf{x}_k \in \Omega : \mathbf{a} \neq \mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$.*

Доказательство.

$\Longrightarrow$: По определению 9 предельной точки для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдём точку $\mathbf{x}_k \in \Omega \cap \overset{\circ}{O}_{\frac{1}{k}}(\mathbf{a})$. Очевидно, $\mathbf{a} \neq \mathbf{x}_k \to \mathbf{a}$.

$\Longleftarrow$: Следует из определения 9 предельной точки, определения 19 сходящейся последовательности и того факта, что $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}$. ◀

Определение 20 (фундаментальной последовательности). Последовательность $\mathbf{x}_k \in H$ называется ***фундаментальной*** (по норме $\|\cdot\|$), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \geqslant N \quad \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| < \varepsilon.$$

Определение 21 (банахова пространства). Нормированное пространство называется ***полным***, если *любая фундаментальная последовательность его элементов сходится*. Полные нормированные пространства называются ***банаховыми***.

Лемма 6. *Пусть последовательность* $\mathbf{x}_m \in H$ *фундаментальна и имеет сходящуюся подпоследовательность* $\mathbf{x}_{m_k} \to \mathbf{x}_0$. *Тогда* $\mathbf{x}_m \to \mathbf{x}_0$.

Доказательство повторяет последний абзац доказательства теоремы 2.7.1 [Критерий Коши существования предела числовой последовательности]. Для любого $\varepsilon > 0$ по определению 20 фундаментальной последовательности найдётся индекс N такой, что

$$\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $p, q \geqslant N$. Также всегда найдётся индекс K такой, что $K \geqslant N$ и

$$\|\mathbf{x}_{m_K} - \mathbf{x}_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу неравенства $m_K \geqslant K \geqslant N$ для всех $q \geqslant N$ имеем

$$\|\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_0\| \leqslant \|\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_{m_K}\| + \|\mathbf{x}_{m_K} - \mathbf{x}_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и завершает доказательство леммы. ◄

Лемма 7. *Пусть множество* $K \subset H$ *обладает тем свойством, что для любой последовательности* $\mathbf{x}_m \in K$ *найдётся подпоследовательность* $\mathbf{x}_{m_p} \to \to \mathbf{x}_0 \in K$. *Тогда:*

(а) *Любая фундаментальная последовательность* $\mathbf{x}_m \in K$ *сходится к некоторому* $\mathbf{x}_0 \in K$.

(б) *Множество* K *вполне ограничено* (см. определение 17).

Доказательство. Утверждение (а) является прямым следствием леммы 6.

Для доказательства утверждения (б) предположим противное: пусть при некотором $\varepsilon > 0$ для множества K *не существует конечной* ε*-сети*. По индукции построим последовательность $\mathbf{x}_m \in K$ такую, что $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \geqslant \varepsilon$ для всех $i \neq j$. В качестве $\mathbf{x}_1$ возьмём произвольную точку из K. Пусть точки $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{m-1}$ уже выбраны. В качестве $\mathbf{x}_m$ возьмём произвольную точку множества $K \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m-1} O_\varepsilon(\mathbf{x}_i)$, которое непусто, так как иначе для K существовала бы конечная ε-сеть. Таким образом, для всех $i, j \in \overline{1, m}$ мы имеем $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \geqslant \varepsilon$ при $i \neq j$. Продолжая описанный процесс до бесконечности, получим последовательность $\mathbf{x}_m$, которая не может обладать сходящейся подпоследовательностью $\mathbf{x}_{m_p}$. Действительно, если $\mathbf{x}_{m_p} \to \mathbf{x}_0$, то для всех $p_1, p_2 \geqslant N = N(\varepsilon/2)$ мы имели бы

$$\|\mathbf{x}_{m_{p_1}} - \mathbf{x}_{m_{p_2}}\| \leqslant \|\mathbf{x}_{m_{p_1}} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{m_{p_2}}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что противоречит построению последовательности $\mathbf{x}_m$. ◀

Теорема 1 (о секвенциальной компактности). *Множество $K \subset H$ является компактом* (см. определение 15) $\iff$ *для любой последовательности $\mathbf{x}_m \in K$ найдётся подпоследовательность $\mathbf{x}_{m_p} \to \mathbf{x}_0 \in K$.*

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Пусть некоторая последовательность $\mathbf{x}_m \in K$ не содержит никакой сходящейся к некоторой точке компакта K подпоследовательности. Для любого множества $\Omega \subset H$ рассмотрим множество $M(\Omega) := \{m \in \mathbb{N} : \mathbf{x}_m \in \Omega\}$, состоящее из натуральных чисел. Для любого $\mathbf{x} \in K$ найдётся некоторый шар $O_\delta(\mathbf{x}) =: U_\mathbf{x}$ такой, что множество $M(U_\mathbf{x})$ конечно, так как иначе существовала бы подпоследовательность $\mathbf{x}_{m_p} \to \mathbf{x} \in K$. Таким образом, $K \subset \bigcup\limits_{\mathbf{x}\in K} U_\mathbf{x}$ — открытое покрытие (см. определение 13) компакта K, из которого по определению 15 можно выделить конечное подпокрытие $\bigcup\limits_{i=1}^{q} U_{\mathbf{x}_i} \supset K$. Но это означает, что $\bigcup\limits_{i=1}^{q} M(U_{\mathbf{x}_i}) = \mathbb{N}$, что противоречит конечности каждого из множеств $M(U_{\mathbf{x}_i})$.

$\Longleftarrow$: Пусть K — не компакт, то есть найдётся его открытое покрытие $\bigcup A \supset K$, у которого не существует конечного подпокрытия. По лемме 7 множество K *вполне ограничено* и при $\varepsilon := 1/2$ найдётся конечная *внутренняя* (см. замечание 4) ε-сеть для K. Возьмём в качестве $\mathbf{x}_1$ такую точку этой сети, что множество $K \cap O_{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_1)$ не покрывается конечным набором множеств семейства A ($\mathbf{x}_1$ всегда существует, так как иначе для множества K нашлось бы конечное подпокрытие покрытия A). Затем при $\varepsilon := 1/4$ найдём для K конечную внутреннюю ε-сеть, а в качестве $\mathbf{x}_2$ возьмём такую точку этой сети, что множество $K \cap O_{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_1) \cap O_{\frac{1}{4}}(\mathbf{x}_2)$ $\big($а следовательно, и множество $K \cap O_{\frac{1}{4}}(\mathbf{x}_2)\big)$ не покрывается конечным набором множеств семейства A ($\mathbf{x}_2$ всегда существует, так как иначе для множества $K \cap O_{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_1)$ нашлось бы конечное подпокрытие покрытия A, что противоречит выбору точки $\mathbf{x}_1$). Продолжая действовать по аналогии, на k-м шаге построим конечную внутреннюю $1/2^k$-сеть для K и в качестве $\mathbf{x}_k$ возьмём такую точку этой сети, что множество $K \cap O_{\frac{1}{2^{k-1}}}(\mathbf{x}_{k-1}) \cap O_{\frac{1}{2^k}}(\mathbf{x}_k)$

$\big($а следовательно, и множество $K \cap O_{\frac{1}{2^k}}(\mathbf{x}_k)\big)$ не покрывается конечным набором множеств семейства A. Продолжая описанный процесс до бесконечности, получим последовательность $\mathbf{x}_k$, для которой при всех $k \in \mathbb{N}$ по построению имеем $K \cap O_{\frac{1}{2^{k-1}}}(\mathbf{x}_{k-1}) \cap O_{\frac{1}{2^k}}(\mathbf{x}_k) \neq \varnothing$, отсюда, пользуясь неравенством треугольника, получим

$$\|\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k\| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{k-2}}.$$

Таким образом, при $p < q$ имеем

$$\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| \leqslant \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_{p+1}\| + \|\mathbf{x}_{p+1} - \mathbf{x}_{p+2}\| + \ldots + \|\mathbf{x}_{q-1} - \mathbf{x}_q\| <$$
$$< \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{2^{p-2}},$$

отсюда следует *фундаментальность* (см. определение 20) последовательности $\mathbf{x}_k$. Используя лемму 7, получим $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \in K$. Далее для некоторого $\alpha_0 \in A$ имеем $\mathbf{x}_0 \in \alpha_0$, следовательно, в силу открытости α_0 найдётся $\delta > 0$ такое, что $O_\delta(\mathbf{x}_0) \subset \alpha_0$. Выбирая $N \in \mathbb{N}$ такое, что $1/2^N < \delta/2$, а затем $k \geqslant N$ такое, что $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| < \delta/2$, в силу неравенства треугольника получим

$$O_{\frac{1}{2^k}}(\mathbf{x}_k) \subset O_\delta(\mathbf{x}_0) \subset \alpha_0,$$

а это противоречит тому, что по построению шар $O_{\frac{1}{2^k}}(\mathbf{x}_k)$ не покрывается конечным набором множеств семейства A. Теорема полностью доказана. ◀

Замечание 6. Отметим, что теорема 1 о секвенциальной компактности (вместе с леммами 6 и 7) остаётся в силе для произвольного *метрического пространства M* (см. пункт 10.2.1), достаточно всюду заменить H на M и $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ на $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Определение 22 (эквивалентности норм). Пусть на одном и том же линейном пространстве H определены нормы $\|\cdot\|$ и $\widetilde{\|\cdot\|}$. Нормы $\|\cdot\|$ и $\widetilde{\|\cdot\|}$ называются ***эквивалентными***, если существуют $c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1\widetilde{\|\mathbf{x}\|} \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant c_2\widetilde{\|\mathbf{x}\|}$ для всех $\mathbf{x} \in H$. *Обозначение*: $\|\cdot\| \sim \widetilde{\|\cdot\|}$. Для нормированных пространств $H_1 := (H, \|\cdot\|)$ и $H_2 := (H, \widetilde{\|\cdot\|})$, наделённых эквивалентными нормами, мы также будем использовать обозначение $H_1 \sim H_2$.

Нетрудно проверить, что введённое в определении 22 *бинарное отношение* $\sim$ на классе нормированных пространств действительно является *отношением эквивалентности* по определению 0.6.2 (то есть оно *рефлексивно, симметрично и транзитивно*).

Лемма 8. $\|\cdot\|_1 \overset{а)}{\sim} \|\cdot\|_\infty \overset{б)}{\sim} \|\cdot\|_2$ (см. определения 2 и 22).

Доказательство.

а): $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \leqslant \|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant$
$\leqslant n \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = n\|\mathbf{x}\|_\infty.$

б): $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leqslant$
$\leqslant \sqrt{n} \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty.$

По транзитивности из а) и б) следует $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$. ◀

Замечание 7. Важно отметить, что свойства некоторой точки быть внутренней или внешней для Ω, свойства множества Ω быть ограниченным, открытым, замкнутым или компактным, свойства некоторой последовательности быть сходящейся к некоторому элементу $\mathbf{x}_0$ или быть фундаментальной *зависят от выбора нормы* $\|\cdot\|$ на линейном пространстве H. Однако все эти свойства *сохраняются при переходе к эквивалентной норме*. Позже мы покажем (см. теорему 9.1.14), что в случае $H = \mathbb{R}^n$ рассмотренные свойства *не зависят от выбора нормы*, так как в $\mathbb{R}^n$ *все нормы эквивалентны*.

Определение 23 (прямого произведения нормированных пространств). ***Прямым произведением*** (вещественных) ***нормированных пространств*** H, N называется (вещественное) нормированное пространство $(V, \|\cdot\|)$, где $V := H \times N$ и $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\|\mathbf{h}\|_H^2 + \|\mathbf{n}\|_N^2}$ для всех $\mathbf{x} = (\mathbf{h}, \mathbf{n}) \in V$.

Замечание 8. Из определения 23 прямого произведения нормированных пространств непосредственно вытекает равенство

$$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) = (\mathbb{R}, |\cdot|) \times (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

§ 8.1. Спрямляемые кривые

Определение 1 (кривой). ***Параметризованной кривой*** (или просто ***кривой***) в $\mathbb{R}^n$ называется функция $\gamma\colon \mathbb{R} \supset \mathrm{Dom}(\gamma) \to \mathbb{R}^n$. В случае, когда функция γ *инъективна*, её называют ***простой*** кривой. Множество $\{\gamma(t) : t \in \mathrm{Dom}(\gamma)\}$ называется ***следом*** (***носителем***) кривой γ.

Далее для сокращения выкладок в основном будем рассматривать случай $n = 2$ (то есть рассмотрим *плоские кривые*). В общем случае $n \in \mathbb{N}$ соответствующие определения и утверждения выглядят аналогично.

Замечание 1. График функции $f\colon \mathbb{R} \supset \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ можно рассматривать как след параметризованной плоской кривой $\gamma(x) := \big(x, f(x)\big)$.

Замечание 2. Следы *различных* кривых могут совпадать. Например, пусть $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, где

$$\gamma_1(t) \coloneqq (t,1), \gamma_2(t) \coloneqq (\varphi(t),1), \varphi(t) \coloneqq \begin{cases} t & \text{при } t \in [0,1] \cap Q; \\ 1-t & \text{при } t \in [0,1] \cap (R \setminus Q). \end{cases}$$

Легко видеть, что $\gamma_1([0,1]) = \gamma_2([0,1])$ и след этих кривых представляет собой единичный отрезок, однако функция φ является разрывной и не является монотонной на любом вложенном в $[0,1]$ непустом интервале.

Пусть $\gamma = (\varphi, \psi)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $P = (a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b)$ — *разбиение* отрезка $[a,b]$. Обозначим точки $M_i \coloneqq \gamma(t_i) = \big(\varphi(t_i), \psi(t_i)\big)$ при $i \in \overline{0,n}$. Ломаную $l(P) = l(\gamma, P) \coloneqq M_0 M_1 \ldots M_n$ будем называть ***вписанной в кривую*** γ. В силу равенства

$$|M_{i-1}M_i| = \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|_2 = \sqrt{\big(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\big)^2 + \big(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\big)^2}$$

имеем

$$|l(P)| = |l(\gamma, P)| \coloneqq \sum_{i=1}^{n(P)} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|_2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n(P)} \sqrt{\big(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\big)^2 + \big(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\big)^2}$$

— длина ломаной l.

Определение 2 (длины кривой). Параметризованная кривая $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ называется ***спрямляемой***, если множество $\Omega \coloneqq \{|l(\gamma, P)| : P$ — разбиение $[a,b]\}$ длин всевозможных ломаных, *вписанных в кривую* γ, ограничено. Тогда число $|\gamma| \coloneqq \sup \Omega$ называется ***длиной параметризованной кривой*** γ.

Пример 1. По определению 2 длины кривой проверяется, что кривая γ_1, рассматриваемая в замечании 2, спрямляема и $|\gamma_1| = 1$, тогда как кривая γ_2 спрямляемой не является.

Лемма 1. *Пусть P — разбиение отрезка $[a,b]$, P' — измельчение разбиения P. Тогда $|l(P)| \leqslant |l(P')|$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда к разбиению P добавляется только одна точка $\bar{t}$. Пусть $t_{k-1} < \bar{t} < t_k$, $N \coloneqq \big(\varphi(\bar{t}), \psi(\bar{t})\big)$. Тогда

$$|M_{k-1}M_k| \leqslant |M_{k-1}N| + |NM_k|$$

в силу неравенства треугольника, а все остальные звенья ломаных $l(P)$ и $l(P')$ совпадают, значит, $|l(P)| \leqslant |l(P')|$. ◀

Лемма 2 (о постоянстве длины спрямляемой кривой при непрерывной биекции). *Пусть* $\gamma = (\varphi, \psi)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — *спрямляемая кривая, функция* $g\colon [\widetilde{a}, \widetilde{b}] \xrightarrow{\sim} [a,b]$ *является биекцией,* $g \in C[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$, $\widetilde{\gamma} := (\varphi \circ g, \psi \circ g)\colon [\widetilde{a}, \widetilde{b}] \to \mathbb{R}^2$. *Тогда* $|\gamma| = |\widetilde{\gamma}|$.

Доказательство. По теореме 3.3.4 функция g является строго монотонной, а следовательно, устанавливает биекцию между всевозможными разбиениями $\widetilde{P}$ отрезка $[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ и разбиениями P отрезка $[a,b]$ по правилу $\widetilde{P} = (t_0, \ldots, t_n) \mapsto$ $\mapsto P$, где $P := \big(g(t_0), \ldots, g(t_n)\big)$ в случае возрастающей функции g и $P :=$ $:= \big(g(t_n), \ldots, g(t_0)\big)$ в случае, когда g убывает. В силу равенства $|l(\gamma, P)| =$ $= |l(\widetilde{\gamma}, \widetilde{P})|$ имеем совпадение числовых множеств длин соответствующих *вписанных ломаных* $\Omega = \{|l(\gamma, P)|\}$ и $\widetilde{\Omega} = \{|l(\widetilde{\gamma}, \widetilde{P})|\}$, поэтому $|\gamma| = \sup \Omega =$ $= \sup \widetilde{\Omega} = |\widetilde{\gamma}|$. ◀

Теорема 1 (о длине параметризованной кривой). *Пусть* $\varphi, \psi \in C[a,b] \cap$ $\cap D(a,b)$, *а их производные* φ' *и* ψ' *ограничены на* (a,b). *Тогда:*

(а) *параметризованная кривая* $\gamma = (\varphi, \psi)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *спрямляема;*

(б) *если* $\varphi', \psi' \in R[a,b]$, *то*

$$|\gamma| = \int\limits_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

где $\|\gamma'(t)\| = \|\gamma'(t)\|_2 := \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$.

Доказательство. Для некоторого $M > 0$ имеем $|\varphi'(t)| \leqslant M$ и $|\psi'(t)| \leqslant M$ при всех $t \in (a,b)$. Пусть P — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$.

(а): По теореме 4.4.6 Лагранжа найдутся точки $\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ такие, что

$$|l(P)| = \sum_{i=1}^{n(P)} \sqrt{\big(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\big)^2 + \big(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\big)^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n(P)} \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\eta_i)]^2}\Delta t_i \leqslant \sum_{i=1}^{n(P)} \sqrt{M^2 + M^2}\Delta t_i = M(b-a)\sqrt{2},$$

то есть кривая γ *спрямляема*.

(б): Фиксируем $\varepsilon > 0$. Из теоремы 8 вытекает существование интеграла

$$\int\limits_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt =: I.$$

Для точек ξ_i, η_i из пункта (а) при $|\psi'(\eta_i)| + |\psi'(\xi_i)| \neq 0$ имеем

$$\left|\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\eta_i)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2}\right| =$$

$$= \frac{|\psi'(\eta_i) - \psi'(\xi_i)||\psi'(\eta_i) + \psi'(\xi_i)|}{\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\eta_i)]^2} + \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\psi'(\eta_i) - \psi'(\xi_i)|(|\psi'(\eta_i)| + |\psi'(\xi_i)|)}{|\psi'(\eta_i)| + |\psi'(\xi_i)|} \leqslant |\psi'(\eta_i) - \psi'(\xi_i)| \overset{\text{О. } 6.1.8}{\leqslant} \omega_i(\psi'). \quad (1)$$

В случае $|\psi'(\eta_i)| + |\psi'(\xi_i)| = 0$ неравенство (1) является тривиальным. В силу равенств

$$|l(P)| = \sum_{i=1}^{n(P)} \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\eta_i)]^2}\Delta t_i,$$

$$\sigma(\|\gamma'\|, P_{\boldsymbol{\xi}}) \overset{\text{О. } 6.1.5}{:=} \sum_{i=1}^{n(P)} \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2}\Delta t_i$$

получим

$$\big||l(P)| - \sigma(\|\gamma'\|, P_{\boldsymbol{\xi}})\big| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n(P)} \left(\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\eta_i)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2}\right)\Delta t_i\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n(P)} \left|\sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\eta_i)]^2} - \sqrt{[\varphi'(\xi_i)]^2 + [\psi'(\xi_i)]^2}\right|\Delta t_i \overset{(1)}{\leqslant}$$

$$\overset{(1)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{n(P)} \omega_i(\psi')\Delta t_i < \frac{\varepsilon}{4}$$

при $d(P) < \delta_1 = \delta_1(\varepsilon/4)$ в силу теоремы 6.1.3 [Критерии интегрируемости]. Также по определению 7 интеграла Римана при $d(P) < \delta_2 = \delta_2(\varepsilon/4)$ имеем $\big|\sigma(\|\gamma'\|, P_{\boldsymbol{\xi}}) - I\big| < \varepsilon/4$, поэтому при $d(P) < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ имеем

$$\big||l(P)| - I\big| \leqslant \big||l(P)| - \sigma(\|\gamma'\|, P_{\boldsymbol{\xi}})\big| + \big|\sigma(\|\gamma'\|, P_{\boldsymbol{\xi}}) - I\big| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

По определению 2 длины кривой существует P_1 — разбиение отрезка $[a, b]$ такое, что $0 \leqslant |\gamma| - |l(P_1)| < \varepsilon/2$. Измельчим P_1 так, чтобы получить некоторое разбиение P с диаметром, меньшим δ. По лемме 1 имеем $|l(P_1)| \leqslant |l(P)| \leqslant |\gamma|$, отсюда $0 \leqslant |\gamma| - |l(P)| \leqslant |\gamma| - |l(P_1)| < \varepsilon/2$. Таким образом,

$$\big||\gamma| - I\big| \leqslant \big||\gamma| - |l(P)|\big| + \big||l(P)| - I\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε окончательно получим $|\gamma| = I$. ◀

Определение 3 (функции с ограниченной вариацией). Говорят, что функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ обладает ***ограниченной вариацией*** (или ограниченным изменением), если $V_a^b(f) \coloneqq \sup\limits_P \sum\limits_{i=1}^{n(P)} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\| < +\infty$, где супремум берётся по всевозможным *разбиениям* (см. определение 6.1.1) P отрезка $[a,b]$ и $\|\cdot\| \coloneqq \|\cdot\|_2$ (см. определение 0.2). При этом число $V_a^b(f)$ называется ***полной вариацией*** функции f на отрезке $[a,b]$. Класс всех *функций с ограниченной вариацией* на отрезке $[a,b]$ будем обозначать $BV[a,b]$.

Замечание 3. Из определений 2 длины кривой и 3 функции с ограниченной вариацией вытекает, что параметризованная кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ является спрямляемой тогда и только тогда, когда $\gamma \in BV[a,b]$, причём в случае её спрямляемости верно равенство

$$|\gamma| = V_a^b(\gamma).$$

Утверждение 1 (о компонентах функции с ограниченной вариацией). *Пусть* $\gamma = (\varphi,\psi)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, *тогда* $\gamma \in BV[a,b] \iff \varphi,\psi \in BV[a,b]$.

Доказательство. Для любого разбиения P отрезка $[a,b]$ и любых двух точек x_{i-1}, x_i этого разбиения выполнены неравенства

$$\begin{gathered}\max\{|\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})|, |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})|\} \eqqcolon \\ \eqqcolon \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|_\infty \leqslant \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|_2, \qquad (2) \\ \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|_2 \leqslant \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|_1 \coloneqq \\ \coloneqq |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| + |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})|. \qquad (3)\end{gathered}$$

$\Longrightarrow$: Вытекает из неравенства (8.1), причём $V_a^b(\varphi), V_a^b(\psi) \leqslant V_a^b(\gamma)$.

$\Longleftarrow$: Вытекает из неравенства (8.1), причём $V_a^b(\gamma) \leqslant V_a^b(\varphi) + V_a^b(\psi)$. ◀

Замечание 4. По ходу доказательства теоремы 1 о длине параметризованной кривой установлено, что при выполнении условий пункта (б) выполнено $\lim\limits_{d(P)\to 0} |l(P)| = |\gamma| \coloneqq V_a^b(\gamma)$. Используя теорему 3.9.1 Кантора–Гейне о равномерной непрерывности, можно показать, что этот факт имеет место для любой *непрерывной спрямляемой кривой* γ, однако не для любой спрямляемой кривой это так.

Например, для разрывной кривой $\gamma(x) = \big(x, f(x)\big)\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, где

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]; \\ 1 & \text{при } x = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

имеем $|\gamma| = 3$, но не существует $\lim\limits_{d(P)\to 0} |l(P)|$.

§ 8.2. Мера Жордана

Определение 1 (объёма бруса). ***Длиной*** (***одномерным объёмом***) *конечного промежутка* (см. определение 1.4.4) I вида (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ или $[a, b]$ будем называть число $|I| \coloneqq b - a$. Если $I_1, \ldots, I_n$ — *конечные промежутки*, то множество $B \coloneqq I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ будем называть (n-мерным) ***параллелепипедом***, или (n-мерным) ***брусом***. Число $|B| \coloneqq |I_1||I_2| \cdot \ldots \cdot |I_n|$ будем называть (n-мерным) ***объёмом бруса*** B, при этом двухмерный объём будем называть ***площадью***. Множество $E \coloneqq \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$, являющееся *конечным объединением брусов* B_i, будем называть ***элементарной фигурой*** (***элементарным множеством***). Через $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать класс всех *элементарных фигур* в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 1. *Пусть* $E, F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. *Тогда множества* $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ *и* $E + \mathbf{x} \coloneqq \{\mathbf{y} + \mathbf{x} : \mathbf{y} \in E\}$ *принадлежат* $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Утверждение леммы для множеств $E + \mathbf{x}$ и $E \cup F$ вытекает из определения 1 непосредственно. Для множества $E \cap F$ следует из того, что пересечение двух брусов снова является брусом. Далее для любых брусов $B_1 = I_1 \times \ldots \times I_n$, $B_2 = J_1 \times \ldots \times J_n$ получим, что множество

$$B_1 \setminus B_2 = B_1 \cap \overline{B_2} = B_1 \cap \overline{J_1 \times \ldots \times J_n} =$$
$$= B_1 \cap \bigcup_{j=1}^{n} \big(\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \overline{J_j} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}\big) =$$
$$= \bigcup_{j=1}^{n} \big(B_1 \cap \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \overline{J_j} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}\big) =$$
$$= \bigcup_{j=1}^{n} \big(I_1 \times \ldots \times I_{j-1} \times I_j \cap \overline{J_j} \times I_{j+1} \times \ldots \times I_n\big)$$

является элементарной фигурой, так как $I_j \cap \overline{J_j}$ всегда представимо в виде объединения не более чем двух конечных промежутков. В силу равенства

$$\bigcup_i B_i \setminus \bigcup_j B'_j = \Big(\bigcup_i B_i\Big) \cap \overline{\bigcup_j B'_j} = \Big(\bigcup_i B_i\Big) \cap \bigcap_j \overline{B'_j} =$$
$$= \bigcup_i \bigcap_j (B_i \cap \overline{B'_j}) = \bigcup_i \bigcap_j (B_i \setminus B'_j)$$

по индукции получим, что $E \setminus F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. ◀

Лемма 2. *Пусть* $E = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ *— произвольная элементарная фигура, где все* B_i *суть* n*-мерные брусы. Тогда существует представление* $E = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m'} B'_j$, *где* B'_j *— непересекающиеся брусы.*

Доказательство. Для начала докажем лемму в одномерном случае $\Big(n = 1$ и $E = \bigcup\limits_{i=1}^{m} I_i\Big)$. Упорядочив все граничные точки промежутков $I_1, \ldots, I_m$ по возрастанию, получим точки $x_1 < x_2 < \ldots < x_l$. Рассмотрим множество $\Omega := \{J_q : q \in \overline{1, 2l-1}\}$, состоящее из *попарно непересекающихся промежутков* вида $J_q := (x_q, x_{q+1})$ при $q \in \overline{1, l-1}$, $J_q := [x_{q-l+1}, x_{q-l+1}] = \{x_{q-l+1}\}$ при $q \in \overline{l, 2l-1}$. Тогда каждый промежуток I_i представим в виде объединения некоторого семейства промежутков из Ω, а значит, и всё множество E имеет такое представление. Исключая все совпадающие промежутки, получим искомое представление для E в случае $n = 1$.

В случае $n \geqslant 2$ имеем $B_i = I_i^1 \times \ldots \times I_i^n$, где I_i^j суть конечные промежутки при всех $i \in \overline{1, m}$, $j \in \overline{1, n}$. Выше установлено, что при всех $j \in \overline{1, n}$ найдётся семейство Ω_j *попарно непересекающихся промежутков* такое, что для всех $i \in \overline{1, m}$ имеет место представление $I_i^j = \bigsqcup\limits_{k=1}^{p(i,j)} J_j^k$, где каждый из промежутков J_j^k принадлежит множеству Ω_j. Но тогда для каждого $i \in \overline{1, m}$ имеем представление

$$B_i = I_i^1 \times \ldots \times I_i^n = \left(\bigsqcup_{k=1}^{p(i,1)} J_1^k\right) \times \ldots \times \left(\bigsqcup_{k=1}^{p(i,n)} J_n^k\right).$$

Используя равенство $\big(A \sqcup B\big) \times C = \big(A \times C\big) \sqcup \big(B \times C\big)$, получим представление бруса B_i в виде объединения попарно непересекающихся брусов вида $Y_1 \times \ldots \times Y_n$, где $Y_j \in \Omega_j$ при всех $j \in \overline{1, n}$. Но из того, что множества Ω_j состоят из *непересекающихся промежутков*, следует, что полученные брусы, соответствующие различным B_i, могут либо не пересекаться, либо совпадать. Убирая все совпадения, получим для элементарной фигуры E искомое представление. ◀

Лемма 3. *Пусть* $E = \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} B_i = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m'} B'_j$ *— два представления элементарной фигуры* E *в виде объединения непересекающихся* n*-мерных брусов. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{m} |B_i| = \sum_{j=1}^{m'} |B'_j|.$$

Доказательство. Обозначим через $\frac{1}{q}\mathbb{Z} := \{p/q : p \in \mathbb{Z}\}$ множество всех рациональных чисел с *фиксированным знаменателем* $q \in \mathbb{N}$. Для *конечного* множества A обозначим через $\#A := \operatorname{card}(A)$ *количество элементов* в этом множестве. Тогда для произвольного *конечного промежутка* I имеем

$$\left| \frac{\#\left(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\right)}{q} - |I| \right| \leqslant \frac{1}{q},$$

поэтому

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\#\left(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\right)}{q} = |I|. \tag{1}$$

Таким образом, для произвольного *бруса* $B = I_1 \times \ldots \times I_n$ имеем

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\#\left(B \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n\right)}{q^n} = \lim_{q\to\infty} \frac{\#\left(I_1 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\right)}{q} \cdot \ldots \cdot \lim_{q\to\infty} \frac{\#\left(I_n \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\right)}{q} \overset{(1)}{=}$$
$$\overset{(1)}{=} |I_1| \cdot \ldots \cdot |I_n| = |B|,$$

где $\frac{1}{q}\mathbb{Z}^n := \{(p_1/q, \ldots, p_n/q) : p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}\}$. Но тогда

$$\sum_{i=1}^{m} |B_i| = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^n} \sum_{i=1}^{m} \#\left(B_i \cap \tfrac{1}{q}\mathbb{Z}^n\right) = \lim_{q\to\infty} \frac{\#\left(E \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n\right)}{q^n} =$$
$$= \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^n} \sum_{j=1}^{m'} \#\left(B'_j \cap \tfrac{1}{q}\mathbb{Z}^n\right) = \sum_{j=1}^{m'} |B'_j|,$$

что и требовалось доказать. ◀

Определение 2 (жордановой меры элементарных множеств). Для *произвольной элементарной фигуры* $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, которая всегда представима в виде $E \overset{\text{Л. 2}}{=} \bigsqcup_{i=1}^{m} B_i$, определим её ***меру Жордана***(***жорданову меру***)

$$\mu(E) := \sum_{i=1}^{m} |B_i|.$$

Корректность данного определения следует из леммы 3.

Замечание 1. Из определения 2 жордановой меры элементарных множеств следует, что *жорданова мера* n-мерных брусов совпадает с их *объёмом* (см. определение 1).

Теорема 1 (о свойствах жордановой меры элементарных множеств). *Пусть* $E, F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, *тогда:*

1) $\mu(E) \geqslant 0$ *(неотрицательность);*
2) $\mu(E \sqcup F) = \mu(E) + \mu(F)$ *(аддитивность);*
3) $\mu(E + \mathbf{x}) = \mu(E)$ *для любого* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *(инвариантность относительно сдвигов);*
4) $E \subset F \implies \mu(E) \leqslant \mu(F)$ *(монотонность);*
5) $\mu(E \cup F) \leqslant \mu(E) + \mu(F)$ *(полуаддитивность).*

Доказательство. Свойства 1)–3) вытекают напрямую из определения 2. Свойство 4) следует из равенства $F = E \sqcup (F \setminus E)$ следующим образом:

$$\mu(E) \overset{1)}{\leqslant} \mu(E) + \mu(F \setminus E) \overset{2)}{=} \mu(F).$$

Свойство 5) следует из соотношений

$$\mu(E \cup F) = \mu\big((E \setminus F) \sqcup F\big) \overset{2)}{=} \mu(E \setminus F) + \mu(F) \overset{4)}{\leqslant} \mu(E) + \mu(F). \qquad \blacktriangleleft$$

Утверждение 1 (о единственности жордановой меры элементарных множеств). *Пусть функция* $\mu' \colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *обладает свойствами 1)–3) неотрицательности, аддитивности и инвариантности относительно сдвигов, сформулированными в теореме 1, и* $\mathrm{Dom}(\mu') = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда существует константа* $c \geqslant 0$ *такая, что* $\mu'(E) = c\mu(E)$ *для всех* $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. *В частности, если выполнено условие* $\mu'([0,1)^n) = 1$, *то* $\mu' = \mu$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 о свойствах жордановой меры элементарных множеств вытекает, что функция μ' также обладает свойствами 4) монотонности и 5) полуаддитивности. Положим $c := \mu'([0,1)^n)$. Для любого $q \in \mathbb{N}$ в силу аддитивности функции μ' и её инвариантности относительно сдвигов имеем

$$\mu'\left(\left[0, \frac{1}{q}\right)^n\right) \overset{2), 3)}{=} \frac{c}{q^n}.$$

Из тех же свойств 2) и 3) функции μ' заключаем, что утверждение теоремы достаточно проверить для *брусов* B с вершиной в начале координат. Пусть $B = I_1 \times \ldots \times I_n$. Если $B = \varnothing$, то из свойств 1) неотрицательности и 4) монотонности и из вложения $\varnothing \subset [0, 1/q)^n$ получим

$$0 \leqslant \mu'(\varnothing) \leqslant \mu'\left(\left[0, \frac{1}{q}\right)^n\right) = \frac{c}{q^n} \xrightarrow{q\to\infty} 0,$$

отсюда $\mu'(\varnothing) = 0$ по принципу 2.1.2 двустороннего ограничения. Если $B \neq \varnothing$, то найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $q \geqslant N$ и всех $i \in \overline{1,n}$ будет выполнено

$\#\big(I_i \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\big) \geqslant 1$ (здесь используются обозначения из доказательства леммы 3). Таким образом, при всех $q \geqslant N$ найдётся вписанная в брус B фигура, состоящая из $\prod\limits_{i=1}^{n}\big(\#\big(I_i \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\big) - 1\big)$ кубов объёма c/q^n, полученных сдвигами куба $[0, 1/q)^n$, а также описанная фигура, состоящая из $\prod\limits_{i=1}^{n}\big(\#\big(I_i \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\big) + 1\big)$ кубов того же типа. Тогда для всех $q \geqslant N$, используя свойство 4) монотонности, получим

$$\frac{c}{q^n}\prod_{i=1}^{n}\Big(\#\big(I_i \cap \tfrac{1}{q}\mathbb{Z}\big) - 1\Big) \leqslant \mu'(B) \leqslant \frac{c}{q^n}\prod_{i=1}^{n}\Big(\#\big(I_i \cap \tfrac{1}{q}\mathbb{Z}\big) + 1\Big),$$

отсюда, используя (1) при $q \to \infty$, получим

$$c\Bigg(\underbrace{\frac{\#\big(I_1 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\big)}{q} - \frac{1}{q}}_{\substack{\downarrow \\ |I_1|}}\Bigg) \cdot \ldots \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{\#\big(I_n \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\big)}{q} - \frac{1}{q}}_{\substack{\downarrow \\ |I_n|}}\Bigg) \leqslant \mu'(B) \leqslant$$

$$\leqslant c\Bigg(\underbrace{\frac{\#\big(I_1 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\big)}{q} + \frac{1}{q}}_{\substack{\downarrow \\ |I_1|}}\Bigg) \cdot \ldots \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{\#\big(I_n \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\big)}{q} + \frac{1}{q}}_{\substack{\downarrow \\ |I_n|}}\Bigg),$$

что в пределе даёт неравенство $c\mu(B) \leqslant \mu'(B) \leqslant c\mu(B)$, то есть $\mu'(B) = c\mu(B)$. Утверждение полностью доказано. ◀

Утверждение 2. *Пусть* $A, B \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \tag{2}$$

Доказательство. В силу леммы 1 и свойства 2) *аддитивности* жордановой меры имеем

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu\big((A \cap B) \sqcup (A \setminus B)\big) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B),\\ \mu(B) &= \mu\big((A \cap B) \sqcup (B \setminus A)\big) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A),\end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{gathered}\mu(A \cup B) = \mu\big((A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)\big) = \\ = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B),\end{gathered}$$

что и требовалось доказать. ◀

Определение 3 (внутренней и внешней мер Жордана). Пусть $\mathbb{R}^n \supset \supset \Omega$ — *ограниченное* (см. определение 0.4) множество. Тогда найдётся n-мерный куб $B \supset \Omega$ и корректно определены числа

$$\mu_*(\Omega) := \sup_{\Omega \supset E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} \mu(E) \quad \text{и} \quad \mu^*(\Omega) := \inf_{\Omega \subset E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)} \mu(E),$$

называемые соответственно ***внутренней мерой Жордана (нижним объёмом)*** и ***внешней мерой Жордана (верхним объёмом)*** множества Ω, для которых выполнены неравенства $0 \overset{\text{св-во 1)}}{\leqslant} \mu_*(\Omega) \overset{\text{св-во 4)}}{\leqslant} \mu(B)$ и $0 \overset{\text{св-во 1)}}{\leqslant} \mu^*(\Omega)$.

Лемма 4. *Для любого ограниченного множества $\Omega \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$\mu_*(\Omega) \leqslant \mu^*(\Omega).$$

Доказательство повторяет доказательство аналогичной леммы 6.1.5 для интегралов Дарбу с использованием свойства 4) монотонности жордановой меры элементарных множеств. ◀

Определение 4 (жордановой меры). *Ограниченное* множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется ***измеримым по Жордану***, если $\mu_*(\Omega) = \mu^*(\Omega)$. При этом число $\mu(\Omega) := \mu_*(\Omega) = \mu^*(\Omega)$ называется ***мерой Жордана*** (или ***жордановой мерой***) множества Ω. Наряду с $\mu(\Omega)$ будем также пользоваться обозначениями $\mu_n(\Omega)$ и $\mu_n^J(\Omega)$ в случаях, когда требуется явно указать размерность пространства или отметить тот факт, что рассматривается именно мера *Жордана*. Неограниченные множества Ω, а также те, для которых $\mu_*(\Omega) < \mu^*(\Omega)$ будем называть ***неизмеримыми по Жордану***. Через $J(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать класс всех *измеримых по Жордану множеств* в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 2. Из определения 4 жордановой меры вытекает, что $\mu(\Omega) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : \Omega \subset E$ и $\mu(E) < \varepsilon$.

Замечание 3. Из определения 4 жордановой меры вытекает, что $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \subset \subset J(\mathbb{R}^n)$. Также для всех $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ определения 2 жордановой меры элементарных множеств и 4 жордановой меры $\mu(E)$ *эквивалентны.*

Теорема 2. $\Omega \in J(\mathbb{R}^n) \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists P, Q \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : P \subset \Omega \subset Q$ *и*

$$\mu(Q \setminus P) = \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: По определению $\inf$ и $\sup$ получим $\forall \varepsilon > 0\ \exists P, Q \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : P \subset \Omega \subset Q$ и

$$\mu_*(\Omega) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(P) \leqslant \mu_*(\Omega) \iff -\mu_*(\Omega) \leqslant -\mu(P) < \frac{\varepsilon}{2} - \mu_*(\Omega),$$
$$\mu^*(\Omega) \leqslant \mu(Q) < \mu^*(\Omega) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Складывая эти неравенства и используя $\mu_*(\Omega) = \mu^*(\Omega)$, получим $0 \leqslant \mu(Q) - -\mu(P) < \varepsilon$.

$\Longleftarrow$: Имеем

$$\begin{cases} \mu(P) \leqslant \mu_*(\Omega) \\ \mu^*(\Omega) \leqslant \mu(Q) \end{cases} \overset{(+)}{\Longrightarrow} 0 \overset{\text{л. } 4}{\leqslant} \mu^*(\Omega) - \mu_*(\Omega) \leqslant \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $\mu_*(\Omega) = \mu^*(\Omega)$ и теорема доказана. ◀

Лемма 1′. *Лемма 1 остаётся в силе при замене $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ на $J(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по теореме 2 найдутся $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ такие, что $P_1 \subset E \subset Q_1$, $P_2 \subset F \subset Q_2$ и $\mu(Q_1 \setminus P_1) < \varepsilon/2$, $\mu(Q_2 \setminus P_2) < < \varepsilon/2$. Имеем

$$P_1 \cup P_2 \subset E \cup F \subset Q_1 \cup Q_2,$$
$$P_1 \cap P_2 \subset E \cap F \subset Q_1 \cap Q_2,$$
$$P_1 \setminus Q_2 \subset E \setminus F \subset Q_1 \setminus P_2;$$

а также

$$(Q_1 \cup Q_2) \setminus (P_1 \cup P_2) \subset (Q_1 \setminus P_1) \cup (Q_2 \setminus P_2),$$
$$(Q_1 \cap Q_2) \setminus (P_1 \cap P_2) \subset (Q_1 \setminus P_1) \cup (Q_2 \setminus P_2),$$
$$(Q_1 \setminus P_2) \setminus (P_1 \setminus Q_2) = (Q_1 \cap \overline{P_1}) \cap \overline{P}_2 \cup (Q_2 \cap \overline{P}_2) \cap Q_1 \subset (Q_1 \cap \overline{P_1}) \cup (Q_2 \cap \overline{P}_2) = = (Q_1 \setminus P_1) \cup (Q_2 \setminus P_2);$$

поэтому

$$\mu\big((Q_1 \cup Q_2) \setminus (P_1 \cup P_2)\big),\ \mu\big((Q_1 \cap Q_2) \setminus (P_1 \cap P_2)\big),\ \mu\big((Q_1 \setminus P_2) \setminus (P_1 \setminus Q_2)\big) \overset{\text{т. } 1, 4)}{\leqslant}$$
$$\overset{\text{т. } 1, 4)}{\leqslant} \mu\big((Q_1 \setminus P_1) \cup (Q_2 \setminus P_2)\big) \overset{\text{т. } 1, 5)}{\leqslant} \mu(Q_1 \setminus P_1) + \mu(Q_2 \setminus P_2) < \varepsilon,$$

отсюда получаем $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F \in J(\mathbb{R}^n)$ по теореме 2. В силу вложений

$$P_1 + \mathbf{x} \subset E + \mathbf{x} \subset Q_1 + \mathbf{x}$$

и неравенства

$$\mu(Q_1 + \mathbf{x}) - \mu(P_1 + \mathbf{x}) \overset{\text{т. } 1, 3)}{=} \mu(Q_1) - \mu(P_1) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

получаем $E + \mathbf{x} \in J(\mathbb{R}^n)$ по теореме 2. ◀

Теорема 1′ (о свойствах меры Жордана). *Теорема 1 остаётся в силе при замене $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ на $J(\mathbb{R}^n)$.*

Действительно, свойство 1) неотрицательности вытекает из определения 4. Для проверки свойства 2) аддитивности используем существование для любого $\varepsilon > 0$ множеств $P_1, P_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ таких, что $P_1 \subset E$, $P_2 \subset F$ и

$$\mu(E) - \mu(P_1) < \frac{\varepsilon}{2},\ \mu(F) - \mu(P_2) < \frac{\varepsilon}{2},$$

а также множеств $Q_1, Q_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ таких, что $E \subset Q_1$, $F \subset Q_2$ и

$$\mu(Q_1) - \mu(E) < \frac{\varepsilon}{2},\ \mu(Q_2) - \mu(F) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\mu(E) + \mu(F) - \varepsilon \overset{\text{Т. }1,2)}{<} \mu(P_1 \sqcup P_2),$$
$$\mu(Q_1) + \mu(Q_2) < \mu(E) + \mu(F) + \varepsilon.$$

Так как $P_1 \sqcup P_2 \subset E \sqcup F \subset Q_1 \cup Q_2$, используя лемму 1′, получаем

$$\mu(E) + \mu(F) - \varepsilon < \mu(P_1 \sqcup P_2) \overset{\text{О. }4}{\leqslant} \mu(E \sqcup F) \overset{\text{О. }4}{\leqslant} \mu(Q_1 \cup Q_2) \overset{\text{Т. }1,\,5)}{\leqslant}$$
$$\overset{\text{Т. }1,\,5)}{\leqslant} \mu(Q_1) + \mu(Q_2) < \mu(E) + \mu(F) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем $\mu(E \sqcup F) = \mu(E) + \mu(F)$, то есть выполнение свойства 2) аддитивности. Свойство 3) инвариантности относительно сдвигов вытекает из аналогичного свойства теоремы 1 и из определения 4. Свойства 4) монотонности и 5) полуаддитивности устанавливаются с помощью свойств 1)–3) точно так же, как и при доказательстве теоремы 1. ◀

Утверждение 1′ (о единственности жордановой меры). *Утверждение 1 остаётся в силе при замене $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ на $J(\mathbb{R}^n)$.*

Действительно, как и при доказательстве теоремы 1′, для функции $\mu' : J(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ получим выполнение свойств 4) монотонности и 5) полуаддитивности. В силу вложения $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \overset{\text{З. }3}{\subset} J(\mathbb{R}^n)$ найдётся $c \geqslant 0$ такое, что

$$\mu'(E) \overset{\text{Утв. }1}{=} c\mu(E) \tag{3}$$

для всех $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим произвольное множество $\Omega \in J(\mathbb{R}^n)$. Если $c = 0$, то в силу существования куба $B \supset \Omega$ получим $0 = \mu'(B) \overset{4)}{\geqslant} \mu'(\Omega) \overset{1)}{\geqslant} 0$, то есть $\mu' \equiv 0$ на $J(\mathbb{R}^n)$ и утверждение доказано. Пусть $c > 0$. Используя определение 4, для любого $\varepsilon > 0$ найдём множества $P, Q \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ такие, что $P \subset \Omega \subset Q$ и

$$\mu(\Omega) - \frac{\varepsilon}{c} < \mu(P),\ \mu(Q) < \mu(\Omega) + \frac{\varepsilon}{c}.$$

В силу (3) имеем

$$c\mu(\Omega) - \varepsilon < c\mu(P) = \mu'(P) \overset{4)}{\leqslant} \mu'(\Omega) \overset{4)}{\leqslant} \mu'(Q) = c\mu(Q) < c\mu(\Omega) + \varepsilon.$$

Из произвольности ε следует, что $\mu'(\Omega) = c\mu(\Omega)$, что и завершает доказательство утверждения. ◀

Утверждение 2$'$. *Утверждение 2 остаётся в силе при замене $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ на $J(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство полностью повторяет доказательство утверждения 2 с использованием леммы $1'$ и теоремы $1'$. ◀

Теорема 2$'$. $\Omega \in J(\mathbb{R}^n) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists P, Q \in J(\mathbb{R}^n) : P \subset \Omega \subset Q$ *и*

$$\mu(Q \setminus P) = \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Вытекает из вложения $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \overset{3.3}{\subset} J(\mathbb{R}^n)$ и теоремы 2.

$\Longleftarrow$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists P, Q \in J(\mathbb{R}^n) : P \subset \Omega \subset Q$, $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon/2$, также по определению 4 $\exists E, F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : E \subset P \subset \Omega, \Omega \subset Q \subset F$ и

$$\begin{cases} \mu(P) - \mu(E) < \dfrac{\varepsilon}{4} \\ \mu(F) - \mu(Q) < \dfrac{\varepsilon}{4} \end{cases} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \mu(F) - \mu(E) < \frac{\varepsilon}{2} + \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon,$$

а значит, $\Omega \in J(\mathbb{R}^n)$ по теореме 2. ◀

Лемма 5. *Для любых множеств $E, F \subset \mathbb{R}^n$ выполнено:*

1) $\partial(E \cup F) \subset \partial(E) \cup \partial(F)$;
2) $\partial(E \cap F) \subset \partial(E) \cup \partial(F)$.

Доказательство.

1): Если $\mathbf{x} \in \partial(E \cup F)$, то точка $\mathbf{x}$ не может быть внутренней ни для E, ни для F. Также $\mathbf{x}$ не может быть внешней точкой множеств E и F одновременно. Это и означает, что точка $\mathbf{x}$ является граничной для одного из множеств E, F.

2): Если $\mathbf{x} \in \partial(E \cap F)$, то точка $\mathbf{x}$ не может быть внешней ни для E, ни для F. Также $\mathbf{x}$ не может быть внутренней точкой множеств E и F одновременно. Это и означает, что точка $\mathbf{x}$ является граничной для одного из множеств E, F. ◀

Лемма 6. *Для любого множества* $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ *имеем* $\mathrm{int}(E), \mathrm{cl}(E), \partial(E) \in J(\mathbb{R}^n)$, *а также* $\mu\big(\mathrm{int}(E)\big) = \mu\big(\mathrm{cl}(E)\big) = \mu(E)$ *и* $\mu\big(\partial(E)\big) = 0$.

Доказательство. Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — произвольные *конечные промежутки*. Для любого *бруса* $B = I_1 \times \ldots \times I_n$ по определению проверяется, что $\mathrm{int}(B) = \mathrm{int}(I_1) \times \ldots \times \mathrm{int}(I_n)$ и $\mathrm{cl}(B) = \mathrm{cl}(I_1) \times \ldots \times \mathrm{cl}(I_n)$ — *брусы* (последнее равенство легче всего установить при помощи леммы 0.5 и леммы 9.1.1 о покомпонентной сходимости). В силу того, что для любого промежутка I выполнены равенства $|\mathrm{int}(I)| = |\mathrm{cl}(I)| = |I|$, получим $|\mathrm{int}(B)| = |\mathrm{cl}(B)| = |B|$. Так как

$$\partial(B) \overset{\text{З. } 0.3}{=} \mathrm{cl}(B) \setminus \mathrm{int}(B) \overset{\text{Л. } 1}{\in} \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),$$

получим

$$|B| = |\mathrm{cl}(B)| \overset{\text{З. } 1}{=} \mu\big(\mathrm{cl}(B)\big) \overset{\text{З. } 0.3}{=} \mu\big(\partial(B) \sqcup \mathrm{int}(B)\big) \overset{\text{св-во } 2)}{=}$$
$$\overset{\text{св-во } 2)}{=} \mu\big(\partial(B)\big) + \mu\big(\mathrm{int}(B)\big) \overset{\text{З. } 1}{=} \mu\big(\partial(B)\big) + |B|,$$

а значит, $\mu\big(\partial(B)\big) = 0$.

Для любого $E \coloneqq \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ в силу леммы 5 имеем $\partial(E) \subset \partial(B_1) \cup \ldots \ldots \cup \partial(B_m)$, отсюда $\mu\big(\partial(E)\big) = 0$. Тогда $\mathrm{cl}(E) \overset{\text{З. } 0.3}{=} E \cup \partial(E) \overset{\text{Л. } 1'}{\in} J(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{int}(E) \overset{\text{З. } 0.3}{=} \mathrm{cl}(E) \setminus \partial(E) \overset{\text{Л. } 1'}{\in} J(\mathbb{R}^n)$. Из вложения $E \subset \mathrm{cl}(E)$ получаем, что $E \setminus \mathrm{int}(E) \subset \mathrm{cl}(E) \setminus \mathrm{int}(E) \overset{\text{З. } 0.3}{=} \partial(E)$, отсюда $\mu\big(E \setminus \mathrm{int}(E)\big) = 0$ в силу равенства $\mu\big(\partial(E)\big) = 0$. Тогда

$$\mu(E) = \mu\Big(\big(E \setminus \mathrm{int}(E)\big) \sqcup \mathrm{int}(E)\Big) \overset{\text{св-во } 2)}{=} 0 + \mu\big(\mathrm{int}(E)\big) = \mu\big(\mathrm{int}(E)\big).$$

Отсюда следует равенство

$$\mu\big(\mathrm{cl}(E)\big) \overset{\text{З. } 0.3}{=} \mu\big(\mathrm{int}(E) \sqcup \partial(E)\big) \overset{\text{св-во } 2)}{=} \mu\big(\mathrm{int}(E)\big) + 0 = \mu(E),$$

завершающее доказательство леммы. ◀

Теорема 3. *Пусть множество* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ограничено. Тогда*

$$\Omega \in J(\mathbb{R}^n) \iff \mu\big(\partial(\Omega)\big) = 0.$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: По теореме 2 $\forall \varepsilon > 0\ \exists P, Q \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : P \subset \Omega \subset Q$, $\mu(Q \setminus P) = \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$. Тогда $\mathrm{int}(P), \mathrm{cl}(Q) \overset{\text{Л. } 6}{\in} J(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{int}(P) \subset P \subset \Omega \subset Q \subset \mathrm{cl}(Q)$. По определению проверяется, что $\partial(\Omega) \subset \mathrm{cl}(Q) \setminus \mathrm{int}(P) \overset{\text{Л. } 1'}{\in} J(\mathbb{R}^n)$.

В силу равенства $\mathrm{cl}(Q) = \mathrm{int}(P) \sqcup \big(\mathrm{cl}(Q) \setminus \mathrm{int}(P)\big)$ и свойства аддитивности получим

$$\mu\big(\mathrm{cl}(Q) \setminus \mathrm{int}(P)\big) = \mu\big(\mathrm{cl}(Q)\big) - \mu\big(\mathrm{int}(P)\big) \overset{\text{Л. 6}}{=} \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon,$$

отсюда вытекает равенство $\mu\big(\partial(\Omega)\big) = 0$.

$\Longleftarrow$: $\mu\big(\partial(\Omega)\big) = 0 \overset{\text{З. 2}}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) : \partial(\Omega) \subset E,\ \mu(E) < \varepsilon$. В силу ограниченности множеств Ω и E всегда найдётся такой куб B, что $\Omega \cup E \subset$ $\subset B$. Тогда $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \overset{\text{Л. 1}}{\ni} B \setminus E \overset{\text{Л. 2}}{=} \bigsqcup\limits_{i=1}^{m} B_i$.

Покажем, что при некотором $k \in \overline{0, m}$ и некоторой *перестановке* σ имеет место равенство

$$B \setminus E = \underbrace{\left(\bigsqcup_{i=1}^{k} B_{\sigma(i)}\right)}_{P} \sqcup \underbrace{\left(\bigsqcup_{i=k+1}^{m} B_{\sigma(i)}\right)}_{Q} = P \sqcup Q,$$

где $B_{\sigma(i)} \subset \Omega$ при $i \leqslant k$ и $B_{\sigma(i)} \cap \Omega = \varnothing$ при $i \geqslant k+1$ (см. рис. 29). Пусть это неверно, тогда для некоторого номера $l \in \overline{1, m}$ существуют точки M_1, M_2 такие, что $M_1 \in B_l \cap \Omega$ и $M_2 \in B_l \setminus \Omega$. Так как любой брус — *выпуклое множество* (см. определение 0.12), то $I_1 := [M_1, M_2] \subset B_l$, при этом $M_1 \in \Omega$, $M_2 \notin \Omega$ (см. рис. 30). Используем *дихотомию*: поделим отрезок I_1 точкой M пополам

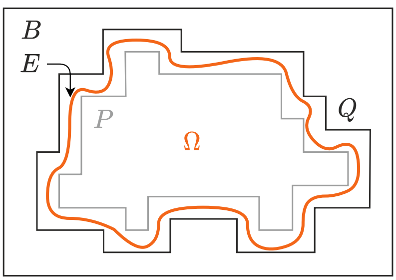


Рис. 29

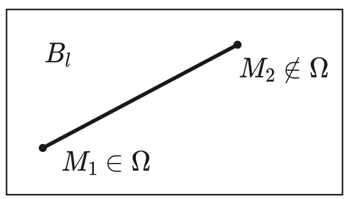


Рис. 30

и возьмём в качестве I_2 отрезок $[M_1, M]$ в случае $M \notin \Omega$ и отрезок $[M, M_2]$ в случае $M \in \Omega$. Повторяя описанную процедуру для отрезков $I_2, I_3, \ldots$ до бесконечности, получим последовательность

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$$

вложенных отрезков с общей внутренней точкой $\xi \in B_l$. При этом в любой окрестности точки ξ по построению найдутся как точки, принадлежащие Ω, так и точки, не принадлежащие Ω. По определению 8 граничной точки это означает, что $\xi \in \partial(\Omega)$. Но $B_l \subset B \setminus E \subset B \setminus \partial(\Omega)$, получаем противоречие.

Таким образом, $P \subset \Omega$, $Q \cap \Omega = \varnothing$ и $\Omega \subset P \sqcup Q \sqcup E = B$, отсюда получаем $P \subset \Omega \subset P \sqcup E$ и $\mu\big((P \sqcup E) \setminus P\big) = \mu(E) < \varepsilon$, а значит, $\Omega \in J(\mathbb{R}^n)$ по теореме 2. ◀

Теорема 4 (о площади следа спрямляемой плоской кривой). *Площадь следа любой спрямляемой параметризованной плоской кривой*

$$\gamma(t) := \big(\varphi(t), \psi(t)\big) : [a, b] =: I \to \mathbb{R}^2$$

равна нулю, то есть

$$\mu_2\big(\gamma(I)\big) = 0.$$

Доказательство. Множество $\gamma(I)$ является ограниченным, так как иначе существовала бы ломаная, вписанная в кривую γ, сколь угодно большой длины, что означало бы *неспрямляемость* γ. Таким образом, найдётся квадрат $B := [-M, M) \times (-M, M]$ такой, что $\gamma(I) \subset B$ и $M > 0$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ с помощью равномерной сетки с шагом M/n разобьём квадрат B на *непересекающиеся* квадраты четырёх типов вида, изображённого на рис. 31, по схеме, указанной на рис. 32. Обозначим соответствующие множества квадратов каждого типа через $A_n^1 = \{a\}$, $A_n^2 = \{b\}$, $A_n^3 = \{c\}$, $A_n^4 = \{d\}$, также положим $A_n := A_n^1 \sqcup A_n^2 \sqcup A_n^3 \sqcup A_n^4$, таким образом, $B = \bigsqcup A_n$, при этом $\#A_n^i := \operatorname{card}(A_n^i) = n^2$ при $i \in \overline{1,4}$, а также $\#A_n = 4n^2$.

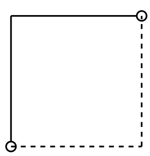


Рис. 31

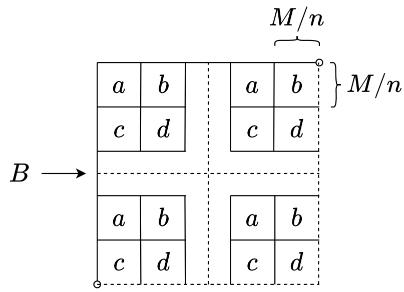


Рис. 32

Для всех $i \in \overline{1,4}$ определим $K_n^i := \#\{q \in A_n^i : \gamma(I) \cap q \neq \varnothing\}$. Пусть $i \in \overline{1,4}$, квадраты $p, q \in A_n^i$, $p \neq q$ и точки $P \in p$, $Q \in q$, тогда $|PQ| \geqslant M/n$. Таким образом, если $K_n^i \geqslant n\sqrt{n}$, то найдётся ломаная l, *вписанная в кривую* γ и такая, что

$$|\gamma| \geqslant |l| \geqslant n\sqrt{n}\frac{M}{n} = M\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

В силу *спрямляемости* кривой γ это означает, что найдётся $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $K_n^i < n\sqrt{n}$ для всех $i \in \overline{1,4}$ и всех $n \geqslant N_0$. Обозначим $\Omega_n := \{q \in A_n :$

$\gamma(I) \cap q \neq \varnothing\}$, $K_n := \#\Omega_n$; тогда $K_n = \sum\limits_{i=1}^{4} K_n^i < 4n\sqrt{n}$ при всех $n \geqslant N_0$ и $\gamma(I) \subset E_n := \bigsqcup \Omega_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$. Но

$$\mu(E_n) = K_n \frac{M^2}{n^2} \overset{n \geqslant N_0}{<} \frac{4M^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

отсюда окончательно получим $\mu\big(\gamma(I)\big) = 0$ в силу замечания 2. ◄

§ 8.3. Связь меры Жордана с интегралом Римана

Теорема 1 (о представлении меры Жордана интегралом Римана от характеристических функций). *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}$*,* χ_{Ω} *— характеристическая функция множества* Ω (см. определение 0.7.7). *Тогда* $\Omega \in J(\mathbb{R}) \iff$ $\iff$ *найдутся числа* $a \leqslant b$ *такие, что* $\Omega \subset [a, b]$ *и* $\chi_{\Omega} \in R[a, b]$*. В случае выполнения одного из этих равносильных условий имеет место равенство*

$$\mu(\Omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{\Omega}(x)dx. \tag{1}$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Так как измеримое множество по определению ограничено, то найдутся числа $a \leqslant b$ такие, что $\Omega \subset [a, b]$. По теореме 2.2 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $E, F' \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ такие, что $E \subset \Omega \subset F'$ и $\mu(F') - \mu(E) < \varepsilon/4$. По лемме 2.1 также имеем $E \subset \Omega \subset F' \cap [a, b] =: F \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, отсюда в силу монотонности меры (см. теорему 2.1′) получаем

$$\begin{aligned} \mu(F) - \mu(\Omega) &< \frac{\varepsilon}{4}, \\ \mu(\Omega) - \mu(E) &< \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим представления

$$E = \bigsqcup_{j=1}^{k} I_j, \quad F = \bigsqcup_{l=1}^{m} J_l,$$

где I_j, J_l — *конечные промежутки* (см. лемму 2.2). Тогда $\chi_E = \sum\limits_{j=1}^{k} \chi_{I_j}$ и

$$\int\limits_a^b \chi_E(x)dx = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_a^b \chi_{I_j}(x)dx = \sum_{j=1}^{k} |I_j| = \mu(E). \tag{3}$$

Совершенно аналогично установим равенство

$$\int_a^b \chi_F(x)dx = \mu(F). \tag{4}$$

По критерию интегрируемости (см. условие 4 теоремы 6.1.3 [Критерии интегрируемости]) в силу теоремы 6.1.2 [Основная лемма Дарбу] получим существование такого разбиения P отрезка $[a, b]$, что одновременно выполнены неравенства

$$\int_a^b \chi_E(x)dx - s_*(\chi_E, P) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad S^*(\chi_F, P) - \int_a^b \chi_F(x)dx < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5}$$

Так как $\chi_E(x) \leqslant \chi_\Omega(x) \leqslant \chi_F(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$s_*(\chi_\Omega, P) \geqslant s_*(\chi_E, P) \overset{(5)}{>} \int_a^b \chi_E(x)dx - \frac{\varepsilon}{4} \overset{(3)}{=} \mu(E) - \frac{\varepsilon}{4} \overset{(2)}{>} \mu(\Omega) - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S^*(\chi_\Omega, P) \leqslant S^*(\chi_F, P) \overset{(5)}{<} \int_a^b \chi_F(x)dx + \frac{\varepsilon}{4} \overset{(4)}{=} \mu(F) + \frac{\varepsilon}{4} \overset{(2)}{<} \mu(\Omega) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, $\chi_\Omega \in R[a, b]$ по теореме 6.1.3 [Критерии интегрируемости], а также выполнены неравенства

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b \chi_\Omega(x)dx - \mu(\Omega) < \frac{\varepsilon}{2},$$

отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает равенство

$$\mu(\Omega) = \int_a^b \chi_\Omega(x)dx,$$

а значит, и равенство (1) в силу того, что $\chi_\Omega(x) \equiv 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ (см. пример 6.2.3).

$\Longleftarrow$: По критерию интегрируемости (см. условие 4 теоремы 6.1.3 [Критерии интегрируемости]) в силу теоремы 6.1.2 [Основная лемма Дарбу] для любого $\varepsilon > 0$ найдётся P — разбиение отрезка $[a, b]$ такое, что

$$\int_a^b \chi_\Omega(x)dx - s_*(\chi_\Omega, P) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S^*(\chi_\Omega, P) - \int_a^b \chi_\Omega(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Определим множества $A \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ как объединения всех отрезков Δ_i разбиения P таких, что $\Delta_i \subset \Omega$ и $\Delta_i \cap \Omega \neq \varnothing$ соответственно. Тогда $A \subset \Omega \subset B$ и $\mu(A) = s_*(\chi_\Omega, P)$, $\mu(B) = S^*(\chi_\Omega, P)$, отсюда в силу неравенств (6) получаем $\Omega \in J(\mathbb{R})$ по теореме 2.2. В силу монотонности меры Жордана также имеем

$$\int_a^b \chi_\Omega(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} \overset{(6)}{<} s_*(\chi_\Omega, P) = \mu(A) \leqslant \mu(\Omega) \leqslant \mu(B) = S^*(\chi_\Omega, P) \overset{(6)}{<} \int_a^b \chi_\Omega(x)dx + \frac{\varepsilon}{2},$$

отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает равенство

$$\mu(\Omega) = \int_a^b \chi_\Omega(x)dx,$$

а значит, и равенство (1). ◀

Замечание 1. Теорема 1 о представлении меры Жордана интегралом Римана от характеристических функций остаётся в силе для всех размерностей с заменой $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^n$, отрезка $[a, b]$ на брус $B \subset \mathbb{R}^n$ и с использованием n-мерного интеграла Римана.

Теорема 2 (о площади криволинейной трапеции). *Пусть* $R[a, b] \ni f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$, $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ — ***криволинейная трапеция****. Тогда* $D \in J(\mathbb{R}^2)$ *и*

$$\mu_2(D) = \int_a^b f(x)dx. \tag{7}$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим разбиение P_0 отрезка $[a, b]$ такое, что $S^*(f, P_0) - s_*(f, P_0) < \varepsilon$, существующее по теореме 6.1.3 [Критерии интегрируемости]. Таким образом, имеем $s_*(f, P_0) = \mu(Q_1)$, $S^*(f, P_0) = \mu(Q_2)$, где $Q_1 \subset D \subset Q_2$, причём $Q_1, Q_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ (см. рис. 33). По теореме 2.2 имеем $D \in J(\mathbb{R}^2)$, причём

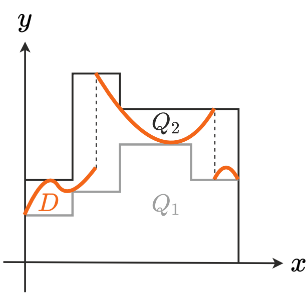


Рис. 33

$$s_*(f, P) \leqslant \mu(D) \leqslant S^*(f, P)$$

для любого разбиения P отрезка $[a, b]$ в силу монотонности меры Жордана. Так как

$$\lim_{d(P)\to 0} s_*(f, P) = \lim_{d(P)\to 0} S^*(f, P) = \int_a^b f(x)dx$$

по теореме 6.1.2 [Основная лемма Дарбу], получим равенство (7) по принципу двустороннего ограничения. ◀

Замечание 2. Из того, что $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b]$ и из измеримости криволинейной трапеции D, используя теорему 1 о представлении меры Жордана интегралом Римана от характеристических функций при $\Omega := D$ (см. замечание 1) и теорему Фубини, примененную к $\iint\limits_D dxdy$, получим $f \in R[a, b]$. Таким образом, в силу теоремы 2 имеем $D \in J(\mathbb{R}^2) \iff f \in R[a, b]$. Данный факт вместе с теоремой 1 о представлении меры Жордана интегралом Римана от характеристических функций устанавливают тесную связь между мерой Жордана и интегралом Римана. Отметим также, что концепция меры Жордана в дальнейшем была обобщена А.Лебегом (мера Лебега). О мере Лебега и о её связи с интегралом Лебега см., например, в [52].

Определение 1 (изометрии). Функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется ***изометрическим отображением*** (или просто ***изометрией***), если $\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$. Множество $\varphi(\Omega)$ при этом называют *изометрическим образом* множества Ω. Также говорят, что множества Ω и $\varphi(\Omega)$ ***конгруэнтны***.

Замечание 3. Важными фактами являются следующие: все *изометрии* в $\mathbb{R}^n$ суть *движения*, и жорданова мера μ_n^J *инвариантна относительно изометрий* (см. теоремы 10.3.2 и 10.3.3).

Теорема 3 (о площади сектора). *Пусть* $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, $R > 0$, $B := := [0, R] \times [\alpha, \beta]$, $T(r, \varphi) := \big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — *полярное преобразование,* $B' := T(B)$ — ***сектор***. *Тогда* $B' \in J(\mathbb{R}^2)$ *и*

$$\mu_2(B') = \frac{\beta - \alpha}{2} R^2. \tag{8}$$

Доказательство. Рассматривая произвольный $z \in \mathbb{R}^2$ как *комплексное число*, для любого $\theta \in \mathbb{R}$ определим *оператор* $\mathcal{A}_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *вращения* на угол θ вокруг точки $(0, 0)$ равенством $\mathcal{A}_\theta(z) := e^{i\theta} z$ (см. определение 5.2.6 комплексной экспоненты) для всех $z \in \mathbb{R}^2$. Для любого $\theta \in \mathbb{R}$ оператор $\mathcal{A}_\theta$ является *изометрией*, так как для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ выполнено

$$\|\mathcal{A}_\theta(z_1 - z_2)\| = |\mathcal{A}_\theta(z_1 - z_2)| =$$
$$= |e^{i\theta}(z_1 - z_2)| = |e^{i\theta}||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2| = \|z_1 - z_2\|.$$

Для любого $\theta \in \mathbb{R}$ обозначим $B_{-\theta} := \{(r, \varphi - \theta) : (r, \varphi) \in B\}$. Так как $(r, \varphi) \in \in B \iff (r, \varphi - \theta) \in B_{-\theta}$, $T(r, \varphi) = re^{i\varphi}$ и $\mathcal{A}_\theta\big(T(r, \varphi)\big) = re^{i(\varphi + \theta)}$, то

$$\mathcal{A}_\theta\big(T(B_{-\theta})\big) = T(B) =: B'. \tag{9}$$

Пусть $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant \pi$. Положим

$$\gamma := \frac{\beta-\alpha}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \theta := \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{2}, \ \widetilde{B} := B_{-\theta} = [0, R] \times \left[\frac{\pi}{2} - \gamma, \frac{\pi}{2} + \gamma\right].$$

Из свойств тригонометрических функций, формулы (7) площади криволинейной трапеции, теоремы 2.3 и аддитивности меры Жордана вытекает (см. рис. 34), что $T(\widetilde{B}) \in J(\mathbb{R}^2)$ и

$$\mu\big(T(\widetilde{B})\big) = \int\limits_{-R\sin\gamma}^{R\sin\gamma} \sqrt{R^2 - x^2}dx - 2\left(\frac{R^2}{2}\sin\gamma\cos\gamma\right) \overset{\text{Т. } 6.1.12}{=}$$

$$\overset{x = R\sin t}{=} R^2 \int\limits_{-\gamma}^{\gamma} \cos^2 t dt - \frac{R^2}{2}\sin 2\gamma = \frac{R^2}{2}\int\limits_{-\gamma}^{\gamma}(1+\cos 2t)dt - \frac{R^2}{2}\sin 2\gamma =$$

$$= \frac{R^2}{2}(2\gamma + \sin 2\gamma) - \frac{R^2}{2}\sin 2\gamma = \frac{\beta-\alpha}{2}R^2. \tag{10}$$

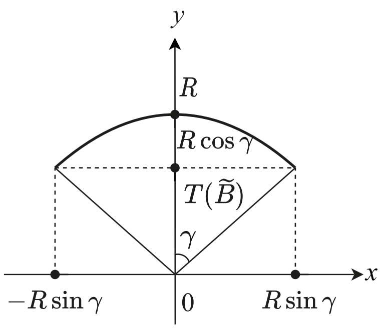


Рис. 34

В силу равенства $\mathcal{A}_\theta\big(T(\widetilde{B})\big) \overset{(9)}{=} B'$ и замечания 3 получаем утверждение теоремы в случае $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant \pi$.

В случае $\pi < \beta - \alpha \leqslant 2\pi$ положим

$$B_1 := [0, R] \times [\alpha, \alpha + \pi],$$
$$B_2 := [0, R] \times [\alpha + \pi, \beta],$$
$$B_1' := T(B_1), \ B_2' := T(B_2).$$

Тогда $B = B_1 \cup B_2$, поэтому $B' = B_1' \cup B_2'$. В силу рассмотренного выше случая имеем $B_1', B_2' \in J(\mathbb{R}^2)$ и

$$\mu(B_1') \overset{(10)}{=} \frac{\pi}{2}R^2, \ \mu(B_2') \overset{(10)}{=} \frac{\beta-\alpha-\pi}{2}R^2. \tag{11}$$

Так как $\mu\big(\partial(B_1')\big) = 0$ по теореме 2.3 и $B_1' \cap B_2' \subset \partial(B_1')$, то $\mu(B_1' \cap B_2') = 0$. По утверждению 2.2$'$ имеем

$$\mu(B') = \mu(B_1' \cup B_2') = \mu(B_1') + \mu(B_2') - \mu(B_1' \cap B_2') \overset{(11)}{=}$$
$$\overset{(11)}{=} \frac{\pi}{2}R^2 + \frac{\beta-\alpha-\pi}{2}R^2 - 0 = \frac{\beta-\alpha}{2}R^2,$$

что и завершает доказательство теоремы. ◄

Теорема 4 (о площади криволинейного сектора). *Пусть* $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, $R[\alpha, \beta] \ni r\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^+$, $D := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in [\alpha, \beta],\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)\}$, $T(r, \varphi) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — *полярное преобразование,* $D' := T(D)$ — ***криволинейный сектор***. *Тогда* $D' \in J(\mathbb{R}^2)$ *и*

$$\mu_2(D') = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \tag{12}$$

Доказательство. В силу того, что $\dfrac{1}{2}r^2(\varphi) \in R[\alpha, \beta]$ как произведение интегрируемых функций (см. свойство 2 интеграла Римана), по теореме 6.1.3 [Критерии интегрируемости] для любого $\varepsilon > 0$ *существует разбиение* P_0 отрезка $[\alpha, \beta]$ такое, что

$$S^*\left(\frac{1}{2}r^2(\varphi), P_0\right) - s_*\left(\frac{1}{2}r^2(\varphi), P_0\right) < \varepsilon.$$

Из формулы (8) площади сектора, леммы 2.1′ и того факта, что площадь границы сектора равна нулю (см. теорему 2.3), вытекает, что

$$s_*\left(\frac{1}{2}r^2(\varphi), P_0\right) = \mu(Q_1),$$
$$S^*\left(\frac{1}{2}r^2(\varphi), P_0\right) = \mu(Q_2),$$

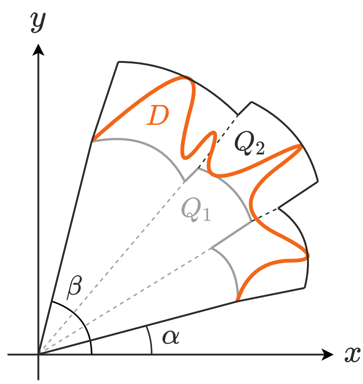


Рис. 35

где $Q_1 \subset D' \subset Q_2$ и $Q_1, Q_2 \in J(\mathbb{R}^2)$ (см. рис. 35). По теореме 2.2′ имеем $D' \in J(\mathbb{R}^2)$, причём

$$s_*\left(\frac{1}{2}r^2(\varphi), P\right) \leqslant \mu(D') \leqslant S^*\left(\frac{1}{2}r^2(\varphi), P\right)$$

для любого разбиения P отрезка $[\alpha, \beta]$ в силу монотонности меры Жордана. Так как

$$\lim_{d(P)\to 0} s_*\left(\frac{1}{2}r^2(\varphi), P\right) = \lim_{d(P)\to 0} S^*\left(\frac{1}{2}r^2(\varphi), P\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$$

по теореме 6.1.2 [Основная лемма Дарбу], получим равенство (12) по принципу двустороннего ограничения. ◀

Определение 2 (цилиндра). Цилиндрическим телом (***цилиндром***) в $\mathbb{R}^n$ называют множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *конгруэнтное* множеству $D_a := D \times [0, a]$, где $a \geqslant 0$, $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (то есть $\Omega = \varphi(D_a)$, где $\varphi\colon D_a \to \mathbb{R}^n$ — *изометрия*). Множество D_a будем называть ***нормальным цилиндром***.

Теорема 5 (об объёме цилиндра). *Пусть $\mathbb{R}^n \supset \Omega$ — цилиндр, то есть $\Omega = \varphi(D_a)$, где $D_a = D \times [0, a]$, $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и $\varphi\colon D_a \to \mathbb{R}^n$ — изометрия. Пусть $D \in J(\mathbb{R}^{n-1})$. Тогда $\Omega \in J(\mathbb{R}^n)$ и*

$$\mu_n(\Omega) = a\mu_{n-1}(D). \tag{13}$$

Доказательство. В силу замечания 3 теорему достаточно доказать лишь для *нормальных цилиндров* $\Omega = D_a$. Так как $D \in J(\mathbb{R}^{n-1})$, при всех $k \in \mathbb{N}$ по теореме 2.2 найдутся *элементарные* множества $E_k, F_k \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1})$ такие, что $E_k \subset D \subset F_k$ и

$$\mu_{n-1}(F_k) - \mu_{n-1}(E_k) < \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Тогда для $P_k := E_k \times [0, a] \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), Q_k := F_k \times [0, a] \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ имеем $P_k \subset D_a \subset Q_k$. По определению 2.2 объёма элементарных множеств тривиально проверяется, что $\mu_n(P_k) = a\mu_{n-1}(E_k)$ и $\mu_n(Q_k) = a\mu_{n-1}(F_k)$, отсюда получим

$$\mu_n(Q_k) - \mu_n(P_k) = a\big(\mu_{n-1}(F_k) - \mu_{n-1}(E_k)\big) \leqslant \frac{a}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

По теореме 2.2 имеем $D_a \in J(\mathbb{R}^n)$, причём

$$a\mu_{n-1}(E_k) = \mu_n(P_k) \leqslant \mu_n(D_a) \leqslant \mu_n(Q_k) = a\mu_{n-1}(F_k)$$

в силу монотонности меры Жордана. Используя то, что $\mu_{n-1}(E_k), \mu_{n-1}(F_k) \overset{k\to\infty}{\to}$ $\overset{k\to\infty}{\to}$ $\mu_{n-1}(D)$ в силу монотонности меры Жордана, получим равенство (13) по принципу 2.1.2 двустороннего ограничения. ◀

Теорема 6 (об объёме тела вращения). *Пусть $R[a, b] \ni f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$, $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b],\ y^2 + z^2 \leqslant f^2(x)\}$. Тогда $\Omega \in J(\mathbb{R}^3)$ и*

$$\mu_3(\Omega) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx. \tag{14}$$

Доказательство. В силу того, что $\pi f^2(x) \in R[a, b]$ как произведение интегрируемых функций (см. свойство 2 интеграла Римана), по теореме 6.1.3 [Критерии интегрируемости] для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение P_0 отрезка $[a, b]$ такое, что

$$S^*(\pi f^2(x), P_0) - s_*(\pi f^2(x), P_0) < \varepsilon.$$

Таким образом, имеются фигуры E, F, составленные из цилиндров и такие, что $E \subset \Omega \subset F$, $E, F \in J(\mathbb{R}^n)$ и $\mu(E) = s_*(\pi f^2(x), P_0)$, $\mu(F) = S^*(\pi f^2(x), P_0)$ в силу теорем 3 о площади сектора, 5 об объёме цилиндра, леммы 2.1′ и того факта, что объём границы цилиндра равен нулю (см. теорему 2.3). По теореме 2.2′ имеем $\Omega \in J(\mathbb{R}^3)$, причём

$$s_*(\pi f^2(x), P) \leqslant \mu(\Omega) \leqslant S^*(\pi f^2(x), P)$$

для любого разбиения P отрезка $[a, b]$ в силу монотонности меры Жордана. Так как

$$\lim_{d(P)\to 0} S^*(\pi f^2(x), P) = \lim_{d(P)\to 0} s_*(\pi f^2(x), P) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

по теореме 6.1.2 [Основная лемма Дарбу], получим равенство (14) по принципу двустороннего ограничения. ◀

Глава 9

Функции многих переменных

§ 9.1. Предел и непрерывность

9.1.1. Предел последовательности

Всюду далее мы будем предполагать, что $n \in \mathbb{N}, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :=$ $:= \mathbb{R}^{n \times 1}$, то есть под вектором $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ мы будем понимать *вектор-столбец*, а $\mathbb{R}^n$ будем рассматривать как *нормированное пространство* с *евклидовой нормой*: $\|\mathbf{x}\| := \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Соответствующее пространство *векторов-строк* будем обозначать явно $\mathbb{R}^{1 \times n}$, также для любого $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ по определению положим $\|\mathbf{y}\| := \|\mathbf{y}^T\|$, где $\mathbf{y}^T$ обозначает *транспонированный* $\mathbf{y}$.

Замечание 1. В случаях, когда нам придётся иметь дело с последовательностями векторов $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, мы будем пользоваться верхними индексами для обозначения компонент векторов $\mathbf{x}_k$ вместо нижних, то есть $\mathbf{x}_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$.

Лемма 1 (о покомпонентной сходимости). $\mathbf{x}_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n) \overset{\|\cdot\|}{\to} \mathbf{x}_0 =$ $= (x_0^1, \ldots, x_0^n) \iff x_k^1 \to x_0^1, \ldots, x_k^n \to x_0^n$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Так как $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|$ по лемме 8.0.8, то из определения 8.0.19 сходимости по норме вытекает, что

$$\mathbf{x}_k \overset{\|\cdot\|}{\to} \mathbf{x}_0 \iff \mathbf{x}_k \overset{\|\cdot\|_\infty}{\to} \mathbf{x}_0.$$

В то же время

$$\mathbf{x}_k \overset{\|\cdot\|_\infty}{\to} \mathbf{x}_0 \iff \max\{|x_k^1 - x_0^1|, \ldots, |x_k^n - x_0^n|\} \to 0 \iff x_k^i \to x_0^i$$

при всех $i \in \overline{1, n}$, что и завершает доказательство леммы. ◀

Лемма 2 (о покомпонентной фундаментальности). *Последовательность* $\mathbf{x}_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n) \in \mathbb{R}^n$ *фундаментальна* $\iff$ *последовательности* $x_k^1, \ldots, x_k^n$ *фундаментальны.*

Доказательство. Так как $\|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|$ по лемме 8.0.8, то существуют $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$c_1\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| \leqslant \max\{|x_p^1 - x_q^1|, \dots, |x_p^n - x_q^n|\} \leqslant c_2\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\|.$$

Фиксируем любое $\varepsilon > 0$.

$\Longrightarrow$: $\forall p, q \geqslant N\ \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| < \varepsilon/c_2 \implies \forall i \in \overline{1,n}, \forall p, q \geqslant N\ |x_p^i - x_q^i| < \varepsilon.$

$\Longleftarrow$: $\forall p, q \geqslant N\ |x_p^1 - x_q^1| < c_1\varepsilon, \dots, |x_p^n - x_q^n| < c_1\varepsilon \implies \forall p, q \geqslant N$ $\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| < \varepsilon.$ ◀

Теорема 1 [Критерий Коши существования предела последовательности]. *Для любой последовательности $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ имеем*

$$\exists \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n \iff \mathbf{x}_k \textit{ фундаментальна.}$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Пусть $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, тогда для всех $i \in \overline{1,n}$ по лемме 1 о покомпонентной сходимости имеем $x_k^i \to x_0^i$, таким образом, числовые последовательности x_k^i фундаментальны по теореме 2.7.1 [Критерий Коши существования предела числовой последовательности], а значит и последовательность $\mathbf{x}_k$ фундаментальна по лемме 2 о покомпонентной фундаментальности.

$\Longleftarrow$: Пусть $\mathbf{x}_k$ фундаментальна. По лемме 2 о покомпонентной фундаментальности при всех $i \in \overline{1,n}$ числовые последовательности x_k^i фундаментальны, а значит, являются сходящимися к некоторым числам x_0^i по теореме 2.7.1 [Критерий Коши существования предела числовой последовательности]. Полагая $\mathbf{x}_0 := (x_0^1, \dots, x_0^n)$ и используя лемму 1 о покомпонентной сходимости, получим утверждение теоремы. ◀

Замечание 2. Теорему 1 [Критерий Коши существования предела последовательности] можно переформулировать так: ***пространство*** $\mathbb{R}^n$ ***полно*** (см. определение 8.0.21).

Теорема 2 (Больцано–Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|\mathbf{x}_k\|_\infty = \max\{|x_k^1|, \dots, |x_k^n|\} \overset{\text{Л. } 8.0.8}{\leqslant} c\|\mathbf{x}_k\| \overset{\text{О. } 8.0.18}{\leqslant} cM,$$

то есть числовые последовательности x_k^i *ограничены* при всех $i \in \overline{1,n}$. По теореме 2.6.2 Больцано–Вейерштрасса для числовой последовательности x_k^1

найдётся подпоследовательность $x^1_{k_l}$, сходящаяся к некоторому числу x^1_0 при $l \to \infty$. Так как последовательность x^2_k ограничена, то и её подпоследовательность $x^2_{k_l}$ тоже является ограниченной. Применяя к $x^2_{k_l}$ теорему 2.6.2 Больцано–Вейерштрасса, выделим её подпоследовательность $x^2_{k_{l_m}}$, сходящуюся к некоторому x^2_0 при $m \to \infty$. Повторяя описанную процедуру n раз, получим некоторую подпоследовательность $\mathbf{x}_{q_p} := \mathbf{x}_{k_{l_{m_{\dots_p}}}}$ исходной последовательности. При этом для всех $i \in \overline{1, n}$ имеем $x^i_{q_p} \to x^i_0$ при $p \to \infty$, а следовательно, $\mathbf{x}_{q_p} \xrightarrow{\text{Л. } 1} \mathbf{x}_0 := (x^1_0, \dots, x^n_0)$. ◀

Теорема 3 (о компактах в $\mathbb{R}^n$). *Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ является компактом* (см. определение 8.0.15) $\iff$ *K замкнуто и ограничено.*

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Пусть K — *компакт*. Если множество K не ограничено, то существует последовательность $\mathbf{x}_m \in K$ такая, что $\|\mathbf{x}_m\| > m$, а значит, любая её подпоследовательность не является ограниченной и не может быть сходящейся в силу леммы 8.0.3. По теореме 8.0.1 о секвенциальной компактности это означает, что K не является компактом. Если множество K не замкнуто (см. определение 8.0.11), то существует точка $\mathbf{y} \notin K$, предельная для K. В силу леммы 8.0.5 это означает существование последовательности $K \ni \mathbf{x}_m \to \mathbf{y} \notin K$. Это значит, что любая её подпоследовательность сходится к $\mathbf{y} \notin K$, поэтому K не является компактом в силу теоремы 8.0.1 о секвенциальной компактности.

$\Longleftarrow$: В силу ограниченности множества K любая последовательность $\mathbf{x}_m \in$ $\in K$ является ограниченной, и по теореме 2 Больцано–Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\mathbf{x}_{m_p} \to \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Так как множество K замкнуто, то из леммы 8.0.5 вытекает, что $\mathbf{x}_0 \in K$, а значит, K является компактом по теореме 8.0.1 о секвенциальной компактности. ◀

9.1.2. Предел функции

Всюду далее будем предполагать, что H, N — *нормированные пространства*, $m, n \in \mathbb{N}$ (чаще всего нас будет интересовать случай $H := \mathbb{R}^n$, $N := \mathbb{R}^m$) и что на некотором множестве $\Omega \subset H$ определена функция f, принимающая значения из N. Вместо громоздкой записи $f\colon H \supset \Omega \to N$ будем использовать короткую запись $f\colon H \to N$, а область определения уточнять отдельно, если потребуется. В случаях, когда явно определено некоторое подмножество $M \subset H$, запись $f\colon M \to N$ автоматически означает, что $\mathrm{Dom}(f) = M$.

Замечание 3. Функция $f\colon H \to \mathbb{R}^m$ есть не что иное, как упорядоченный набор $(f_1, \dots, f_m)$ функций, действующих из H в $\mathbb{R}$.

Определение 1 (Коши). Пусть $f\colon H \to N$ и $H \ni \mathbf{a}$ — *предельная точка* (см. определение 8.0.9) для множества $\mathrm{Dom}(f)$. Элемент $\mathbf{b} \in N$ называется ***пределом функции*** f в точке $\mathbf{a}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in \mathrm{Dom}(f)$

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_H < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\|_N < \varepsilon,$$

то есть для любой окрестности $O_\varepsilon(\mathbf{b})$ точки $\mathbf{b}$ найдётся проколотая окрестность $\mathring{O}_\delta(\mathbf{a})$ точки $\mathbf{a}$ такая, что

$$f\big(\mathring{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset O_\varepsilon(\mathbf{b}).$$

При этом употребляются обозначения $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, $f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{b}$, $f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\|\cdot\|_N} \mathbf{b}$ при $\mathbf{x} \xrightarrow{\|\cdot\|_H} \mathbf{a}$ или просто $f(\mathbf{x}) \to \mathbf{b}$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$.

Замечание 4. Из определения 1 Коши непосредственно вытекает, что

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \iff \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \alpha(\mathbf{x}) = 0,$$

где $\alpha(\mathbf{x}) \coloneqq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| : H \to \mathbb{R}^+$.

Утверждение 1 (о единственности предела). *Если* $\lim\limits_{x\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1 \in N$ *и* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2 \in N$, *то* $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$.

Доказательство повторяет доказательство аналогичного утверждения 3.1.1 о единственности предела для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с заменой $|\cdot|$ на $\|\cdot\|_N$. ◀

Определение 1′ (Гейне). Пусть $f\colon H \to N$ и $H \ni \mathbf{a}$ — *предельная точка* (см. определение 8.0.9) для множества $\mathrm{Dom}(f)$. Элемент $\mathbf{b} \in N$ называется ***пределом функции*** f в точке $\mathbf{a}$, если для любой последовательности $\mathbf{x}_k \in$ $\in \mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathbf{a}\}$, сходящейся к $\mathbf{a}$, последовательность $f(\mathbf{x}_k)$ сходится к $\mathbf{b}$.

Теорема 4. *Определения 1 Коши и 1′ Гейне эквивалентны.*

Доказательство дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы 3.1.1 для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ◀

Замечание 5. Используя определение 1′ Гейне и замечание 8.0.7, получаем, что значение предела функции в точке (в случае его существования) ***не изменится при замене норм в пространствах*** H ***и*** N ***на эквивалентные***.

Лемма 3 (о пределах компонент). *Пусть* $f = (f_1, .., f_m)\colon H \to \mathbb{R}^m$, *тогда*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m) \iff \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i \text{ при всех } i \in \overline{1,m}.$$

Доказательство. По лемме 1 о покомпонентной сходимости для любой последовательности $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a}, \mathbf{x}_k \neq \mathbf{a}$ имеем $f(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{b} \iff f_i(\mathbf{x}_k) \to b_i$ при всех $i \in \overline{1,m}$, поэтому утверждение леммы следует из определения $1'$ Гейне для функции f и для функций $f_i \colon H \to \mathbb{R}$. ◀

Замечание 6. Наряду с рассмотренными выше определениями предела 1 Коши и $1'$ Гейне для функции $f \colon H \to N$ нередко используются пределы, этими определениями не охваченные, например:

а) $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} f(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \in N$

или при $H = \mathbb{R}^3$, $N = \mathbb{R}$:

б) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(3+,-\infty,27)} f(x,y,z) = +\infty \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

Приведём соответствующие определения без аккуратной формализации:

а) означает, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\in\mathbb{R} : \forall\mathbf{x}\in\mathrm{Dom}(f)$ имеем $\|\mathbf{x}\|>\delta \implies \|f(\mathbf{x})-\mathbf{b}\| < \varepsilon$ (Коши), что равносильно тому, что для любой последовательности $\mathbf{x}_n \in \mathrm{Dom}(f) : \|\mathbf{x}_n\| \to \infty$ выполнено $f(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{b}$ (Гейне);

б) означает, что $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists\delta_1 > 0, \exists\delta_2 \in \mathbb{R} : \forall(x,y,z) \in \mathrm{Dom}(f)$ из неравенств $3 < x < 3+\delta_1$, $y < \delta_2$, $|z-27| < \delta_1$ следует, что $f(x,y,z) > \varepsilon$ (Коши), что равносильно тому, что для любой последовательности $(x,y,z)_n \in \mathrm{Dom}(f)$ такой, что $x_n \to 3+$, $y_n \to -\infty$, $z_n \to 27$, выполнено $f(x_n,y_n,z_n) \to +\infty$ (Гейне).

При этом множества соответствующих последовательностей из определения Гейне обязаны быть непустыми (иначе говоря, предел функции рассматривается только в *предельных точках* её области определения). Подобные точки, не являющиеся элементами соответствующих нормированных пространств, будем называть ***несобственными***.

Отметим, что определение 1 Коши в терминах окрестностей для приведённых выше примеров снова остаётся эквивалентным определению $1'$ Гейне в терминах последовательностей. Об этом и о том, как правильно интерпретировать вышеописанные пределы в соответствующих *топологических пространствах* (см. определение 10.2.12), см. пример 10.2.5 и замечание 10.2.16.

Теорема 5 [Критерий Коши существования предела функции]. *Пусть* $f \colon H \to \mathbb{R}^m$ *и* $\mathbf{a}$ *— предельная точка для множества* $\mathrm{Dom}(f)$. *Тогда*

$$\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \iff$$
$$\iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2 \in \mathring{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap \mathrm{Dom}(f)\quad \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

Доказательство проводится точно так же, как доказательство аналогичной теоремы 3.1.2 [Критерий Коши существования предела функции] для функции

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с заменой $|\cdot|$ на соответствующие $\|\cdot\|$ и использованием теоремы 1, то есть *полноты пространства* $\mathbb{R}^m$ (см. замечание 2). Таким образом, в формулировке теоремы пространство $\mathbb{R}^m$ можно заменить на любое *полное нормированное пространство* N. ◄

Теорема 6 (о линейности предела). *Пусть* $f, g\colon H \to N$, $f(\mathbf{x}) \to \mathbf{a}$, $g(\mathbf{x}) \to \mathbf{b}$ *при* $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0$ — *предельная точка для множества* $\mathrm{Dom}(f) \cap \cap \mathrm{Dom}(g)$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x}) \to \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ *при* $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из леммы 8.0.4 по определению $1'$ Гейне. ◄

Теорема 7. *Пусть* $f, g\colon H \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) \to a$, $g(\mathbf{x}) \to b$ *при* $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ *и* $\mathbf{x}_0$ — *предельная точка для множества* $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$. *Тогда* $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \to ab$, $\dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \to \dfrac{a}{b}$ *(в случае если* $b \neq 0$*) при* $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$.

Доказательство проводится точно так же, как доказательство аналогичной теоремы 3.1.3 об арифметических свойствах предела для функций $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с использованием определения $1'$ Гейне. ◄

Теорема 8 (о пределе композиции функций). *Пусть* H, N, E — *нормированные пространства,* $g\colon H \to N$, $f\colon N \to E$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$, $\lim\limits_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0} f(\mathbf{y}) = \mathbf{z}_0$, *точка* $\mathbf{x}_0$ *является предельной для множества* $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{Dom}(g) : g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$ *и найдётся* $\delta > 0$ *такое, что* $g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{y}_0$ *для всех* $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{O}_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \cap \mathrm{Dom}(f \circ g)$. *Тогда* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f\big(g(\mathbf{x})\big) = \mathbf{z}_0$.

Доказательство дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы 3.1.4 о пределе композиции функций для случая $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с учётом замечания 3.1.5. ◄

Определение 2 (о-малого). Пусть H, N, E — *нормированные пространства*, $g\colon H \to E$. Через $o(g)$ (или $\overline{o}(g)$, читается как ***о малое*** от g) ***в точке*** $\mathbf{a}$ будем обозначать *любую функцию* $f\colon H \to N$, для которой существуют число $\delta > 0$ и функция $\alpha\colon \overset{\circ}{O}_\delta(\mathbf{a}) \cap \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) =: \Omega \to \mathbb{R}^+$ такая, что

$$\|f(\mathbf{x})\|_N \leqslant \alpha(\mathbf{x})\|g(\mathbf{x})\|_E$$

при всех $\mathbf{x} \in \Omega$ и $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \alpha(\mathbf{x}) = 0$.

Замечание 7. В случае, когда функции f и g определены в точке $\mathbf{a}$, $f = o(g)$ в этой точке и $f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, функцию α всегда можно доопределить по непрерывности в точке $\mathbf{a}$, полагая $\alpha(\mathbf{a}) := 0$.

Утверждение 2. *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \ni (x_0, y_0)$ *— предельная точка для множества* $\mathrm{Dom}(f)$ *и* $b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}$. *Тогда равенство*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b$$

равносильно тому, что для любых последовательностей φ_n *и* $r_n \to 0+$ *таких, что для всех* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $(x_0 + r_n \cos\varphi_n, y_0 + r_n \sin\varphi_n) \in \mathrm{Dom}(f)$, *имеем*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_0 + r_n \cos\varphi_n, y_0 + r_n \sin\varphi_n) = b.$$

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 5.2.1 о полярной системе координат с использованием определения 1′ Гейне. ◀

Теорема 9 (о повторных пределах). *Пусть*

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b \in \overline{\overline{\mathbb{R}}}.$$

Обозначим $\varphi(y) := \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ *и пусть* y_0 *— предельная точка для* $\mathrm{Dom}(\varphi)$. *Тогда существует*

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y) = b.$$

Доказательство проведём для случая $b \in \mathbb{R}$ (случаи $b = \pm\infty$ рассматриваются аналогично). Для любого $\varepsilon > 0$, используя определение 1 Коши предела, выберем $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x,y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

для всех $(x,y) \in \big(O_\delta(x_0) \times O_\delta(y_0)\big) \cap \mathrm{Dom}(f) \setminus \{(x_0,y_0)\}$. В силу того, что $\forall y \in O_\delta(y_0) \cap \mathrm{Dom}(\varphi)\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$, переходя при $x \to x_0$ к пределу в неравенстве (1) (см. теорему 3.1.5 о предельном переходе в неравенстве), получим

$$|\varphi(y) - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

при всех $y \in O_\delta(y_0) \cap \mathrm{Dom}(\varphi)$, что и означает $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = b$. ◀

9.1.3. Непрерывность

Определение 3 (Коши). Функция $f\colon H \to N$ называется ***непрерывной в точке*** $\mathbf{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ f\big(O_\delta(\mathbf{a}) \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset O_\varepsilon\big(f(\mathbf{a})\big).$$

Замечание 8. Из определения 3 Коши вытекает, что в случае, когда $\mathbf{a}$ — предельная точка $\mathrm{Dom}(f)$, функция f непрерывна в точке $\mathbf{a}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Также любая функция *непрерывна в любой изолированной точке* своей области определения.

Определение 3′ (Гейне). Функция $f\colon H \to N$ называется ***непрерывной в точке*** $\mathbf{a} \in \mathrm{Dom}(f)$, если для любой последовательности $\mathbf{x}_k \in \mathrm{Dom}(f)$, сходящейся к $\mathbf{a}$, последовательность $f(\mathbf{x}_k)$ сходится к $f(\mathbf{a})$.

Определение 4 (непрерывности на множестве). Функция $f\colon H \to N$ называется ***непрерывной на множестве*** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если она непрерывна в каждой точке множества Ω. Класс всех функций $f\colon H \to N$ таких, что их сужения $f\big|_{\Omega}$ (см. определение 0.5.6) непрерывны на Ω, обозначим $C(\Omega, H, N)$ или просто $C(\Omega)$ в тех случаях, когда сокращённое обозначение не вызывает путаницы. При этом в случае $\Omega = \mathrm{Dom}(f)$ функцию f называют ***непрерывной***.

Определение 5 (равномерной непрерывности). Функция $f\colon H \to N$ называется ***равномерно непрерывной*** на множестве $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0 : \forall\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_H < \delta \implies \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\|_N < \varepsilon.$$

Замечание 9. Из определения 5 непосредственно вытекает, что если функция $f\colon H \to N$ равномерно непрерывна на некотором множестве, то она равномерно непрерывна на любом его подмножестве.

Замечание 10. Если функция $f\colon H \to N$ равномерно непрерывна на некотором множестве Ω, то $f \in C(\Omega)$. Для проверки этого факта достаточно в определении 5 равномерной непрерывности зафиксировать произвольную точку $\mathbf{x}_1 \in \Omega$, тогда по определению 1.3 Коши получим, что функция $f\big|_{\Omega}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_1$.

Аналогично соответствующим утверждениям из пункта 9.1.2 (Предел функции) доказываются следующие утверждения:

Теорема 4′. *Определения 3 Коши и 3′ Гейне эквивалентны.*

Лемма 3′ (о покомпонентной непрерывности). *Функция $f = (f_1, .., f_m) : H \to \mathbb{R}^m$ непрерывна в точке $\mathbf{a}$ $\iff$ все функции $f_i\colon H \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $\mathbf{a}$ при $i \in \overline{1, m}$.*

Лемма 4 (о покомпонентной равномерной непрерывности). *Функция* $f=(f_1,..,f_m)\colon H\to\mathbb{R}^m$ *равномерно непрерывна на множестве* $\Omega \iff$ *все функции* $f_i\colon H\to\mathbb{R}$ *равномерно непрерывны на множестве* Ω *при* $i\in\overline{1,m}$.

Теорема 5′ [Критерий Коши непрерывности функции в точке]. *Функция* $f : H \to \mathbb{R}^m$ *непрерывна в точке* $\mathbf{a}\in\operatorname{Dom}(f) \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:$ $\forall\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in O_\delta(\mathbf{a})\cap\operatorname{Dom}(f)$ *имеем* $\|f(\mathbf{x}_1)-f(\mathbf{x}_2)\|_{\mathbb{R}^m}<\varepsilon$.

Теорема 6′ (о непрерывности линейной комбинации). *Пусть функции* $f,g : H\to N$ *непрерывны в точке* $\mathbf{x}_0$ *и* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. *Тогда функция* $\alpha f+\beta g$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}_0$.

Теорема 7′. *Пусть функции* $f,g\colon H\to\mathbb{R}$ *непрерывны в точке* $\mathbf{x}_0$. *Тогда функции* fg, $\dfrac{f}{g}$ *(в случае если* $g(\mathbf{x}_0)\neq 0$*) непрерывны в точке* $\mathbf{x}_0$.

Теорема 8′ (о непрерывности композиции непрерывных функций). *Пусть* H, N, E *— нормированные пространства, функция* $g\colon H\to N$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}_0$, *а функция* $f\colon N\to E$ *непрерывна в точке* $g(\mathbf{x}_0)$. *Тогда функция* $f\circ g$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}_0$.

Доказательство следующей теоремы дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы 3.2.1 о локальном знакопостоянстве непрерывных функций для случая $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Теорема 10 (о локальном знакопостоянстве непрерывных функций). *Пусть* $f\colon H\to\mathbb{R}$, *функция* f *непрерывна в точке* $\mathbf{a}$ *и* $f(\mathbf{a})\neq 0$. *Тогда* $\exists\delta>0:$ $\operatorname{sgn}\big(f(\mathbf{x})\big)=\operatorname{sgn}\big(f(\mathbf{a})\big)$ *для всех* $\mathbf{x}\in O_\delta(\mathbf{a})\cap\operatorname{Dom}(f)$.

Определение 6 (линейно связного множества). Множество $\Omega\subset H$ называется ***линейно связным***, если для любых $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\Omega$ существует *непрерывная функция* $\gamma\colon[0,1]\to\Omega$ такая, что $\gamma(0)=\mathbf{a}$, $\gamma(1)=\mathbf{b}$.

Теорема 11 (Больцано–Коши). *Пусть* $f\colon H\to\mathbb{R}$, *множество* $\Omega\subset H$ *линейно связно и* $f\in C(\Omega)$. *Тогда для любых* $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\Omega$ *и для любого числа* y, *лежащего между числами* $f(\mathbf{a})$ *и* $f(\mathbf{b})$, *найдётся точка* $\boldsymbol{\xi}\in\Omega:\ f(\boldsymbol{\xi})=y$.

Доказательство. Рассмотрим функцию γ, указанную в определении 6 линейно связного множества. Тогда

$$f\circ\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{R},\ \ f\circ\gamma\overset{\text{Т. }8'}{\in}C[0,1]$$

и $f\big(\gamma(0)\big)=f(\mathbf{a}), f\big(\gamma(1)\big)=f(\mathbf{b})$. По теореме 3.2.3 Больцано–Коши $\exists t_0\in$ $\in(0,1): f\big(\gamma(t_0)\big)=y$. Положим $\boldsymbol{\xi}:=\gamma(t_0)$. ◀

Определение 7 (ограниченной функции). Функция $f\colon H \to N$ называется ***ограниченной*** на множестве $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если найдётся число M, такое что $\|f(\mathbf{x})\|_N \leqslant M$ для всех $\mathbf{x} \in \Omega$.

Теорема 12 [Первая теорема Вейерштрасса]. *Пусть $f\colon H \to \mathbb{R}$, $H \supset \supset K$ — компакт, $f \in C(K)$. Тогда функция f ограничена на K.*

Доказательство. Предположим противное, тогда найдётся последовательность $\mathbf{x}_m \in K$ такая, что $|f(\mathbf{x}_m)| > m$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Так как K — компакт, по теореме 8.0.1 о секвенциальной компактности найдутся элемент $\mathbf{x}_0 \in K$ и подпоследовательность $\mathbf{x}_{m_p} \to \mathbf{x}_0$ при $p \to \infty$. В силу того, что $f(\mathbf{x}_{m_p}) \xrightarrow{\text{О. } 3' \text{ Гейне}} \xrightarrow{\text{О. } 3' \text{ Гейне}} f(\mathbf{x}_0)$ и леммы 8.0.3 об ограниченности сходящейся последовательности, последовательность $f(\mathbf{x}_{m_p})$ является ограниченной, но $|f(\mathbf{x}_{m_p})| > m_p \geqslant \geqslant p \to +\infty$, получили противоречие. ◀

Теорема 13 [Вторая теорема Вейерштрасса]. *Пусть $f\colon H \to \mathbb{R}$, $H \supset \supset K$ — компакт, $f \in C(K)$. Тогда функция f достигает на K своего максимума и минимума.*

Доказательство проводится точно так же, как доказательство аналогичной теоремы 3.2.5 [Вторая теорема Вейерштрасса] для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с заменой $[a, b]$ на K, с использованием теорем $6'$, $7'$ об арифметических операциях над непрерывными функциями и теоремы 12 [Первая теорема Вейерштрасса]. ◀

Лемма 5 (о непрерывности нормы). *Функция $\|\cdot\|\colon (H, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ является равномерно непрерывной* (см. определение 5) *на пространстве $(H, \|\cdot\|)$.*

Доказательство. В силу неравенства $\big|\|\mathbf{x}_1\| - \|\mathbf{x}_2\|\big| \overset{\text{Л. } 8.0.1}{\leqslant} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$, верного для всех $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in H$, определение 5 равномерной непрерывности для функции $\|\cdot\|$ выполняется при $\delta = \varepsilon$. ◀

Лемма 6 (о компактности сфер и замкнутых шаров в $\mathbb{R}^n$). *Пусть $\mathbf{a} \in \in \mathbb{R}^n$ и $\delta \geqslant 0$. Тогда сфера $S_\delta(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \delta\}$ и замкнутый шар $B_\delta(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leqslant \delta\}$ являются компактами в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$.*

Доказательство. В силу теоремы 3 о компактах в $\mathbb{R}^n$ достаточно проверить замкнутость и ограниченность множеств $S_\delta(\mathbf{a})$, $B_\delta(\mathbf{a})$. Их ограниченность очевидна, так как в обоих случаях $\|\mathbf{x}\| \leqslant \delta + \|\mathbf{a}\|$ по неравенству треугольника. Для проверки замкнутости предположим, что $\mathbf{x}_0$ — некоторая предельная точка для $S_\delta(\mathbf{a})$ [для $B_\delta(\mathbf{a})$]. По лемме 8.0.5 найдётся последовательность $S_\delta(\mathbf{a}) \ni \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$ $[B_\delta(\mathbf{a}) \ni \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0]$, а значит, $\mathbf{x}_k - \mathbf{a} \to \mathbf{x}_0 - \mathbf{a}$. По лемме 5 о непрерывности нормы функция $\|\cdot\|_2$ равномерно непрерывна, а значит, и непрерывна на $\mathbb{R}^n$, отсюда по определению $3'$ Гейне имеем $\delta = [\geqslant] \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| \to \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\|$, поэтому $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\| = [\leqslant] \delta$, то есть $\mathbf{x}_0 \in S_\delta(\mathbf{a})$ $[\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{a})]$, что и означает замкнутость $S_\delta(\mathbf{a})$ $[B_\delta(\mathbf{a})]$. ◀

Лемма 7. *Пусть* $\|\cdot\|$ *— произвольная норма в* $\mathbb{R}^n$*. Тогда функция* $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to \mathbb{R}$ *является равномерно непрерывной* (см. определение 5) *на всём пространстве* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ имеем

$$\|\mathbf{x}\| = \Big\| \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k \Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|\mathbf{e}_k\| \leqslant c_1 \|\mathbf{x}\|_1 \overset{\text{Л. } 8.0.8}{\leqslant} c_1 c_2 \|\mathbf{x}\|_2 = c\|\mathbf{x}\|_2, \tag{2}$$

где $\mathbf{e}_k$ — k-й вектор естественного базиса в $\mathbb{R}^n$, $c_1 := \max\{\|\mathbf{e}_1\|, \ldots, \|\mathbf{e}_n\|\} > 0$, $c := c_1 c_2 > 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 : \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2 < \delta := \varepsilon / c$ имеем

$$\big| \|\mathbf{x}_1\| - \|\mathbf{x}_2\| \big| \overset{\text{Л. } 8.0.1}{\leqslant} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \overset{(2)}{\leqslant} c\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2 < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство леммы. ◀

Теорема 14 (об эквивалентности норм в $\mathbb{R}^n$). *В линейном пространстве* $\mathbb{R}^n$ *все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|$ — *произвольная норма* в $\mathbb{R}^n$. Покажем, что $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$. В нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ рассмотрим функцию $\|\cdot\| \colon (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to \mathbb{R}$, являющуюся всюду равномерно непрерывной по лемме 7, а следовательно, и непрерывной на *единичной сфере* $S_1(\mathbf{0})$, являющейся компактом по лемме 6. По теореме 13 [Вторая теорема Вейерштрасса] для всех $\mathbf{y} \in S_1(\mathbf{0})$ имеем $c_1 \leqslant \|\mathbf{y}\| \leqslant c_2$, где $c_1 := \min\limits_{\mathbf{y} \in S_1(\mathbf{0})} \|\mathbf{y}\| > 0$, $c_2 := \max\limits_{\mathbf{y} \in S_1(\mathbf{0})} \|\mathbf{y}\| > 0$. Так как для всех $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\mathbf{y} := (1/\|\mathbf{x}\|_2)\mathbf{x} \in S_1(\mathbf{0})$, получим $c_1\|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant c_2\|\mathbf{x}\|_2$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, что и означает $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$. Теперь утверждение теоремы следует из транзитивности отношения эквивалентности. ◀

Теорема 15 (Кантора–Гейне). *Пусть* $f \colon H \to N$ *и* $f \in C(K)$*, где* K *— компакт, тогда функция* f *равномерно непрерывна* (см. определение 5) *на* K.

Доказательство проводится точно так же, как доказательство аналогичной теоремы 3.9.1 Кантора–Гейне для функции $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с заменой $|\cdot|$ на соответствующие $\|\cdot\|$, отрезка $[a, b]$ на компакт K и с использованием теоремы 8.0.1 о секвенциальной компактности вместо теоремы 2.6.2 Больцано–Вейерштрасса. ◀

Теорема 15′ (Кантора–Гейне). *Пусть* $f\colon H \to N$, $\mathbf{a} \in H$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\Omega :=$ $:= \overline{O}_\delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in H : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \geqslant \delta\}$, $f \in C(\Omega)$ *и существует* $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} f(\mathbf{x}) =$ $= \mathbf{b} \in N$, *тогда функция* f *равномерно непрерывна* (см. определение 5) *на* Ω.

Доказательство. Пусть функция f не равномерно непрерывна на Ω, тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ при $\delta_n := 1/n$ найдутся последовательности $\mathbf{x}'_n, \mathbf{x}''_n \in \Omega$ такие, что $\|\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}''_n\| < \delta_n \to 0$ и при этом $\|f(\mathbf{x}'_n) - f(\mathbf{x}''_n)\| \geqslant \varepsilon_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим два случая.

а) Пусть последовательность $\mathbf{x}'_n$ ограничена, то есть $\exists M > 0 : \|\mathbf{x}'_n\| \leqslant M$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|\mathbf{x}''_n\| \leqslant \|\mathbf{x}''_n - \mathbf{x}'_n\| + \|\mathbf{x}'_n\| \leqslant \frac{1}{n} + M \leqslant M + 1$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что все элементы последовательностей $\mathbf{x}'_n, \mathbf{x}''_n$ лежат в пересечении замкнутого шара $B_{M+1}(\mathbf{0})$ и множества Ω, являющегося замкнутым, как дополнение к открытому (см. лемму 8.0.2). Но пересечение двух замкнутых множеств снова является замкнутым (как нетрудно показать, используя ту же лемму 8.0.2), поэтому ограниченное множество $\Omega \cap B_{M+1}(\mathbf{0})$ является компактом по теореме 3. Но $f \in C(\Omega) \subset C\big(\Omega \cap B_{M+1}(\mathbf{0})\big)$, поэтому наше построение противоречит теореме 15 Кантора–Гейне.

б) Пусть последовательность $\mathbf{x}'_n$ не ограничена, то есть найдётся её подпоследовательность $\mathbf{x}'_{n_p} : \|\mathbf{x}'_{n_p}\| \xrightarrow{p\to\infty} +\infty$. Тогда

$$\|\mathbf{x}''_{n_p}\| \geqslant \|\mathbf{x}'_{n_p}\| - \|\mathbf{x}'_{n_p} - \mathbf{x}''_{n_p}\| > \|\mathbf{x}'_{n_p}\| - 1 \xrightarrow{p\to\infty} +\infty,$$

отсюда в силу определения предела по Гейне (см. замечание 6) имеем

$$f(\mathbf{x}'_{n_p}) - f(\mathbf{x}''_{n_p}) \xrightarrow{p\to\infty} \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

что равносильно

$$\|f(\mathbf{x}'_{n_p}) - f(\mathbf{x}''_{n_p})\| \xrightarrow{p\to\infty} 0.$$

Получили противоречие с тем, что $\|f(\mathbf{x}'_{n_p}) - f(\mathbf{x}''_{n_p})\| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ при всех $p \in \mathbb{N}$. ◄

§ 9.2. Дифференцируемость

9.2.0. О линейных операторах

Пусть H, N — *нормированные пространства*. Функцию $\mathcal{A}\colon H \to N$ будем называть ***линейным оператором***, если $\mathcal{A}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{a}) + \beta\mathcal{A}(\mathbf{b})$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$.

Для любых линейных операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon H \to N$ и любого числа α определены линейные операторы $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ и $\alpha\mathcal{A}$, действующие на любой вектор $\mathbf{x} \in H$ по формулам $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x}) := \mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x})$ и $(\alpha\mathcal{A})(\mathbf{x}) := \alpha\mathcal{A}(\mathbf{x})$ соответственно. Множество всех линейных операторов, действующих из пространства H в N, является *линейным пространством* относительно введённых выше операций.

Из курса алгебры известно (см. [5, 25]), что для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ существует единственная матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (называемая ***матрицей линейного оператора*** $\mathcal{A}$) такая, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ←(произведение матриц) для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1 (ограниченного оператора и операторной нормы). Линейный оператор $\mathcal{A}\colon H \to N$ будем называть ***ограниченным***, если он ограничен на единичной сфере $S_1(\mathbf{0}) := \{\mathbf{x}\in H : \|\mathbf{x}\|_H = 1\}$, то есть если существует число M такое, что $\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|_N \leqslant M$ для всех $\mathbf{x}\in S_1(\mathbf{0})$. При этом корректно определено число

$$\|\mathcal{A}\| = \|\mathcal{A}\|_{op} := \sup_{\mathbf{x}\in S_1(\mathbf{0})} \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|_N,$$

называемое ***нормой линейного оператора*** (***операторной нормой***).

Из курса алгебры известно (и проверяется непосредственно), что множество всех *ограниченных* линейных операторов, действующих из H в N, является *линейным подпространством* пространства всех линейных операторов, действующих из H в N, а также то, что операторная норма, введённая выше, действительно является нормой на этом подпространстве (то есть обладает тремя свойствами нормы).

Таким образом, определено *вещественное нормированное пространство (с операторной нормой) всех ограниченных линейных операторов, действующих из H в N*, которое мы всюду далее будем обозначать $\mathcal{L}(H,N)$.

Лемма 1. *Любой линейный оператор $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to N$ ограничен.*

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{e}_k$ k-й вектор естественного базиса в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого вектора $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)\in S_1(\mathbf{0})$ имеем

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|_N = \|x_1\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)+\ldots+x_n\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)\|_N \leqslant \|x_1\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)\|_N+\ldots+\|x_n\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)\|_N \leqslant$$
$$\leqslant c_1(|x_1|+\ldots+|x_n|) = c_1\|\mathbf{x}\|_1 \overset{\text{Т. 1.14}}{\leqslant} c_1c_2\|\mathbf{x}\| = c_1c_2 =: M,$$

где $c_1 := \max\{\|\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)\|_N,\ldots,\|\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)\|_N\}$. ◄

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(H,N)$. Тогда $\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|_N \leqslant \|\mathcal{A}\|\|\mathbf{x}\|_H$ для всех $\mathbf{x}\in H$.*

Доказательство. Если $\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|_N = 0$, то неравенство выполнено. Если $\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|_N \neq 0$, то $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ и $\|\mathbf{x}\|_H\neq 0$. Так как $\dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|_H}\mathbf{x}\in S_1(\mathbf{0})$, то по определению операторной нормы

$$\|\mathcal{A}\| \geqslant \left\|\mathcal{A}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_H}\mathbf{x}\right)\right\|_N = \frac{\|\mathcal{A}(\mathbf{x})\|_N}{\|\mathbf{x}\|_H}. \qquad \blacktriangleleft$$

Лемма 3. *Пусть H, N, E — нормированные пространства, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(N, E)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(H, N)$. Тогда $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \in \mathcal{L}(H, E)$ и $\|\mathcal{A} \circ \mathcal{B}\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\|\mathcal{B}\|$.*

Доказательство. По определению проверяется, что функция $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ является линейным оператором. Далее для любого $\mathbf{x} \in S_1(\mathbf{0})$ имеем

$$\big\|\mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\mathbf{x})\big)\big\|_E \overset{\text{л. 2}}{\leqslant} \|\mathcal{A}\|\|\mathcal{B}(\mathbf{x})\|_N \overset{\text{л. 2}}{\leqslant} \|\mathcal{A}\|\|\mathcal{B}\|\underbrace{\|\mathbf{x}\|_H}_{1} = \|\mathcal{A}\|\|\mathcal{B}\|,$$

что и завершает доказательство леммы. ◀

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{A}\colon H \to N$ — линейный оператор. Тогда следующие условия равносильны:*

1. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H, N)$;
2. $\mathcal{A}$ *равномерно непрерывен на* H (см. определение 1.5);
3. $\mathcal{A}$ *непрерывен в точке* $\mathbf{0} \in H$.

Доказательство.

$1 \implies 2$: Если $\|\mathcal{A}\| = 0$, то $\mathcal{A} = \mathbf{0}$ и утверждение верно. Если $\|\mathcal{A}\| > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ и любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in H$, удовлетворяющих неравенству $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_H < \delta := \varepsilon/\|\mathcal{A}\|$, имеем

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) - \mathcal{A}(\mathbf{x}_2)\|_N = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|_N \overset{\text{л. 2}}{\leqslant} \|\mathcal{A}\|\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_H < \|\mathcal{A}\|\frac{\varepsilon}{\|\mathcal{A}\|} = \varepsilon,$$

что и означает равномерную непрерывность оператора $\mathcal{A}$ на H.

$2 \implies 3$: Очевидно.

$3 \implies 1$: Так как $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in N$, то по определению 1.3 Коши при $\varepsilon := 1$ существует $\delta > 0$ такое, что $\mathcal{A}\big(O_\delta(\mathbf{0} \in H)\big) \subset O_1(\mathbf{0} \in N)$, отсюда в силу линейности $\mathcal{A}$ получаем $\mathcal{A}\big(O_2(\mathbf{0} \in H)\big) \subset O_{\frac{2}{\delta}}(\mathbf{0} \in N)$. Так как $S_1(\mathbf{0} \in H) \subset O_2(\mathbf{0} \in H)$, мы доказали ограниченность оператора $\mathcal{A}$. ◀

9.2.1. Дифференциал и производная

Определение 2 (дифференцируемой функции). Пусть H, N — *нормированные пространства*, $f\colon H \to N$ и $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int}\big(\operatorname{Dom}(f)\big)$. Функция f называется ***дифференцируемой в точке*** x_0, если существует *линейный ограниченный оператор* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H, N)$ такой, что при некотором $\delta > 0$ для всех

$\mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{0})$ выполнено равенство

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathcal{A}(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|) \tag{1}$$

при $\mathbf{h} \to \mathbf{0} \in H$ (согласно определению 1.2 о-малого и замечанию 1.7 это означает, что $\|o(\|\mathbf{h}\|)\|_N \leqslant \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|_H$, где $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \alpha(\mathbf{h}) = \alpha(\mathbf{0}) = 0 \in \mathbb{R}$). В случае выполнения равенства (1) оператор $\mathcal{A}$ называется ***дифференциалом*** функции f в точке $\mathbf{x}_0$ и обозначается $df(\mathbf{x}_0) := \mathcal{A}$. Применяя оператор $\mathcal{A}$ к некоторому вектору $\mathbf{h} \in H$, вместо $df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})$ будем также использовать обозначение $df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ или $df(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$.

Замечание 1. Отметим, что данное выше определение дифференцируемости также называют *дифференцируемостью по Фреше*.

Замечание 2. Из определения 2 дифференцируемой функции вытекает, что свойство функции быть дифференцируемой в точке, а также значение дифференциала ***сохранятся при замене норм в пространствах*** H ***и*** N ***на эквивалентные***.

Определение 3 (дифференцируемости на множестве). Функция $f\colon H \to N$ называется ***дифференцируемой на множестве*** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если она дифференцируема в каждой точке множества Ω. Класс всех таких функций обозначим $D(\Omega, H, N)$ или просто $D(\Omega)$ в тех случаях, когда сокращённое обозначение не вызывает путаницы. При этом в случае $\Omega = \mathrm{Dom}(f)$ функцию f называют ***дифференцируемой***. Также условимся вместо $D(\{\mathbf{x}_0\})$ пользоваться упрощённым обозначением $D(\mathbf{x}_0)$.

Определение 4 (производной). Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$. *Матрица* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *линейного оператора* $df(\mathbf{x}_0)$ называется ***производной*** функции f в точке $\mathbf{x}_0$ и обозначается $f'(\mathbf{x}_0)$. Таким образом, для всех $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ имеем $df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$ ←(произведение матриц) и

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|) \tag{2}$$

при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

Теорема 1 (о единственности дифференциала). *Если функция* $f\colon H \to N$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}_0$*, то* $df(\mathbf{x}_0)$ *определён однозначно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — некоторые дифференциалы функции f в точке $\mathbf{x}_0$. Используя (1), в силу $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{int}\big(\mathrm{Dom}(f)\big)$ получим существование $\delta > 0$ такого, что представление $\mathcal{B}(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|)$, где $\mathcal{B} := \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 \in \mathcal{L}(H, N)$, верно для всех $\mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{0})$. Тогда для любого $\mathbf{e} \in S_1(\mathbf{0})$ при всех $t \in [0, \delta)$ имеем

$\mathcal{B}(t\mathbf{e}) = o(|t|) = o(t)$ при $t \to 0+$, отсюда $(1/t)\mathcal{B}(t\mathbf{e}) = \mathcal{B}(\mathbf{e}) = o(1)$, что означает $\|\mathcal{B}(\mathbf{e})\|_N = 0$. В силу произвольности $\mathbf{e} \in S_1(\mathbf{0})$ получаем, что $\|\mathcal{B}\| = 0$, то есть $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$. ◀

Замечание 3. Если в определении 2 дифференцируемой функции отказаться от условия $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int}\big(\operatorname{Dom}(f)\big)$, потребовав лишь того, чтобы $\mathbf{x}_0$ являлась *предельной точкой* $\operatorname{Dom}(f)$, то теорема 1 о единственности дифференциала перестаёт быть верной. Действительно, пусть $f(x,y) := x + y\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\operatorname{Dom}(f) = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$. Так как $y = 0$ при $(x,y) \in \operatorname{Dom}(f)$, то равенство (1) выполнено в точке $(0,0)$ (как и в любой другой точке области определения функции f) для *любого* оператора $\mathcal{A}$ вида $\mathcal{A}(x,y) = x + \alpha y$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Получаем *континуальное семейство различных дифференциалов* в любой точке области определения f. Чтобы избавиться от подобных особенностей, мы всюду рассматриваем дифференцируемость функции лишь во *внутренних* точках её области определения.

Утверждение 1 (о непрерывности дифференцируемой функции). *Если функция $f\colon H \to N$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$, то она непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.*

Доказательство. По лемме 4 оператор $\mathcal{A}$ из (1) является непрерывным всюду, в частности в точке $\mathbf{0}$. Переходя в (1) к пределу при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, имеем

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{0} + \mathbf{0} = f(\mathbf{x}_0),$$

что и означает непрерывность функции f в точке $\mathbf{x}_0$ в силу замечания 1.8. ◀

Следствие 1 утверждения 1 о непрерывности дифференцируемой функции. *Для любых нормированных пространств H, N и любого множества $\Omega \subset H$ выполнено $D(\Omega, H, N) \subset C(\Omega, H, N)$.*

Лемма 5 (о покомпонентной дифференцируемости). *Пусть $f = (f_1, \ldots$ $\ldots, f_m)\colon H \to \mathbb{R}^m$, тогда $f \in D(\mathbf{x}_0) \iff f_i \in D(\mathbf{x}_0)$ при всех $i \in \overline{1,m}$. При выполнении одного из этих равносильных условий верно равенство $df(\mathbf{x}_0) =$ $= \big(df_1(\mathbf{x}_0), df_2(\mathbf{x}_0), \ldots, df_m(\mathbf{x}_0)\big)$.*

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Пусть $df(\mathbf{x}_0) = \mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m)$. В силу $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^m)$ имеем $\mathcal{A}_i \in$ $\in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ при всех $i \in \overline{1,m}$ (см. леммы 4 и 1.3′ о покомпонентной непрерывности). Также для некоторого $\delta > 0$ при $\mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{0})$ имеем

$$g(\mathbf{h}) = \big(g_1(\mathbf{h}), \ldots, g_m(\mathbf{h})\big) := f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathcal{A}(\mathbf{h}) \overset{\text{О. 2}}{=} o(\|\mathbf{h}\|),$$

то есть $\|g(\mathbf{h})\| \overset{\text{О. }1.2}{\leqslant} \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|$, где $\alpha(\mathbf{h}) \to 0 \in \mathbb{R}$ при $\mathbf{h} \to \mathbf{0} \in H$. Пусть $i \in \overline{1,m}$, тогда $g_i(\mathbf{h}) = f_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) - \mathcal{A}_i(\mathbf{h})$ и

$$|g_i(\mathbf{h})| \leqslant \|g(\mathbf{h})\|_\infty \overset{\text{Т. }1.14}{\leqslant} c_1\|g(\mathbf{h})\| \leqslant c_1\alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|,$$

отсюда имеем $g_i(\mathbf{h}) \overset{\text{О. }1.2}{=} o(\|\mathbf{h}\|)$, что и означает $df_i(\mathbf{x}_0) \overset{\text{О. }2}{=} \mathcal{A}_i$.

$\Longleftarrow$: Пусть $df_i(\mathbf{x}_0) =: \mathcal{A}_i \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ при всех $i \in \overline{1,m}$. Тогда $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m) \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}^m)$ (см. леммы 4 и 1.3′ о покомпонентной непрерывности) и для некоторого $\delta > 0$ при $\mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{0})$ имеем

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathcal{A}(\mathbf{h})\| \overset{\text{Т. }1.14}{\leqslant} c_2\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathcal{A}(\mathbf{h})\|_1 =$$
$$= c_2 \sum_{i=1}^m |f_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) - \mathcal{A}_i(\mathbf{h})| \overset{\text{О. }1.2}{\leqslant} c_2\Big(\sum_{i=1}^m \alpha_i(\mathbf{h})\Big)\|\mathbf{h}\|,$$

где $\alpha_i(\mathbf{h}) \to 0$ при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ при всех $i \in \overline{1,m}$. Это означает, что

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathcal{A}(\mathbf{h}) \overset{\text{О. }1.2}{=} o(\|\mathbf{h}\|),$$

то есть $df(\mathbf{x}_0) \overset{\text{О. }2}{=} \mathcal{A}$. ◀

Лемма 6. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, тогда $f \in D(\mathbf{x}_0) \iff$ существуют $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $\delta > 0$ и бесконечно малые при $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n) \to \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ функции $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : O_\delta(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$ такие, что для всех $\mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{0})$ выполнено*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - A\mathbf{h} =: g(\mathbf{h}) = \alpha_1(\mathbf{h})h_1 + \ldots + \alpha_n(\mathbf{h})h_n.$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: По определению 4 при $A := f'(\mathbf{x}_0)$ для некоторого $\delta > 0$ при всех $\mathbf{h} \in \mathring{O}_\delta(\mathbf{0})$ имеем

$$g(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|) = \frac{g(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}\frac{h_1^2 + \ldots + h_n^2}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{g(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}\frac{h_1}{\|\mathbf{h}\|}h_1 + \ldots + \frac{g(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}\frac{h_n}{\|\mathbf{h}\|}h_n.$$

Полагая $\alpha_i(\mathbf{h}) := \dfrac{g(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}\dfrac{h_i}{\|\mathbf{h}\|}$ и $\alpha_i(\mathbf{0}) := 0$ при всех $i \in \overline{1,m}$, получим

$$|\alpha_i(\mathbf{h})| \leqslant \frac{|g(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \xrightarrow{\text{О. }1.2} 0 \in \mathbb{R}$$

при $\mathbf{h} \to \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

$\Longleftarrow$: при всех $\mathbf{h} \in \mathring{O}_\delta(\mathbf{0})$ имеем

$$|g(\mathbf{h})| = |\alpha_1(\mathbf{h})h_1 + \ldots + \alpha_n(\mathbf{h})h_n| \leqslant$$
$$\leqslant \left(|\alpha_1(\mathbf{h})|\frac{|h_1|}{\|\mathbf{h}\|} + \ldots + |\alpha_n(\mathbf{h})|\frac{|h_n|}{\|\mathbf{h}\|}\right)\|\mathbf{h}\| \leqslant \beta(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|,$$

где $\beta(\mathbf{h}) := |\alpha_1(\mathbf{h})| + \ldots + |\alpha_n(\mathbf{h})| \to 0 \in \mathbb{R}$ при $\mathbf{h} \to \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, то есть $g(\mathbf{h}) \overset{\text{O. }1.2}{=} o(\|\mathbf{h}\|)$. Таким образом, $f \in D(\mathbf{x}_0)$ и $df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = A\mathbf{h}$ по определению 2 дифференцируемой функции. ◀

9.2.2. Частные производные

Определение 5 (частной производной). Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \in \overline{1,n}$, $\delta > 0$ и $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_n) = \mathbf{a} + t\mathbf{e}_k \in \mathrm{Dom}(f)$ при всех $t \in (-\delta, \delta)$, где $\mathbf{e}_k$ — k-й вектор естественного базиса в $\mathbb{R}^n$. Число

$$\partial_k f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} = f_{x_k}(\mathbf{a}) :=$$
$$:= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{a})}{t}$$

называется (в случае существования конечного предела) ***частной производной*** функции f в точке $\mathbf{a}$ по k-й компоненте (по переменной x_k). Таким образом, $\partial_k f(\mathbf{a}) := g'(0)$, где $g(t) := f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_k)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Замечание 4. Из существования частных производных функции f в точке $\mathbf{a}$ не следует непрерывность f в точке $\mathbf{a}$. Действительно, пусть $\mathbf{a} := (0, 0)$,

$$f(x, y) := \begin{cases} 2 & \text{при } xy \neq 0, \\ 5 & \text{при } xy = 0. \end{cases}$$

Тогда $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, однако функция f разрывна в точке $(0,0)$ (см. рис. 36).

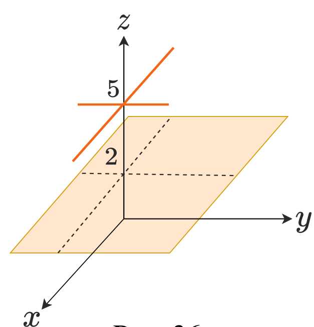


Рис. 36

Утверждение 2. *Пусть $\mathbb{R}^n \supset \Omega$ — выпуклое открытое множество, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и все частные производные функции f определены и ограничены на Ω. Тогда функция f равномерно непрерывна на Ω.*

Доказательство. Доказательство проведём для случая $n = 2$ (общий случай рассматривается аналогично). Пусть для функции $f(x, y)$ найдётся константа $M > 0$ такая, что $|f_x(x, y)|, |f_y(x, y)| \leqslant M$ для всех $(x, y) \in \Omega$. Пусть

$\mathbf{z}, \widetilde{\mathbf{z}} \in \Omega$, где $\mathbf{z} = (x, y) \neq (\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \widetilde{\mathbf{z}}$, $\delta > 0$ и $\|\widetilde{\mathbf{z}} - \mathbf{z}\| < \delta$. Обозначим $\Delta x := \widetilde{x} - x$, $\Delta y := \widetilde{y} - y$, $\Delta\mathbf{z} := \widetilde{\mathbf{z}} - \mathbf{z} = (\Delta x, \Delta y)$. В силу открытости множества Ω найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что $O_{\delta_1}(\mathbf{z}), O_{\delta_1}(\widetilde{\mathbf{z}}) \subset \Omega$. Обозначим $\mathbf{h} := (\Delta y/\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, -\Delta x/\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ — единичный вектор, ортогональный вектору $\Delta\mathbf{z}$. Рассматривая точки $\mathbf{z}' := \mathbf{z} + (\delta_1/2)\mathbf{h}$, $\mathbf{z}'' := \mathbf{z} - (\delta_1/2)\mathbf{h}$, $\widetilde{\mathbf{z}}' := \widetilde{\mathbf{z}} + (\delta_1/2)\mathbf{h}$, $\widetilde{\mathbf{z}}'' := \widetilde{\mathbf{z}} - (\delta_1/2)\mathbf{h}$, получим $\mathbf{z}', \mathbf{z}'', \widetilde{\mathbf{z}}', \widetilde{\mathbf{z}}'' \in \Omega$. В силу выпуклости множества Ω это означает, что прямоугольник $B := \mathbf{z}'\widetilde{\mathbf{z}}'\widetilde{\mathbf{z}}''\mathbf{z}''$ со сторонами $\|\Delta\mathbf{z}\|$ и δ_1 целиком лежит в Ω. Далее соединим точки $\mathbf{z}$ и $\widetilde{\mathbf{z}}$ ломаной (тропой) $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0\mathbf{z}_1 \ldots \mathbf{z}_{m-1}\mathbf{z}_m = \widetilde{\mathbf{z}}$ со звеньями, параллельными ортам, целиком лежащей в B (см. рис. 37). Обозначая $\mathbf{z}_j - \mathbf{z}_{j-1} =: (\Delta x_j, \Delta y_j)$ для всех $j \in \overline{1, m}$

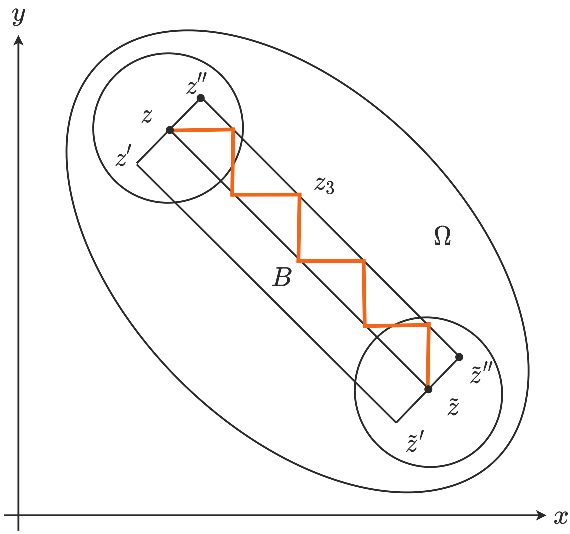


Рис. 37

и учитывая, что по построению $\Delta x_j \Delta y_j = 0$, по теореме 4.4.6 Лагранжа получим

$$
\begin{gathered}
|f(\widetilde{\mathbf{z}}) - f(\mathbf{z})| = |f(\mathbf{z}_m) - f(\mathbf{z}_{m-1}) + f(\mathbf{z}_{m-1}) - \ldots + f(\mathbf{z}_1) - f(\mathbf{z}_0)| \leqslant \\
\leqslant |f(\mathbf{z}_m) - f(\mathbf{z}_{m-1})| + \ldots + |f(\mathbf{z}_1) - f(\mathbf{z}_0)| \leqslant \\
\leqslant M(|\Delta x_m| + |\Delta y_m|) + \ldots + M(|\Delta x_1| + |\Delta y_1|) = \\
= M(|\Delta x_1| + \ldots + |\Delta x_m|) + M(|\Delta y_1| + \ldots + |\Delta y_m|) = \\
= M(|\Delta x| + |\Delta y|) \overset{\text{Утв. } 4.7.4}{\leqslant} M\sqrt{2}\|\Delta\mathbf{z}\| < M\delta\sqrt{2}.
\end{gathered}
$$

Таким образом, для функции f на множестве Ω выполняется определение 1.5 равномерной непрерывности при $\delta := \varepsilon/(M\sqrt{2})$. ◀

Теорема 2. *Пусть $D(\mathbf{x}_0) \ni f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда*

$$f'(\mathbf{x}_0) = [\partial_1 f(\mathbf{x}_0), \ldots,\ \partial_n f(\mathbf{x}_0)] \in \mathbb{R}^{1\times n},$$

при этом вектор-строка $f'(\mathbf{x}_0)$ называется ***градиентом*** *функции f в точке $\mathbf{x}_0$ и обозначается $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$. Таким образом, для всех $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ имеем*

$$df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = \langle \operatorname{grad}^{\mathrm{T}} f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}\rangle.$$

Доказательство. Пусть $f'(\mathbf{x}_0) = [A_1, \ldots,\ A_n]$. Так как $O_\delta(\mathbf{x}_0) \subset \operatorname{Dom}(f)$ для некоторого $\delta > 0$, то для любого $k \in \overline{1,n}$ имеем $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k \in \operatorname{Dom}(f)$ при всех $t \in (-\delta, \delta)$, где $\mathbf{e}_k$ — k-й вектор естественного базиса в $\mathbb{R}^n$. При $\mathbf{h} := t\mathbf{e}_k$ в силу теоремы 1.8 о пределе композиции функций имеем

$$0 = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0) - A_k t}{t} \right| =$$
$$= \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - A_k \right|,$$

что и означает $\partial_k f(\mathbf{x}_0) = A_k$ по определению 5. ◀

Следствие 2 теоремы 2 и леммы 5 о покомпонентной дифференцируемости. *Пусть $D(\mathbf{x}_0) \ni f = (f_1, \ldots, f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, тогда*

$$f'(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \operatorname{grad} f_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{x}_0), \ldots,\ \partial_n f_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \partial_1 f_m(\mathbf{x}_0), \ldots,\ \partial_n f_m(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

При этом матрица $f'(\mathbf{x}_0)$ называется ***матрицей Якоби***.

Теорема 3 (о достаточном условии дифференцируемости). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, одна из частных производных $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ функции f определена в точке $\mathbf{a}$, а оставшиеся $n-1$ частные производные определены в $O_\delta(\mathbf{a})$ и непрерывны в точке $\mathbf{a}$. Тогда $f \in D(\mathbf{a})$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что существует $\partial_1 f(\mathbf{a})$, а функции $\partial_2 f, \ldots, \partial_n f$ определены в $O_\delta(\mathbf{a})$ и непрерывны в точке $\mathbf{a}$ (этого всегда можно добиться, перенумеровав переменные). Для сокращения записи проведём доказательство при $n = 2$. Пусть $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$, $\mathbf{h} = (\Delta x, \Delta y) \in$ $\in O_\delta(\mathbf{0})$. Используя представление

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \big[f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)\big] +$$
$$+ \big[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)\big], \tag{3}$$

применяя к первой квадратной скобке определение 4.1.1 дифференцируемой функции, а ко второй — теорему 4.4.6 Лагранжа (так как шар $O_\delta(\mathbf{a})$ — выпуклое множество), получим

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = f_x(\mathbf{a})\Delta x + o(\Delta x) + f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta(\mathbf{h})\Delta y)\Delta y, \quad (4)$$

где $0 < \theta(\mathbf{h}) < 1$ и $o(\Delta x) = o(\|\mathbf{h}\|)$ при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ в силу неравенства $|\Delta x| \leqslant \|\mathbf{h}\|$. Из неравенства $\|(\Delta x, \theta(\mathbf{h})\Delta y)\| \leqslant \|\mathbf{h}\|$ вытекает непрерывность функции

$$\mathbf{z}(\mathbf{h}) \coloneqq (x_0+\Delta x, y_0+\theta(\mathbf{h})\Delta y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

в точке $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Так как $\mathbf{z}(\mathbf{0}) = \mathbf{a}$, а функция f_y непрерывна в точке $\mathbf{a}$, то по теореме 1.8′ о непрерывности композиции непрерывных функций имеем

$$f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta(\mathbf{h})\Delta y) = f_y(\mathbf{a}) + \alpha(\mathbf{h}), \quad (5)$$

где $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \alpha(\mathbf{h}) = 0$. Используя (4), (5) и неравенство $|\Delta y| \leqslant \|\mathbf{h}\|$, окончательно получим

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = f_x(\mathbf{a})\Delta x + f_y(\mathbf{a})\Delta y + o(\|\mathbf{h}\|) + \underbrace{\alpha(\mathbf{h})\Delta y}_{o(\|\mathbf{h}\|)} =$$
$$= f_x(\mathbf{a})\Delta x + f_y(\mathbf{a})\Delta y + o(\|\mathbf{h}\|),$$

что и означает дифференцируемость функции f в точке $\mathbf{a}$ по определению 2 дифференцируемой функции.

В случае $n > 2$ доказательство проводится аналогично, при этом представление (3) имеет вид телескопической суммы

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n}\big[f(a_1+h_1,\ldots,\ a_i+h_i, a_{i+1},\ldots,a_n) -$$
$$- f(a_1+h_1,\ldots,\ a_{i-1}+h_{i-1}, a_i,\ldots,a_n)\big]. \qquad ◀$$

Теорема 4 (о линейности дифференциала). *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *и* $D(\mathbf{x}_0) \ni$ $\ni f, g\colon H \to N$. *Тогда* $\alpha f + \beta g \in D(\mathbf{x}_0)$ *и*

$$d(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}_0) = \alpha df(\mathbf{x}_0) + \beta dg(\mathbf{x}_0).$$

Доказательство. По определению 2 дифференцируемой функции найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $\mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{0})$ выполнено

$$(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}_0) =$$
$$= \alpha\big(f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\big) + \beta\big(g(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - g(\mathbf{x}_0)\big) \overset{\text{О. 2}}{=}$$
$$\overset{\text{О. 2}}{=} \alpha df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) + \beta dg(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) + \alpha o(\|\mathbf{h}\|) + \beta o(\|\mathbf{h}\|) =$$
$$= \big(\alpha df(\mathbf{x}_0) + \beta dg(\mathbf{x}_0)\big)(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|),$$

что и завершает доказательство теоремы по определению 2 дифференцируемой функции. ◀

Теорема 5 (о дифференцируемости композиции функций). *Пусть H, N, E — нормированные пространства, $\mathbf{x}_0 \in H$, $D(\mathbf{x}_0) \ni g\colon H \to N$, $\mathbf{g}_0 := g(\mathbf{x}_0)$ и $D(\mathbf{g}_0) \ni f\colon N \to E$. Тогда $f \circ g \in D(\mathbf{x}_0)$ и*

$$d(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = df\big(g(\mathbf{x}_0)\big) \circ dg(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{g}_0) \circ dg(\mathbf{x}_0).$$

При этом в случае $H := \mathbb{R}^n$, $N := \mathbb{R}^m$, $E := \mathbb{R}^k$ имеем

$$(f \circ g)'(\mathbf{x}_0) = f'\big(g(\mathbf{x}_0)\big)g'(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{g}_0)g'(\mathbf{x}_0).$$

Доказательство. По определению 2 дифференцируемой функции найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что для всех $\mathbf{z} \in O_{\delta_1}(\mathbf{0})$, $\mathbf{h} \in O_{\delta_2}(\mathbf{0})$ выполнено

$$f(\mathbf{g}_0 + \mathbf{z}) = f(\mathbf{g}_0) + \mathcal{A}(\mathbf{z}) + u(\mathbf{z}), \tag{6}$$

$$g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{g}_0 + \mathcal{B}(\mathbf{h}) + v(\mathbf{h}), \tag{7}$$

где $\mathcal{A} = df(\mathbf{g}_0)$, $\mathcal{B} = dg(\mathbf{x}_0)$, $\|u(\mathbf{z})\|_E \leqslant \alpha(\mathbf{z})\|\mathbf{z}\|_N$, $\|v(\mathbf{h})\|_N \leqslant \beta(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|_H$, функция α непрерывна в точке $\mathbf{0} \in N$ и $\alpha(\mathbf{0}) = 0 \in \mathbb{R}$, функция β непрерывна в точке $\mathbf{0} \in H$ и $\beta(\mathbf{0}) = 0 \in \mathbb{R}$. По утверждению 1 о непрерывности дифференцируемой функции функция g непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$, поэтому найдётся $\delta \in (0, \delta_2]$ такое, что $g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \in O_{\delta_1}(\mathbf{g}_0)$ и

$$f\big(g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})\big) \overset{(7)}{=} f\big(\mathbf{g}_0 + \mathcal{B}(\mathbf{h}) + v(\mathbf{h})\big) \overset{(6)}{=}$$
$$\overset{(6)}{=} f(\mathbf{g}_0) + \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\mathbf{h}) + v(\mathbf{h})\big) + u\big(\mathcal{B}(\mathbf{h}) + v(\mathbf{h})\big) = f(\mathbf{g}_0) + \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\mathbf{h})\big) + r(\mathbf{h})$$

для всех $\mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{0})$, при этом

$$\|r(\mathbf{h})\|_E = \|\mathcal{A}\big(v(\mathbf{h})\big) + u\big(\mathcal{B}(\mathbf{h}) + v(\mathbf{h})\big)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathcal{A}\big(v(\mathbf{h})\big)\|_E + \|u\big(\mathcal{B}(\mathbf{h}) + v(\mathbf{h})\big)\|_E \overset{\text{Л. } 2}{\leqslant}$$
$$\overset{\text{Л. } 2}{\leqslant} \|\mathcal{A}\|\|v(\mathbf{h})\|_N + \alpha\big(\mathcal{B}(\mathbf{h}) + v(\mathbf{h})\big)\|\mathcal{B}(\mathbf{h}) + v(\mathbf{h})\|_N \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathcal{A}\|\beta(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|_H + \gamma(\mathbf{h})(\|\mathcal{B}(\mathbf{h})\|_N + \beta(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|_H),$$

где функция $\gamma(\mathbf{h}) := \alpha\big(\mathcal{B}(\mathbf{h}) + v(\mathbf{h})\big)$ непрерывна в точке $\mathbf{0} \in H$ по теореме $1.8'$ о непрерывности композиции непрерывных функций, что вытекает из непрерывности ограниченного оператора $\mathcal{B}$ (см. лемму 4) и функции v в точке $\mathbf{0} \in H$, а также из непрерывности суммы непрерывных функций (см. теорему $1.6'$

о непрерывности линейной комбинации). Так как $\|\mathcal{B}(\mathbf{h})\|_N \overset{\text{Л. 2}}{\leqslant} \|\mathcal{B}\|\|\mathbf{h}\|_H$, имеем $\|r(\mathbf{h})\|_E \leqslant \delta(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|_H$, где функция

$$\delta(\mathbf{h}) \coloneqq \|\mathcal{A}\|\beta(\mathbf{h}) + \|\mathcal{B}\|\gamma(\mathbf{h}) + \beta(\mathbf{h})\gamma(\mathbf{h})$$

непрерывна в точке $\mathbf{0} \in H$ в силу арифметических свойств непрерывных функций (см. теоремы 1.6′, 1.7′) и $\delta(\mathbf{0}) = 0 \in \mathbb{R}$. По определению 1.2 о-малого это означает, что $r(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|_H)$ и теорема полностью доказана в силу леммы 3 и определения 2 дифференцируемой функции. ◀

Следствие 3 теоремы 5 о дифференцируемости композиции функций. *Пусть функция $g = (g_1, \ldots, g_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$, а функция $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $g(\mathbf{x}_0)$. Тогда функция $f\bigl(g(\mathbf{x})\bigr) = f\bigl(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\bigr)$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$ и*

$$\partial_k(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \partial_1 f\bigl(g(\mathbf{x}_0)\bigr)\partial_k g_1(\mathbf{x}_0) + \ldots + \partial_m f\bigl(g(\mathbf{x}_0)\bigr)\partial_k g_m(\mathbf{x}_0) = \\ = \sum_{i=1}^{m} \partial_i f\bigl(g(\mathbf{x}_0)\bigr)\partial_k g_i(\mathbf{x}_0)$$

для всех $k \in \overline{1, n}$.

Действительно,

$$(f \circ g)'(\mathbf{x}_0) \overset{\text{Т. 5}}{=} f'\bigl(g(\mathbf{x}_0)\bigr)g'(\mathbf{x}_0) \overset{\text{Т. 2, С. 2}}{=} \\ \overset{\text{Т. 2, С. 2}}{=} [\partial_1 f, \ldots, \partial_m f]\bigl(g(\mathbf{x}_0)\bigr) \begin{bmatrix} \partial_1 g_1, \ldots, & \partial_n g_1 \\ \vdots & \\ \partial_1 g_m, \ldots, & \partial_n g_m \end{bmatrix} (\mathbf{x}_0) \overset{\text{Т. 2}}{=} \\ \overset{\text{Т. 2}}{=} [\partial_1(f \circ g), \ldots, \partial_n(f \circ g)](\mathbf{x}_0).$$

Применяя к последнему равенству определение произведения матриц, получим требуемое утверждение. ◀

Следствие 4 теоремы 5 о дифференцируемости композиции функций. *Инвариантность формы первого дифференциала.*

Пусть H, N, E — *нормированные пространства*. Фиксируем некоторый *символ* $\mathbf{x}$, который будем называть *свободной переменной*, и соответствующий ему символ $\mathbf{dx}$. Для любой функции φ введём *формальное обозначение*

$$d\varphi(\mathbf{x}) \coloneqq d\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{dx}). \tag{8}$$

Если $x \in H$ и $D(\mathbf{x}) \ni \varphi\colon H \to E$, то правая часть (8) определена для любого $\mathbf{dx} \in H$, который обычно называют *дифференциалом независимой переменной*.

Далее если $\mathbf{x}, \mathbf{dx} \in H$, $D(\mathbf{x}) \ni g\colon H \to N$, $D\big(g(\mathbf{x})\big) \ni f\colon N \to E$ и $u := f \circ g$, то получим формулу

$$du(\mathbf{x}) = d(f \circ g)(\mathbf{x}) \overset{(8)}{=} d(f \circ g)(\mathbf{x}, \mathbf{dx}) \overset{\text{Т. }5}{=} df\big(g(\mathbf{x}), dg(\mathbf{x}, \mathbf{dx})\big). \tag{9}$$

При этих же условиях, используя формальную подстановку $u(\mathbf{x}) = f\big(g(\mathbf{x})\big)$, а затем формально применяя подстановку (8), в которой символ независимой переменной $\mathbf{x}$ заменён на $g(\mathbf{x})$, получим

$$du(\mathbf{x}) = df\big(g(\mathbf{x})\big) = df\big(g(\mathbf{x}), dg(\mathbf{x})\big) \overset{(8)}{=} df\big(g(\mathbf{x}), dg(\mathbf{x}, \mathbf{dx})\big),$$

что снова приводит к формуле (9). Рассмотренное формальное правило подстановки и называется ***инвариантностью формы первого дифференциала***. ◀

Теорема 6. *Пусть функции $f, g\colon H \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $\mathbf{x}_0$. Тогда функции fg, $\dfrac{f}{g}$ (в случае если $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$) дифференцируемы в точке $\mathbf{x}_0$, причём верны равенства:*

$$d(fg)(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)dg(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0)df(\mathbf{x}_0), \tag{10}$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{g^2(\mathbf{x}_0)}\big(g(\mathbf{x}_0)df(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)dg(\mathbf{x}_0)\big). \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $v := (f, g)\colon H \to \mathbb{R}^2$. По лемме 5 о покомпонентной дифференцируемости имеем $dv(\mathbf{x}_0) = \big(df(\mathbf{x}_0), dg(\mathbf{x}_0)\big)$. Функция $u(x, y) := xy\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $\mathbb{R}^2$, причём $u'(x, y) = [y, x]$ по теореме 2. Тогда по теореме 5 о дифференцируемости композиции функций для любого $\mathbf{h} \in H$ имеем

$$d(fg)(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = d(u \circ v)(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = du\big(v(\mathbf{x}_0), dv(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})\big) = u'\big(v(\mathbf{x}_0)\big)dv(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) =$$
$$= [g(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_0)] \begin{bmatrix} df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) \\ dg(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) \end{bmatrix} = g(\mathbf{x}_0)df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) + f(\mathbf{x}_0)dg(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

что и означает выполнение равенства (10).

Если $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то функция $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ дифференцируема в точке $g(\mathbf{x}_0)$ по теореме 4.1.2 о производных простейших элементарных функций, а следовательно, функция $\dfrac{1}{g}$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$ по теореме 5 о дифференцируемости композиции функций, причём

$$d\left(\frac{1}{g}\right)(\mathbf{x}_0) = d\left(\frac{1}{t} \circ g\right)(\mathbf{x}_0) \overset{\text{Т. 5 и 4.1.2}}{=} -\frac{1}{g^2(\mathbf{x}_0)}dg(\mathbf{x}_0),$$

поэтому

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}_0) = d\left(f\frac{1}{g}\right)(\mathbf{x}_0) \overset{(10)}{=} f(\mathbf{x}_0)\left(-\frac{1}{g^2(\mathbf{x}_0)}dg(\mathbf{x}_0)\right) + \frac{1}{g(\mathbf{x}_0)}df(\mathbf{x}_0) =$$
$$= \frac{1}{g^2(\mathbf{x}_0)}\big(g(\mathbf{x}_0)df(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)dg(\mathbf{x}_0)\big),$$

и равенство (11) установлено. ◀

Замечание 5. Теорема 4 о линейности дифференциала также может быть получена как следствие теоремы 5 о дифференцируемости композиции функций. Для её доказательства достаточно (как и при доказательстве теоремы 6) рассмотреть функции $u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \colon N \times N \to N$ и $v := (f, g) \colon H \to N \times N$, а затем продифференцировать их композицию $u \circ v$.

Определение 6 (производной по вектору). Пусть $\mathbf{x}_0, \mathbf{h} \in H$, $f \colon H \to N$, $\delta > 0$ и $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} \in \mathrm{Dom}(f)$ при всех $t \in (-\delta, \delta)$. Элемент

$$N \ni D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

называется (в случае существования предела) ***производной функции** f **по вектору*** $\mathbf{h}$ ***в точке*** $\mathbf{x}_0$.

Определение 7 (направления). Любой *единичный* (по норме) вектор $\mathbf{e} \in H$ называется ***направлением***.

Замечание 6. Из определения 5 частной производной вытекает, что при $k \in \overline{1, n}$ частная производная функции $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по k-й компоненте есть не что иное, как производная этой функции по *базисному направлению* $\mathbf{e}_k$, то есть $\partial_k f(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{e}_k} f(\mathbf{x}_0)$.

Теорема 7 (о производной по вектору). *Пусть функция* $f \colon H \to N$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}_0$. *Тогда для любого вектора* $\mathbf{h} \in H$ *существует* $D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$. *В случае* $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *имеем* $D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = \langle \mathrm{grad}^{\mathrm{T}} f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h} \rangle$.

Доказательство. Так как

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) \overset{\text{О. } 2}{=} df(\mathbf{x}_0, t\mathbf{h}) + o(\|t\mathbf{h}\|) \overset{\text{О. } 1.2 \text{ и Т. } 1.8'}{=} t\,df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) + o(t)$$

при $t \to 0$, то

$$D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0) \overset{\text{О. } 6}{=} \lim_{t \to 0}\big(df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) + o(1)\big) = df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}).$$ ◀

Теорема 8 (о свойстве градиента). *Пусть функция* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}_0$. *Если* $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, *то*

$$\max_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n, \|\mathbf{h}\|=1} D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{h}_0} f(\mathbf{x}_0) = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\|,$$
$$\min_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n, \|\mathbf{h}\|=1} D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0) = D_{-\mathbf{h}_0} f(\mathbf{x}_0) = -\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\|,$$

где

$$\mathbf{h}_0 := \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\|} \operatorname{grad}^{\mathrm{T}} f(\mathbf{x}_0).$$

Если $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, *то* $D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0) = 0$ *для всех* $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $\|\mathbf{h}\| = 1$, тогда в силу неравенства 4.7.4 Коши–Буняковского

$$|D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0)| \overset{\text{T. 7}}{=} |\langle \operatorname{grad}^{\mathrm{T}} f(\mathbf{x}_0), \mathbf{h}\rangle| \leqslant \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\| \|\mathbf{h}\| = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\|,$$

причём “=” $\iff$ $\mathbf{h} \parallel \operatorname{grad}^{\mathrm{T}} f(\mathbf{x}_0)$ $\iff$ $\mathbf{h} = \pm\mathbf{h}_0$ в случае $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$. Случай $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ тривиален. ◀

Замечание 7. Из теоремы 8 о свойстве градиента не вытекает, что при удалении от точки $\mathbf{x}_0$ на некоторое фиксированное расстояние $\delta > 0$ мы получим максимальное приращение функции f, двигаясь вдоль направления $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$. Например, для функции $f(x, y) = x + y\sqrt{x^2 + y^2}$ это неверно при $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ и всех $\delta > 0$. Однако можно показать (и это общий факт), что направления, максимизирующие приращения функции f на окружности радиуса δ, будут *стремиться к направлению* $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$ при $\delta \to 0+$.

Определение 8 (касательной плоскости). Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и $z_0 := f(x_0, y_0)$. Тогда плоскость

$$\pi : z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = f'(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

называется ***касательной плоскостью*** к графику функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Замечание 8. Наряду с определением 8 касательной плоскости можно дать другое, геометрическое определение касательной плоскости (см. [12, с. 473]) по аналогии с определением 4.2.1′ касательной прямой как предельного положения секущих. Используя соответствующее определение, можно доказать (см. [26, с. 384]) утверждение, аналогичное теореме 4.2.1.

9.2.3. Дифференциалы и частные производные высших порядков

Замечание 9 (об операторе частного дифференцирования). Рассмотрим $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \coloneqq \{f\colon \mathbb{R}^n \supset \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}\}$ — ***множество всех функций, действующих из*** $\mathbb{R}^n$ ***в*** $\mathbb{R}$ (*с различными областями определения*). Рассмотрим $\widehat{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}^n} \coloneqq \{f : \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \to \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\}$ — ***множество всех функций***, *определённых на всём* $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ и ***переводящих функции из*** $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ ***в функции из*** $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$. Заметим, что для всех $k \in \overline{1,n}$ определение 5 частной производной дает нам ***функцию*** $\partial_k \in \widehat{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}^n} : \partial_k(f) \coloneqq \partial_k f$ (корректнее эту функцию было бы назвать $(n)\partial_k$, но всюду далее мы будем считать n фиксированным и опускать (n), также вместо $\partial_k(f)$ будем чаще всего писать просто $\partial_k f$). Для всех $u, v \in \widehat{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ определим функции $u + v \in \widehat{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}^n}$ и $\alpha u \in \widehat{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}^n}$, действующие на любую функцию $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ по формулам $(u+v)(f) \coloneqq u(f) + v(f)$ $\big(\mathrm{Dom}((u+v)(f)) \coloneqq$ $\coloneqq \mathrm{Dom}(u(f)) \cap \mathrm{Dom}(v(f))\big)$ и $(\alpha u)(f) \coloneqq \alpha u(f)$, а также функцию $uv \coloneqq u \circ v$. В частности, для любых $k, p \in \overline{1,n}$ имеем $\partial_k\partial_p f \coloneqq (\partial_k \circ \partial_p)(f)$.

Фиксировав $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрев множество $S \coloneqq \{f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} : \mathbf{x}_0 \in \mathrm{Dom}(\partial_k f)\}$, из определения 5 частной производной и линейности предела получим, что S является *линейным пространством*, а функция $\partial_k(\cdot)(\mathbf{x}_0)\colon S \to \mathbb{R}$ — *линейный оператор*.

Определение 9 (частной производной порядка k). Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$. ***Частной производной порядка k*** (или ***k-й частной производной***) функции f будем называть функцию

$$\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f = \partial_{i_1 \ldots i_k} f = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_k} \ldots x_{i_1}} \coloneqq (\partial_{i_1} \circ \ldots \circ \partial_{i_k})(f)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

где $i_p \in \overline{1,n}$ для всех $p \in \overline{1,k}$. При этом, если не все $i_1, \ldots i_k$ равны между собой, такую частную производную будем называть ***смешанной***. Под частной производной порядка 0 функции f будем понимать саму функцию f.

Замечание 10. В случае, когда определено значение $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f(\mathbf{x}_0) \overset{\text{О. }9}{=}$ $\overset{\text{О. }9}{=} \partial_{i_1}(\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_k} f)(\mathbf{x}_0)$, функция $\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_k} f$ обязана быть определена на некотором *множестве*, обеспечивающем существование предела в определении 5 частной производной, а не только в самой точке $\mathbf{x}_0$.

Далее приведём пример функции, у которой *значение смешанной частной производной зависит от порядка дифференцирования*.

Пример 1. Для функции

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{при } (x,y) \neq \mathbf{0}, \\ 0 & \text{при } (x,y) = \mathbf{0} \end{cases}$$

имеем существование $\partial_1\partial_2 f(\mathbf{0}) = 1 \neq -1 = \partial_2\partial_1 f(\mathbf{0})$.

Определение 10 (классов $C^k(\Omega,\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$). Пусть $\mathbb{R}^n \supset \Omega$ — *открытое множество* и $k \in \mathbb{N}_0$. Класс всех функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что все частные производные функции f до порядка k включительно существуют и непрерывны на множестве Ω (что равносильно их принадлежности классу $C(\Omega)$ в силу открытости Ω), обозначим $C^k(\Omega,\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ или просто $C^k(\Omega)$ в тех случаях, когда сокращённое обозначение не вызывает путаницы. Также по определению положим $C^\infty(\Omega) := \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$ и отметим, что $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Функции из классов C^k при $k \geqslant 1$ принято называть ***гладкими*** (порядка k), а функции из класса $C^\infty(\Omega)$ — ***бесконечно гладкими***.

Определение 11 (классов $C^k(\Omega,\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$). Пусть $\mathbb{R}^n \supset \Omega$ — *открытое множество* и $k \in \mathbb{N}_0$. Класс всех функций $f = (f_1,\ldots,f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ таких, что $f_i \in C^k(\Omega,\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ при всех $i \in \overline{1,m}$, обозначим $C^k(\Omega,\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ или просто $C^k(\Omega)$ в тех случаях, когда сокращённое обозначение не вызывает путаницы.

Замечание 11. Пусть $\mathbb{R}^n \supset \Omega$ — *открытое множество*, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$. Из непрерывности всех частных производных функции f порядка k на множестве Ω по теореме 3 о достаточном условии дифференцируемости имеем дифференцируемость (и подавно — непрерывность) всех частных производных функции f порядка $k-1$, а следовательно, и до порядка $k-1$ включительно (по индукции) на Ω, поэтому в определении 10 классов $C^k(\Omega,\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ достаточно потребовать лишь существование и непрерывность всех частных производных функции f *порядка* k (что полностью соответствует данному ранее определению 4.3.4 классов C^k в случае $n = 1$). Параллельно для всех $k,m \in \mathbb{N}$ мы также установили вложения $C^k(\Omega,\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \subset C^{k-1}(\Omega,\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ и $C^1(\Omega,\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \subset D(\Omega,\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ в силу леммы 5 о покомпонентной дифференцируемости.

Замечание 12. Определение 4.1.3 производной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дословно переносится на случай $f\colon \mathbb{R} \to N$, где N — произвольное нормированное пространство. Точно так же определения 5 и 9 частных производных любых порядков дословно переносятся на случай $f\colon \mathbb{R}^n \to N$, что по сути и было сделано в определении 6 производной по вектору. Далее на функции $f\colon \mathbb{R}^n \to N$ обобщается определение 4 производной, при этом имеет место равенство $f'(\mathbf{x}_0) =$

$= [\partial_1 f(\mathbf{x}_0), \ldots, \partial_n f(\mathbf{x}_0)] \in \mathbb{N}^{1\times n}$, которое устанавливается по полной аналогии с доказательством теоремы 2. Таким образом, из леммы 1.3 о пределах компонент непосредственно следует, что для функции $f = (f_1, \ldots, f_m) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ выполнены равенства $\partial_i f(\mathbf{x}) = \big(\partial_i f_1(\mathbf{x}), \ldots, \partial_i f_m(\mathbf{x})\big) \in \mathbb{R}^m$ для всех $i \in \overline{1,n}$. В силу леммы 1.3′ о покомпонентной непрерывности это означает, что определение 11 является равносильным обобщённому на функции $f \colon \mathbb{R}^n \to N$ определению 10 в частном случае $N = \mathbb{R}^m$.

Лемма 7. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$ *и* $f, g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. *Тогда:*
(а) $f + g \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$;
(б) $fg \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Доказательство. При $k = 0$ лемма верна в силу непрерывности суммы и произведения непрерывных функций (см. теоремы 1.6′ и 1.7′). Пусть $k \in \mathbb{N}$ и лемма верна для $k - 1$. Для любого $i \in \overline{1,n}$ по теореме 4.1.4 об арифметических операциях над дифференцируемыми функциями имеем равенства

$$\partial_i(f+g)(\mathbf{x}) = \partial_i f(\mathbf{x}) + \partial_i g(\mathbf{x}),$$

$$\partial_i(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\partial_i g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\partial_i f(\mathbf{x})$$

для всех $\mathbf{x} \in \operatorname{Dom}(\partial_i f) \cap \operatorname{Dom}(\partial_i g)$, то есть всюду, где правые части этих равенств определены. По определению 10 классов $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ имеем $\partial_i f, \partial_i g \in C^{k-1}(\Omega)$, а также $f, g \in C^{k-1}(\Omega)$ согласно замечанию 11. По предположению индукции имеем $\partial_i(f+g) \in C^{k-1}(\Omega)$, а также $f\partial_i g$, $g\partial_i f \in C^{k-1}(\Omega)$ и $\partial_i(fg) \in C^{k-1}(\Omega)$. По определению 10 классов $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ это означает, что $f + g \in C^k(\Omega)$ и $fg \in C^k(\Omega)$. ◀

Теорема 9 (о композициях функций класса C^{k}). *Пусть* $k \in \mathbb{N}_0$, $g = (g_1, \ldots, g_m) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g \in C^k(\Omega)$, $g(\Omega) \subset \Omega'$, $f = (f_1, \ldots, f_l) \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $f \in C^k(\Omega')$. *Тогда* $C^k(\Omega) \ni f \circ g = (f_1 \circ g, \ldots, f_l \circ g) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$.

Доказательство. При $k = 0$ теорема верна как следствие теоремы 1.8′ о непрерывности композиции непрерывных функций. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и теорема верна для $k - 1$. В силу замечания 11 имеем $g \in C^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega) \cap C^1(\Omega) \subset D(\Omega)$ и $f_j \in C^k(\Omega') \subset C^1(\Omega') \subset D(\Omega')$ при всех $j \in \overline{1,l}$, а следовательно, $f_j \circ g \in D(\Omega)$ по теореме 5 о дифференцируемости композиции функций. Тогда для всех $\mathbf{x} \in \Omega$ в силу следствия 3 имеем

$$\partial_i(f_j \circ g)(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^{m} \partial_p f_j\big(g(\mathbf{x})\big)\partial_i g_p(\mathbf{x}) \tag{12}$$

при всех $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,l}$. По определению 11 классов $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ имеем $\partial_p f_j \in C^{k-1}(\Omega')$, $\partial_i g_p \in C^{k-1}(\Omega)$ при всех $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,l}$, $p \in \overline{1,m}$.

Используя равенство (12), лемму 7 и предположение индукции, получим $\partial_i(f_j \circ g) \in C^{k-1}(\Omega)$ при всех $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,l}$, отсюда по определению 11 классов $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ получаем $f \circ g \in C^k(\Omega)$. ◀

Лемма 8. *Пусть H, N, E — нормированные пространства, $f\colon H \to N$, $\mathcal{A} \in \in \mathcal{L}(N, E)$, $\mathbf{h} \in H$ и существует $D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0)$. Тогда существует $D_{\mathbf{h}}(\mathcal{A} \circ f)(\mathbf{x}_0) = = (\mathcal{A} \circ D_{\mathbf{h}} f)(\mathbf{x}_0)$.*

Доказательство.

$$D_{\mathbf{h}}(\mathcal{A} \circ f)(\mathbf{x}_0) := \lim_{t\to 0} \frac{(\mathcal{A} \circ f)(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - (\mathcal{A} \circ f)(\mathbf{x}_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \mathcal{A}\left(\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}\right) \overset{\text{л. 4}}{=} \mathcal{A}\left(\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}\right) = \mathcal{A}\big(D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0)\big).$$

◀

Замечание 13 (об операторе дифференцирования). Обозначим через $\mathcal{F}$ ***множество всех функций, действующих между всевозможными вещественными нормированными пространствами*** *(с различными областями определения)*. Учитывая, что $\mathcal{L}(H, N)$ само является *вещественным нормированным пространством с операторной нормой* (см. определение 1), определение 2 дает нам ***функцию*** $d\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, *определённую на всём* $\mathcal{F}$ и переводящую любую функцию $\mathcal{F} \ni f\colon H \to N$ в функцию $\mathcal{F} \ni df\colon H \to N_1 := \mathcal{L}(H, N)$. Отметим, что под функцией $f \in \mathcal{F}$ следует понимать не саму f, а тройку (f, H, N).

Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любых функций $\mathcal{F} \ni f, g\colon H \to N$ определена функция $\alpha f\colon \mathrm{Dom}(f) \to N$, действующая по формуле $(\alpha f)(\mathbf{x}) := \alpha f(\mathbf{x})$, и функция $f + g\colon \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \to N$, действующая по формуле $(f + g)(\mathbf{x}) := := f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$. Для любого $\mathbf{x}_0 \in H$ из теоремы 4 о линейности дифференциала мы получим, что множество $D(\mathbf{x}_0) = D(\{\mathbf{x}_0\}, H, N)$ всех дифференцируемых в точке $\mathbf{x}_0$ функций $f\colon H \to N$ является *линейным пространством* относительно введённых выше операций, а функция

$$d(\cdot)(\mathbf{x}_0)\colon D(\mathbf{x}_0) \to \mathcal{L}(H, N)$$

является *линейным оператором*.

Пусть $f\colon H \to N$ и $f \in D\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда определена ***функция*** $df\colon O_\delta(\mathbf{x}_0) \to N_1 = \mathcal{L}(H, N)$. Учитывая замечание 13, дадим следующее определение.

Определение 12. Функция $f\colon H \to N$ называется ***дважды дифференцируемой в точке*** $\mathbf{x}_0$, если существует $d(df)(\mathbf{x}_0)$. Тогда элемент

$$d(df)(\mathbf{x}_0) =: d^2 f(\mathbf{x}_0) \in N_2 := \mathcal{L}\big(H, \mathcal{L}(H, N)\big)$$

называется ***вторым дифференциалом*** функции f в точке $\mathbf{x}_0$.

Утверждение 3 (о втором дифференциале). *Пусть функция* $f\colon H \to N$ *дважды дифференцируема в точке* $\mathbf{x}_0$. *Тогда для всех* $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in H$ *выполнено равенство*

$$d^2 f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 := \Big(\big(d^2 f(\mathbf{x}_0)\big)(\mathbf{h}_1)\Big)(\mathbf{h}_2) = D_{\mathbf{h}_1}(D_{\mathbf{h}_2} f)(\mathbf{x}_0).$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{h}_1 \in H$ имеем

$$d^2 f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1 \overset{\text{О. } 12}{=} d(df)(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1 \overset{\text{Т. } 7}{=} D_{\mathbf{h}_1}(df)(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(H, N). \tag{13}$$

Далее для произвольного $\mathbf{h}_2 \in H$ рассмотрим *линейный оператор* $\mathcal{A}\colon \mathcal{L}(H,N) \to \to N$, определённый равенством $\mathcal{A}(\mathcal{B}) := \mathcal{B}\mathbf{h}_2$ для всех $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(H,N)$. Если $\|\mathcal{B}\| = 1$, то

$$\|\mathcal{A}(\mathcal{B})\| = \|\mathcal{B}\mathbf{h}_2\| \overset{\text{Л. } 2}{\leqslant} \|\mathcal{B}\|\|\mathbf{h}_2\| = \|\mathbf{h}_2\|,$$

отсюда по определению 1 получаем $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(H,N), N)$ и $\|\mathcal{A}\| \leqslant \|\mathbf{h}_2\|$. Таким образом, имеем равенство

$$d^2 f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 \overset{(13)}{=} D_{\mathbf{h}_1}(df)(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_2 = (\mathcal{A} \circ D_{\mathbf{h}_1} df)(\mathbf{x}_0) \overset{\text{Л. } 8}{=}$$
$$\overset{\text{Л. } 8}{=} D_{\mathbf{h}_1}(\mathcal{A} \circ df)(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{h}_1}(df(\cdot)\mathbf{h}_2)(\mathbf{x}_0) \overset{\text{Т. } 7}{=} D_{\mathbf{h}_1}(D_{\mathbf{h}_2} f)(\mathbf{x}_0),$$

верное для всех $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2 \in H$. ◀

По аналогии с тем, как был определён *второй дифференциал*, используя замечание 13, дадим следующее основное определение.

Определение 13 (k-кратной дифференцируемости). ***Дифференциалом порядка k*** $\in \mathbb{N}$ (или просто ***k-м дифференциалом***) функции $f\colon H \to N$ называется функция

$$d^k f := \underbrace{(d \circ \ldots \circ d)}_{k \text{ раз}}(f)\colon H \to N_k := \underbrace{\mathcal{L}(H, \ldots \mathcal{L}(H,}_{k \text{ раз}} N\underbrace{) \ldots)}_{k \text{ штук}}.$$

Функция f называется **k *раз дифференцируемой в точке*** $\mathbf{x}_0$, если $\mathbf{x}_0 \in \in \mathrm{Dom}(d^k f)$. Также определим $d^0 f := f$ и заметим, что $d^1 f = df$.

Определение 14 (k-кратной дифференцируемости на множестве). Пусть $k \in \mathbb{N}_0$. Функция $f\colon H \to N$ называется ***k раз дифференцируемой на множестве*** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если она k раз дифференцируема в каждой точке множества Ω. Класс всех таких функций $f\colon H \to N$ обозначим $D^k(\Omega, H, N)$ или просто $D^k(\Omega)$ в тех случаях, когда сокращённое обозначение не вызывает путаницы. При этом в случае $\Omega = \mathrm{Dom}(f)$ функцию f называют ***k раз дифференцируемой***. Для одноточечного множества $\Omega = \{\mathbf{x}_0\}$ вместо $D^k(\{\mathbf{x}_0\})$ будем использовать обозначение $D^k(\mathbf{x}_0)$.

Замечание 14. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Для k раз дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_0$ функции $f\colon H \to N$ в силу равенства $d^k f = d(d^{k-1} f)$ и определения 2 дифференцируемой функции получим $f \in D^{k-1}\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$ для некоторого $\delta > 0$ и $d^{k-1} f \in D(\mathbf{x}_0)$. Отметим, что при всех $k \in \mathbb{N}$ пространство $N_k = \mathcal{L}(H, N_{k-1})$ является *вещественным нормированным пространством с операторной нормой* (см. определение 1), также по определению $N_0 := N$.

Замечание 15 (об операторе дифференцирования порядка k). Для любого $\mathbf{x}_0 \in H$ из замечания 13 и определения 13 k-кратной дифференцируемости по индукции получим, что множество $D^k(\mathbf{x}_0)$ всех k раз дифференцируемых в точке $\mathbf{x}_0$ функций $f\colon H \to N$ является *линейным пространством*, а функция $d^k(\cdot)(\mathbf{x}_0)\colon D^k(\mathbf{x}_0) \to N_k$ — *линейный оператор*. Используя утверждение 0.5.1 об ассоциативности композиции функций, также получим $d^k f = d^p(d^{k-p} f)$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in \overline{0, k}$.

Обобщением утверждения 3 о втором дифференциале является следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $D^k(\mathbf{x}_0) \ni f\colon H \to N$, тогда*

$$d^k f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_k = d^k f(\mathbf{x}_0)[\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_k] = D_{\mathbf{h}_1} \ldots D_{\mathbf{h}_k} f(\mathbf{x}_0)$$

для всех $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_k \in H$.

Доказательство проводится по индукции. При $k = 1$ теорема верна, так как превращается в теорему 7 о производной по вектору. Пусть $k \geqslant 2$ и теорема верна для $k - 1$. Фиксируем произвольные $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_k \in H$ и рассмотрим *линейный оператор* $\mathcal{A}\colon N_{k-1} \to N$, определённый равенством $\mathcal{A}(\mathcal{B}) := \mathcal{B}\mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_k$ для всех $\mathcal{B} \in N_{k-1}$. Применяя $k - 1$ раз лемму 2, получим $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(N_{k-1}, N)$ и $\|\mathcal{A}\| \leqslant \|\mathbf{h}_2\| \cdot \ldots \cdot \|\mathbf{h}_k\|$. Таким образом, имеем равенство

$$d^k f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_k \overset{\text{О. }13}{=} (d(d^{k-1} f)(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1)\mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_k \overset{\text{Т. }7}{=}$$
$$\overset{\text{Т. }7}{=} D_{\mathbf{h}_1}(d^{k-1} f)(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_k = (\mathcal{A} \circ D_{\mathbf{h}_1} d^{k-1} f)(\mathbf{x}_0) \overset{\text{Л. }8}{=}$$
$$\overset{\text{Л. }8}{=} D_{\mathbf{h}_1}(\mathcal{A} \circ d^{k-1} f)(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{h}_1}(d^{k-1} f(\cdot)\mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_k)(\mathbf{x}_0) \overset{\text{инд}}{=}$$
$$\overset{\text{инд}}{=} D_{\mathbf{h}_1}(D_{\mathbf{h}_2} \ldots D_{\mathbf{h}_k} f)(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{h}_1} \ldots D_{\mathbf{h}_k} f(\mathbf{x}_0),$$

верное для всех $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_k \in H$. ◀

Замечание 16. Из замечания 14 вытекает, что при выполнении условий теоремы 10 при $k \geqslant 2$ по ходу её доказательства устанавливается существование функции $D_{\mathbf{h}_2} \ldots D_{\mathbf{h}_k} f(\mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$, однако функция

$$D_{\mathbf{h}_1} \ldots D_{\mathbf{h}_k} f(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{h}_1}(D_{\mathbf{h}_2} \ldots D_{\mathbf{h}_k} f)(\mathbf{x}),$$

вообще говоря, определена *лишь при* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

Замечание 17. Пусть $D^k(\mathbf{x}_0) \ni f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 7 о производной по вектору, замечания 9 и теоремы 10 по индукции для всех $\mathbf{h}_1, \ldots \mathbf{h}_k \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$d^k f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_k = \Big(\prod_{p=1}^{k}(h_p^1\partial_1 + \ldots + h_p^n\partial_n)\Big) f(\mathbf{x}_0) =$$

$$= \Big(\sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} h_1^{i_1} \ldots h_k^{i_k} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k}\Big) f(\mathbf{x}_0).$$

В случае, когда $\mathbf{h}_1 = \ldots = \mathbf{h}_k = \mathbf{h} = (h^1, \ldots, h^n)$, имеем

$$d^k f(\mathbf{x}_0) \underbrace{\mathbf{h} \ldots \mathbf{h}}_{k \text{ раз}} = d^k f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) \coloneqq (h^1\partial_1 + \ldots + h^n\partial_n)^k f(\mathbf{x}_0) =$$

$$= \Big(\sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} h^{i_1} \ldots h^{i_k} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k}\Big) f(\mathbf{x}_0),$$

также положим $d^0 f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) \coloneqq f(\mathbf{x}_0)$. В литературе вектор $\mathbf{h}$ часто обозначают символом dx, а функцию $d^k f(\mathbf{x}_0, dx)$ называют просто k-м дифференциалом функции f в точке $\mathbf{x}_0$. В случае $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ согласно данному определению имеем $d^k f(x_0, dx) = f^k(x_0)dx^k$.

Отметим, что всё сказанное выше верно также для функций $D^k(\mathbf{x}_0) \ni f$: $\mathbb{R}^n \to N$, где N — произвольное нормированное пространство (см. замечание 12).

Для функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дадим следующее индуктивное определение.

Определение 13′ (k-кратной дифференцируемости). Функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \to \mathbb{R}$ называется ***0 раз дифференцируемой в точке*** $\mathbf{x}_0$, если $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. При $k \in \mathbb{N}$ функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется ***k раз дифференцируемой в точке*** $\mathbf{x}_0$, если она $k-1$ раз дифференцируема в некотором шаре $O_\delta(\mathbf{x}_0)$ и все частные производные функции f порядка $k-1$ дифференцируемы в точке $\mathbf{x}_0$.

Теорема 11. *В случае $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определения 13 и 13′ k–кратной дифференцируемости эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $k = 2$. Если функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$ по одному из определений 13, 13′, то для всех $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$ определён $df(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Как известно из курса алгебры, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \overset{\mathrm{Lin}}{\cong} \mathbb{R}^n$ (то есть $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^n$ изоморфны как линейные пространства или изоморфны *в категории* Lin *линейных пространств*), причём функция $\varphi(\mathcal{B}) \coloneqq$

$:=\big(\mathcal{B}(\mathbf{e}_1),\dots,\mathcal{B}(\mathbf{e}_n)\big)$, где $\mathcal{B}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ — естественный базис в $\mathbb{R}^n$, дает этот изоморфизм. Для всех $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ определим норму следующим образом: $\|\mathbf{x}\|:=\|\varphi^{-1}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$. Тогда $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\overset{\mathrm{Norm}}{\cong}(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ (то есть пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^n$ с так определённой нормой *изометрически изоморфны* или изоморфны *в категории* Norm *нормированных пространств*), причём функция φ дает этот изоморфизм. По определению проверяется равносильность дифференцируемости функции df в точке $\mathbf{x}_0$ дифференцируемости функции $\varphi\circ df$, принимающей значения в пространстве $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$, в точке $\mathbf{x}_0$. Но в $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны (см. теорему 1.14), поэтому (см. замечание 2) дифференцируемость функции $\varphi\circ df$ в пространстве $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ равносильна её дифференцируемости в пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой, что, в свою очередь, равносильно дифференцируемости всех функций $\partial_1 f,\dots,\partial_n f$ в точке $\mathbf{x}_0$ в силу равенства $\varphi\big(df(\mathbf{x})\big)=\operatorname{grad} f(\mathbf{x})=\big(\partial_1 f(\mathbf{x}),\dots,\partial_n f(\mathbf{x})\big)$ и леммы 5 о покомпонентной дифференцируемости.

В общем случае доказательство проводится по индукции: при $k=0,1$ теорема, очевидно, верна. Пусть для некоторого $k\in\mathbb{N}$ теорема уже доказана. Если функция $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ является $k+1$ раз дифференцируемой в $\mathbf{x}_0$ по одному из определений 13, 13′, то для всех $\mathbf{x}\in O_\delta(\mathbf{x}_0)$ определён $d^kf(\mathbf{x})\in$ $\in N_k:=\underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\dots,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n}_{k\text{ раз}},\mathbb{R}\underbrace{)\dots)}_{k\text{ штук}}$. Для всех $\mathcal{B}\in N_k$ определим *линейный изоморфизм* $\varphi_k\colon N_k\overset{\mathrm{Lin}}{\cong}\mathbb{R}^{n^k}$ формулой $\varphi_k(\mathcal{B}):=\mathbf{a}\in\mathbb{R}^{n^k}$, где компоненты вектора $\mathbf{a}$ задаются равенством $a^{(i_1-1)n^{k-1}+\ldots+(i_{k-1}-1)n+i_k}:=\mathcal{B}\mathbf{e}_{i_1}\dots\mathbf{e}_{i_k}$ для всех $i_1,\dots,i_k\in\overline{1,n}$. По определению проверяется, что φ_k — линейный оператор. Его инъективность следует из того, что если значения операторов $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2\in N_k$ совпадают на всех наборах базисных векторов, то $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}_2$. Сюръективность операторов φ_k проверяется по индукции. Пусть оператор φ_{k-1} сюръективен. Требуется показать, что для любого $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^{n^k}$ найдётся элемент $\mathcal{B}_\mathbf{a}\in N_k$ такой, что $\varphi_k(\mathcal{B}_\mathbf{a})=\mathbf{a}$. Запишем вектор $\mathbf{a}$ в виде $\mathbf{a}=(\widetilde{\mathbf{a}}_1,\dots,\widetilde{\mathbf{a}}_n)$, где $\widetilde{\mathbf{a}}_j\in\mathbb{R}^{n^{k-1}}$ при $j\in\overline{1,n}$. Определим оператор $\mathcal{B}_\mathbf{a}$ на базисных векторах (а значит, и на всём $\mathbb{R}^n$) формулой $\mathcal{B}_\mathbf{a}(\mathbf{e}_j):=\widetilde{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathbf{a}}_j}$ при $j\in\overline{1,n}$, где операторы $\widetilde{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathbf{a}}_j}\in N_{k-1}$ удовлетворяют условию $\varphi_{k-1}(\widetilde{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathbf{a}}_j})=\widetilde{\mathbf{a}}_j$ и существуют по предположению индукции. Тогда

$$\varphi_k(\mathcal{B}_\mathbf{a})^{(i_1-1)n^{k-1}+\ldots+(i_{k-1}-1)n+i_k}=\mathcal{B}_\mathbf{a}\mathbf{e}_{i_1}\dots\mathbf{e}_{i_k}=\widetilde{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathbf{a}}_{i_1}}\mathbf{e}_{i_2}\dots\mathbf{e}_{i_k}=$$
$$=\varphi_{k-1}(\widetilde{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathbf{a}}_{i_1}})^{(i_2-1)n^{k-2}+\ldots+(i_{k-1}-1)n+i_k}=\widetilde{a}_{i_1}^{(i_2-1)n^{k-2}+\ldots+(i_{k-1}-1)n+i_k}=$$
$$=a^{(i_1-1)n^{k-1}+\ldots+(i_{k-1}-1)n+i_k}$$

для всех $i_1,\dots,i_k\in\overline{1,n}$, то есть $\varphi_k(\mathcal{B}_\mathbf{a})=\mathbf{a}$. Итак, проверено, что φ_k — *линейный изоморфизм*. Определив для всех $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n^k}$ норму $\|\mathbf{x}\|:=\|\varphi^{-1}(\mathbf{x})\|_{N_k}$, имеем *линейный изометрический изоморфизм* $\varphi_k\colon N_k\overset{\mathrm{Norm}}{\cong}(\mathbb{R}^{n^k},\|\cdot\|)$.

По определению проверяется равносильность дифференцируемости функции $d^k f$ в точке $\mathbf{x}_0$ дифференцируемости функции $\varphi_k \circ d^k f$, принимающей значения в пространстве $(\mathbb{R}^{n^k}, \|\cdot\|)$, в точке $\mathbf{x}_0$. Но в $\mathbb{R}^{n^k}$ все нормы эквивалентны (см. теорему 1.14), поэтому (см. замечание 2) дифференцируемость функции $\varphi_k \circ d^k f$ в пространстве $(\mathbb{R}^{n^k}, \|\cdot\|)$ равносильна её дифференцируемости в пространстве $\mathbb{R}^{n^k}$ с евклидовой нормой, что, в свою очередь, равносильно дифференцируемости всех частных производных функций f порядка k в точке $\mathbf{x}_0$ в силу леммы 5 о покомпонентной дифференцируемости и равенства

$$\varphi_k\big(d^k f(\mathbf{x})\big)^{(i_1-1)n^{k-1}+\ldots+(i_{k-1}-1)n+i_k} = d^k f(\mathbf{x})\mathbf{e}_{i_1}\ldots\mathbf{e}_{i_k} = \partial_{i_1}\ldots\partial_{i_k} f(\mathbf{x}),$$

верного для всех $i_1, \ldots, i_k \in \overline{1,n}$. ◀

Замечание 18. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n \supset \Omega$ — произвольное множество, $k \in \mathbb{N}$ и $f \in D^k(\Omega)$. Тогда $d^k f \in C(\Omega) \iff$ все частные производные функции f порядка k принадлежат классу $C(\Omega)$.

Действительно, если в последнем абзаце доказательства теоремы 11 всюду заменить слово “дифференцируемость” словом “непрерывность”, а затем воспользоваться замечанием 1.5 и леммой 1.3$'$ о покомпонентной непрерывности, то получим требуемое утверждение. ◀

Утверждение 4. *Пусть $\mathbb{R}^n \supset \Omega$ — открытое множество, $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$C^k(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \overset{1)}{\subset} D^k(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \overset{2)}{\subset} C^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Доказательство.

1) При $k = 1$ по теореме 3 о достаточном условии дифференцируемости имеем $C^1(\Omega) \subset D(\Omega) =: D^1(\Omega)$. Пусть $k \geqslant 2$ и утверждение верно для $k-1$. Если $f \in C^k(\Omega)$, то по теореме 3 о достаточном условии дифференцируемости имеем дифференцируемость всех частных производных функции f порядка $k-1$, а следовательно, и их непрерывность всюду на Ω (см. следствие 1), что в силу замечания 11 влечёт $f \in C^{k-1}(\Omega) \overset{\text{инд.}}{\subset} D^{k-1}(\Omega)$. В силу открытости Ω это и означает $f \in D^k(\Omega)$ по определению 13$'$ k-кратной дифференцируемости.

2) Вытекает из определения 13$'$ k-кратной дифференцируемости и замечания 11, так как дифференцируемость частных производных функции f порядка $k-1$ влечёт их непрерывность всюду на Ω. ◀

Теорема 12 (о достаточном условии k-кратной дифференцируемости). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \operatorname{int}\big(\operatorname{Dom}(f)\big)$, $\delta > 0$ и $k \in \mathbb{N}$. Пусть все частные производные функции f порядка k определены в $O_\delta(\mathbf{a})$ и непрерывны в точке $\mathbf{a}$. Тогда $f \in D^k(\mathbf{a})$.*

Доказательство. При $k = 1$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 3 о достаточном условии дифференцируемости. Пусть $k \geqslant 2$ и теорема верна для $k-1$. Обозначим через g произвольную частную производную функции f порядка $k-1$. По условию теоремы получим, что все функции $\partial_1 g, \ldots, \partial_n g$ определены в $O_\delta(\mathbf{a})$ и *непрерывны в точке* $\mathbf{a}$, поэтому $g \in D(\mathbf{a})$ по теореме 3 о достаточном условии дифференцируемости. Также из непрерывности функций $\partial_1 g, \ldots, \partial_n g$ в точке $\mathbf{a}$ вытекает их ограниченность в некотором шаре $O_{\delta_1}(\mathbf{a})$. В силу утверждения 2 это означает равномерную непрерывность функции g на некотором шаре $O_{\delta_1}(\mathbf{a})$. Таким образом, для некоторого $\delta_2 > 0$ имеем

$$f \overset{\text{З. }11}{\in} C^{k-1}\big(O_{\delta_2}(\mathbf{a})\big) \overset{\text{Утв. }4}{\subset} D^{k-1}\big(O_{\delta_2}(\mathbf{a})\big),$$

а значит, $f \in D^k(\mathbf{a})$ по определению 13′ k-кратной дифференцируемости. ◀

Следующее определение многократной дифференцируемости было предложено Валле–Пуссеном (см. [6, с. 144]), также оно приведено в [10, с. 515], [12, с. 487]. Чтобы не путать его с определением 14, мы называем это *минимальной* многократной дифференцируемостью.

Определение 15 (минимальной k-кратной дифференцируемости). Пусть $k \in \mathbb{N}$. Функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется ***минимально k раз дифференцируемой на множестве*** $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если все её частные производные порядка $k-1$ дифференцируемы в каждой точке множества Ω. Класс всех таких функций обозначим $\widetilde{D}^k(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ или просто $\widetilde{D}^k(\Omega)$. Для одноточечного множества $\Omega = \{\mathbf{x}_0\}$ вместо $\widetilde{D}^k(\{\mathbf{x}_0\})$ будем использовать обозначение $\widetilde{D}^k(\mathbf{x}_0)$. Также по определению положим $\widetilde{D}^0(\Omega) := C(\Omega)$. Если $f \in \widetilde{D}^k(\mathbf{x}_0)$, то корректно определена величина $d^k f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) := (h_1\partial_1 + \ldots + h_n\partial_n)^k f(\mathbf{x}_0)$, несмотря на то, что определение 13 k-кратной дифференцируемости для f в точке $\mathbf{x}_0$, вообще говоря, *не выполнено*.

Замечание 19. Для любого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ очевидно выполнено $D^k(\Omega) \subset \subset \widetilde{D}^k(\Omega)$. Также имеем

$$\widetilde{D}^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega) \overset{\text{Утв. }4}{\subset} D^{k-1}(\Omega).$$

Таким образом, если множество Ω *открыто*, то $\widetilde{D}^k(\Omega) = D^k(\Omega)$ по определению 13′ k-кратной дифференцируемости. В заключение отметим, что существует (см. [45]) функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такая, что $f \in \widetilde{D}^2(0,0) \setminus D^2(0,0)$.

Кроме того, из теоремы 3 о достаточном условии дифференцируемости напрямую вытекает следующая теорема.

Теорема 13. *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \operatorname{int}\big(\operatorname{Dom}(f)\big)$, $\delta > 0$ *и* $k \in \mathbb{N}$. *Пусть для любой частной производной* $D^{k-1}f$ *функции* f *порядка* $k-1$ *одна из её частных производных* $\partial_1 D^{k-1}f, \dots, \partial_n D^{k-1}f$ *определена в точке* $\mathbf{a}$, *а оставшиеся* $n-1$ *частные производные определены в* $O_\delta(\mathbf{a})$ *и непрерывны в точке* $\mathbf{a}$. *Тогда* $f \in \widetilde{D}^k(\mathbf{a})$.

Лемма 9. *Пусть* $k \geqslant 2$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *и* $D^k(\mathbf{x}_0) \ni f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Тогда для всех* $p \in \overline{1, k-1}$ *и всех* $i_1, \dots, i_p \in \overline{1, n}$ *имеем* $\partial_{i_p} \dots \partial_{i_1} f \in D^{k-p}(\mathbf{x}_0)$.

Доказательство. При $k = 2$ (отсюда автоматически следует, что $p = 1$) лемма верна по определению 13′ k-кратной дифференцируемости. Пусть $k \geqslant 3$ и лемма верна для $k-1$.

Пусть $p = 1$ и $i_1 \in \overline{1, n}$. По определению 13′ k-кратной дифференцируемости для некоторого $\delta > 0$ имеем $f \in D^{k-1}\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$, а следовательно, $\partial_{i_1} f \in D^{k-2}\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$ в силу предположения индукции. Также по определению 9 частной производной порядка k *любая* частная производная функции $\partial_{i_1} f$ порядка $k-2$ *является некоторой* частной производной функции f порядка $k-1$, дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_0$ по определению 13′ k-кратной дифференцируемости. По тому же определению это означает, что $\partial_{i_1} f \in D^{k-1}(\mathbf{x}_0)$, что совпадает с утверждением леммы при $p = 1$.

Пусть $p \in \overline{2, k-1}$. Выше мы установили, что $\partial_{i_1} f \in D^{k-1}(\mathbf{x}_0)$, отсюда по предположению индукции следует, что

$$\partial_{i_p} \dots \partial_{i_1} f \overset{\text{О. 9}}{=} \partial_{i_p} \dots \partial_{i_2} (\partial_{i_1} f) \in D^{k-1-(p-1)}(\mathbf{x}_0) = D^{k-p}(\mathbf{x}_0),$$

что и завершает доказательство леммы. ◀

Лемма 10. *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{z}_0 = (z_0^1, \dots, z_0^n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, $\xi(x, y) := (z_0^1, \dots, z_0^{i-1}, x, z_0^{i+1}, \dots, z_0^{j-1}, y, z_0^{j+1}, \dots, z_0^n)$ *и* $g := f \circ \xi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Тогда* $(\partial_i \partial_j f) \circ \xi = g_{yx} = \partial_1 \partial_2 (f \circ \xi)$ *и* $(\partial_j \partial_i f) \circ \xi = g_{xy} = \partial_2 \partial_1 (f \circ \xi)$.

Доказательство. Из определения 5 частной производной непосредственно вытекает равенство

$$(\partial_i f) \circ \xi = \partial_1 (f \circ \xi), \tag{14}$$

верное *для всех функций* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, а также совершенно аналогичное равенство

$$(\partial_j f) \circ \xi = \partial_2 (f \circ \xi). \tag{15}$$

Но тогда

$$(\partial_i \partial_j f) \circ \xi \overset{\text{О. 9}}{=} \big(\partial_i (\partial_j f)\big) \circ \xi \overset{(14)}{=} \partial_1 \big((\partial_j f) \circ \xi\big) \overset{(15)}{=} \partial_1 \big(\partial_2 (f \circ \xi)\big) \overset{\text{О. 9}}{=} \partial_1 \partial_2 (f \circ \xi).$$

Равенство $(\partial_j \partial_i f) \circ \xi = \partial_2 \partial_1 (f \circ \xi)$ устанавливается совершенно аналогично. ◀

Определение 16 (разностного оператора). Пусть $f\colon H \to N$. Для любого $\mathbf{h} \in H$ через $\Delta_{\mathbf{h}}$ обозначим разностный оператор первого порядка: $\Delta_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$.

Замечание 20 [О коммутативности разностных операторов]. Для любой функции $f\colon H \to N$ и любых $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in H$ по определению 16 разностного оператора имеем

$$\Delta_{\mathbf{a}}(\Delta_{\mathbf{b}} f)(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{b}}(\Delta_{\mathbf{a}} f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{a}+\mathbf{b}) - f(\mathbf{x}+\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}+\mathbf{b}) + f(\mathbf{x}).$$

Теорема 14 (Шварца–Клеро). *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, функции $\partial_i \partial_j f$ и $\partial_j \partial_i f$ определены всюду в $O_\delta(\mathbf{z}_0)$ и непрерывны в точке $\mathbf{z}_0$ для фиксированных $i, j \in \overline{1, n}$. Тогда $\partial_i \partial_j f(\mathbf{z}_0) = \partial_j \partial_i f(\mathbf{z}_0)$.*

Доказательство. Используя лемму 10 и обозначая $x_0 := z_0^i$, $y_0 := z_0^j$, $g = f \circ \xi$, по определению проверяется существование функций g_{xy} и g_{yx} в $O_\delta(x_0, y_0)$ и их непрерывность в точке (x_0, y_0). По той же лемме для доказательства теоремы достаточно показать, что $g_{xy}(x_0, y_0) = g_{yx}(x_0, y_0)$. Пусть $h, r \neq 0$ и $(x_0 + h, y_0 + r) \in O_\delta(x_0, y_0)$. Отсюда непосредственно вытекает, что $(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 r) \in O_\delta(x_0, y_0)$ для любых $\theta_1, \theta_2 \in [-1, 1]$. Определим векторы $\mathbf{a} := (h, 0)$, $\mathbf{b} := (0, r)$ и рассмотрим функцию

$$\begin{gathered} \Phi(h, r) := \Delta_{\mathbf{a}} \Delta_{\mathbf{b}} g(x_0, y_0) = \\ = g(x_0 + h, y_0 + r) - g(x_0 + h, y_0) - g(x_0, y_0 + r) + g(x_0, y_0). \end{gathered} \tag{16}$$

Фиксируем r и рассмотрим функцию

$$\Delta_{\mathbf{b}} g(x, y) = g(x, y + r) - g(x, y).$$

Для всех $\theta \in [-1, 1]$ имеем существование

$$(\Delta_{\mathbf{b}} g)_x(x_0 + \theta h, y_0) = g_x(x_0 + \theta h, y_0 + r) - g_x(x_0 + \theta h, y_0). \tag{17}$$

Используя выпуклость $O_\delta(x_0, y_0)$, по теореме 4.4.6 Лагранжа получим

$$\begin{gathered} \Phi(h, r) \overset{(16)}{=} \Delta_{\mathbf{b}} g(x_0 + h, y_0) - \Delta_{\mathbf{b}} g(x_0, y_0) \overset{\text{Т. } 4.4.6}{=} (\Delta_{\mathbf{b}} g)_x(x_0 + \theta_1 h, y_0) h \overset{(17)}{=} \\ \overset{(17)}{=} \big[g_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + r) - g_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)\big] h \overset{\text{Т. } 4.4.6}{=} \\ \overset{\text{Т. } 4.4.6}{=} g_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 r) r h, \end{gathered} \tag{18}$$

где $\theta_1 = \theta_1(h, r) \in (0, 1)$, $\theta_2 = \theta_2(h, r) \in (0, 1)$.

Совершенно аналогично фиксируем h и рассмотрим функцию

$$\Delta_{\mathbf{a}} g(x, y) = g(x + h, y) - g(x, y).$$

Для всех $\theta \in [-1, 1]$ имеем существование

$$(\Delta_{\mathbf{a}} g)_y(x_0, y_0 + \theta r) = g_y(x_0 + h, y_0 + \theta r) - g_y(x_0, y_0 + \theta r). \tag{19}$$

Используя коммутативность разностных операторов (см. замечание 20), выпуклость $O_\delta(x_0, y_0)$ и теорему 4.4.6 Лагранжа, получим

$$\begin{aligned}\Phi(h, r) &\overset{(16)}{=} \Delta_{\mathbf{a}} g(x_0, y_0 + r) - \Delta_{\mathbf{a}} g(x_0, y_0) \overset{\text{Т. } 4.4.6}{=} (\Delta_{\mathbf{a}} g)_y(x_0, y_0 + \theta_3 r) r \overset{(19)}{=} \\ &\overset{(19)}{=} \big[g_y(x_0 + h, y_0 + \theta_3 r) - g_y(x_0, y_0 + \theta_3 r)\big] r \overset{\text{Т. } 4.4.6}{=} \\ &\overset{\text{Т. } 4.4.6}{=} g_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 r) h r,\end{aligned} \tag{20}$$

где $\theta_3 = \theta_3(h, r) \in (0, 1)$, $\theta_4 = \theta_4(h, r) \in (0, 1)$.

Далее определим функцию

$$W(h, r) := \frac{\Phi(h, r)}{hr}.$$

В силу того, что $\theta_1 h, \theta_2 r, \theta_4 h, \theta_3 r \to 0$ при $(h, r) \to (0, 0)$, леммы 1.3 о пределах компонент и теоремы 1.8 о пределе композиции функций, используя представления (18) и (20), имеем

$$\begin{aligned}\lim_{(h,r)\to(0,0)} W(h, r) &= \lim_{(h,r)\to(0,0)} g_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 r) = g_{xy}(x_0, y_0) = \\ &= \lim_{(h,r)\to(0,0)} g_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 r) = g_{yx}(x_0, y_0),\end{aligned}$$

что и завершает доказательство теоремы. ◀

Теорема 15 [Обобщение теоремы 14 Шварца–Клеро (Пеано)]. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i, j \in \overline{1, n}$, $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$, $(x_0, y_0) := (z_0^i, z_0^j)$, $\delta > 0$, функции $\partial_i f\big(\xi(x, y)\big)$ и $\partial_j f\big(\xi(x, y)\big)$ определены при всех $(x, y) \in O_\delta(x_0, y_0)$, функция $\partial_j \partial_i f\big(\xi(x, y)\big)$ определена при всех $(x, y) \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0, y_0)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \partial_j \partial_i f\big(\xi(x, y)\big) = A \in \mathbb{R}$, где $\xi(x, y) = (z_0^1, \ldots, z_0^{i-1}, x, z_0^{i+1}, \ldots, z_0^{j-1}, y, z_0^{j+1}, \ldots, z_0^n)$. Тогда существуют $\partial_j \partial_i f(\mathbf{z}_0) = A$ и $\partial_i \partial_j f(\mathbf{z}_0) = A$.*

Доказательство. За основу возьмём доказательство теоремы 14 Шварца–Клеро с сохранением всех обозначений. Используя лемму 10, получим существование функций g_x, g_y в $O_\delta(x_0, y_0)$ (см. равенства (14) и (15)) и функции g_{xy} в $\overset{\circ}{O}_\delta(x_0, y_0)$, а также равенство $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g_{xy}(x, y) = A$. Используя равенство (18) и теорему 1.8 о пределе композиции функций, получаем

$$\lim_{(h,r)\to(0,0)} W(h, r) = \lim_{(h,r)\to(0,0)} g_{xy}(x_0 + \theta_1(h, r) h, y_0 + \theta_2(h, r) r) = A,$$

отсюда

$$\lim_{h\to 0}\lim_{r\to 0} W(h,r) =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\lim_{r\to 0}\left[\frac{g(x_0+h,y_0+r)-g(x_0+h,y_0)}{r} - \frac{g(x_0,y_0+r)-g(x_0,y_0)}{r}\right] =:$$
$$=: \lim_{h\to 0}\frac{g_y(x_0+h,y_0)-g_y(x_0,y_0)}{h} =: g_{yx}(x_0,y_0) \overset{\text{Т. }1.9}{=} A.$$

Совершенно аналогично

$$\lim_{r\to 0}\lim_{h\to 0} W(h,r) =$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x_0+h,y_0+r)-g(x_0,y_0+r)}{h} - \frac{g(x_0+h,y_0)-g(x_0,y_0)}{h}\right] =:$$
$$=: \lim_{r\to 0}\frac{g_x(x_0,y_0+r)-g_x(x_0,y_0)}{r} =: g_{xy}(x_0,y_0) \overset{\text{Т. }1.9}{=} A.$$

Используя лемму 10, получаем утверждение теоремы. ◀

Теорема 16 (Янга). *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и при фиксированных $i,j \in \overline{1,n}$ функции $\partial_i f, \partial_j f$ дифференцируемы в точке $\mathbf{z}_0$. Тогда $\partial_i\partial_j f(\mathbf{z}_0) = \partial_j\partial_i f(\mathbf{z}_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим функции $g(x,y)$ и $\Phi(h,r)$, определённые при доказательстве теоремы 14 Шварца–Клеро. В силу дифференцируемости на $\mathbb{R}^2$ функции ξ, определённой в лемме 10 (что непосредственно проверяется с помощью леммы 5 о покомпонентной дифференцируемости и теоремы 3 о достаточном условии дифференцируемости), имеем существование функций g_x, g_y в некотором шаре $O_\delta(x_0,y_0)$ $\big($см. равенства (14) и (15)$\big)$ и их дифференцируемость в точке (x_0,y_0) по теореме 5 о дифференцируемости композиции функций. Используя для $\Phi(h,r)$ предпоследнее представление из (18) и полагая $r := h$, получим

$$\Phi(h,h) = \Big[g_x(x_0+\theta_1(h)h, y_0+h) - g_x(x_0+\theta_1(h)h, y_0)\Big]h \overset{\text{Л. }6}{=}$$
$$\overset{\text{Л. }6}{=}\Big[g_x(x_0,y_0) + g_{xx}(x_0,y_0)\theta_1(h)h + g_{xy}(x_0,y_0)h +$$
$$+\alpha_1(\theta_1(h)h,h)\theta_1(h)h + \alpha_2(\theta_1(h)h,h)h -$$
$$-\big(g_x(x_0,y_0) + g_{xx}(x_0,y_0)\theta_1(h)h + \alpha_1(\theta_1(h)h,0)\theta_1(h)h\big)\Big]h \overset{\text{Т. }1.8}{=}$$
$$\overset{\text{Т. }1.8}{=}\big[g_{xy}(x_0,y_0)h + \widetilde{\alpha}_1(h)h + \widetilde{\alpha}_2(h)h + \widetilde{\widetilde{\alpha}}_1(h)h\big]h =$$
$$= g_{xy}(x_0,y_0)h^2 + o(h^2) \tag{21}$$

при $h \to 0$.

Используя предпоследнее представление из (20), совершенно аналогично получим

$$\begin{aligned}\Phi(h,h) = &\Big[g_y(x_0+h, y_0+\theta_3(h)h) - g_y(x_0, y_0+\theta_3(h)h\Big]h = \\ = &\Big[g_y(x_0,y_0) + g_{yx}(x_0,y_0)h + g_{yy}(x_0,y_0)\theta_3(h)h + o(h) - \\ &- \big(g_y(x_0,y_0) + g_{yy}(x_0,y_0)\theta_3(h)h + o(h)\big)\Big]h = \\ &= g_{yx}(x_0,y_0)h^2 + o(h^2)\end{aligned} \tag{22}$$

при $h \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(h,h)}{h^2} \overset{(21)}{=} g_{xy}(x_0,y_0) \overset{(22)}{=} g_{yx}(x_0,y_0)$$

и в силу леммы 10 теорема доказана. ◀

Замечание 21. В случае $n \geqslant 3$ условие дифференцируемости функций $\partial_i f$, $\partial_j f$ в точке $\mathbf{z}_0$ в теореме 16 Янга можно ослабить, зафиксировав все переменные, кроме i–ой и j–ой и перейдя, таким образом, к функции *двух* переменных. Действительно, приведённое доказательство остаётся в силе, если потребовать лишь дифференцируемости функций $\partial_i f\big(\xi(x,y)\big)$, $\partial_j f\big(\xi(x,y)\big)$ в точке $(x_0,y_0) := (z_0^i, z_0^j)$, где $\xi(x,y) = (z_0^1,\dots,z_0^{i-1},x,z_0^{i+1},\dots,z_0^{j-1},y,z_0^{j+1},\dots,z_0^n)$.

Теорема 17 (следствие теоремы 16 Янга). *Пусть* $k \geqslant 2$, $i_1,\dots,i_k \in \overline{1,n}$ *и* $D^k(\mathbf{x}_0) \ni f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\partial_{i_1}\dots\partial_{i_k} f(\mathbf{x}_0) = \partial_{i_{\sigma(1)}}\dots\partial_{i_{\sigma(k)}} f(\mathbf{x}_0),$$

где σ *— произвольная перестановка чисел* $\{1,2,\dots,k\}$.

Доказательство. Для начала докажем, что для любого $m \in \overline{1,k-1}$ и любых $j_1,\dots,j_k \in \overline{1,n}$ верно равенство

$$\partial_{j_1}\dots\partial_{j_m}\partial_{j_{m+1}}\dots\partial_{j_k} f(\mathbf{x}_0) = \partial_{j_1}\dots\partial_{j_{m+1}}\partial_{j_m}\dots\partial_{j_k} f(\mathbf{x}_0). \tag{23}$$

Так как $g := \partial_{j_{m+2}}\dots\partial_{j_k} f \in D^{k-(k-m-1)}(\mathbf{x}_0) = D^{m+1}(\mathbf{x}_0)$ по лемме 9, то при $m = 1$ равенство (23) верно по теореме 16 Янга. При $m \geqslant 2$ согласно определению 13′ для некоторого $\delta > 0$ имеем $g \in D^m\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big) \subset D^2\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$, поэтому *для всех* $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$ имеем равенство $g_1(\mathbf{x}) := \partial_{j_m}\partial_{j_{m+1}} g(\mathbf{x}) = \partial_{j_{m+1}}\partial_{j_m} g(\mathbf{x}) =: g_2(\mathbf{x})$ по теореме 16 Янга. Так как функции g_1 и g_2 совпадают на некотором шаре $O_\delta(\mathbf{x}_0)$, то и все их частные производные любых порядков совпадают в точке $\mathbf{x}_0$, в частности $\partial_{j_1}\dots\partial_{j_{m-1}} g_1(\mathbf{x}_0) = \partial_{j_1}\dots\partial_{j_{m-1}} g_2(\mathbf{x}_0)$, отсюда следует равенство (23). Для завершения доказательства теоремы достаточно отсортировать перестановку $\big(\sigma(1),\dots,\sigma(k)\big)$ при помощи широко известного алгоритма сортировки “пузырьком”. ◀

Замечание 22. Как мы видим из условий теоремы 16 Янга, уже при $k = 2$ условие k раз дифференцируемости функции f в точке $\mathbf{x}_0$ является завышенным (см. [45]) требованием для обеспечения независимости частных производных порядка k в точке $\mathbf{x}_0$ от порядка дифференцирования, так как автоматически подразумевает $(k-1)$-кратную дифференцируемость функции f в некотором шаре $O_\delta(\mathbf{x}_0)$. Оказывается, имеет место прямое обобщение теоремы 16 Янга (см. теорему 10.6.1 [Обобщённая теорема Янга]). Из неё вытекает, что теорема 17 (следствие теоремы 16 Янга) остаётся в силе для функций $f \in \widetilde{D}^k(\mathbf{x}_0)$ (см. определение 15 минимальной k-кратной дифференцируемости).

9.2.4. Формула Тейлора

Всюду в этом пункте будем предполагать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Пусть в точке $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int}(\Omega)$ определены все частные производные функции f до порядка k включительно и $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in \Omega$. Представление

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{d^m f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})}{m!} + r_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h}), \tag{24}$$

где $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, $d^m f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) := (h_1\partial_1 + \ldots + h_n\partial_n)^m f(\mathbf{x}_0)$, называется ***формулой Тейлора***, $P_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h}) := f(\mathbf{x}_0) + \sum\limits_{m=1}^{k} \frac{d^m f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})}{m!}$ — ***многочленом Тейлора***, $r_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ — ***остаточным членом***.

Лемма 11. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$ и $f \in D^k\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$. Тогда $\varphi(t) := f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \in D^k(-a, a)$, где $a := \delta/\|\mathbf{h}\| > 1$ при $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ и $a := +\infty$ при $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. При этом для всех $m \in \overline{1, k}$ справедлива формула $\varphi^{(m)}(t) = d^m f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}, \mathbf{h})$ при всех $t \in (-a, a)$. Кроме того, если $f \in C^k\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$, то $\varphi \in C^k(-a, a)$.*

Доказательство проведём при помощи индукции по k. Из неравенства $|t| < a$ следует, что $\|(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - \mathbf{x}_0\| = |t|\|\mathbf{h}\| < \delta$, а значит, $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$.

Пусть $k = 1$, тогда $f \in D(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ при всех $t \in (-a, a)$ и

$$\varphi'(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + \Delta t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})}{\Delta t} \overset{\text{О. 6}}{=} D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \overset{\text{Т. 7}}{=}$$
$$\overset{\text{Т. 7}}{=} df(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}, \mathbf{h}) = f'(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\mathbf{h} \overset{\text{Т. 2}}{=} (h_1\partial_1 + \ldots + h_n\partial_n) f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}).$$

Если $f \in C^1\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$, то все частные производные функции f непрерывны в точке $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$ при всех $t \in (-a, a)$. По теореме 1.8′ о непрерывности композиции непрерывных функций в этом случае имеем $\varphi' \in C(-a, a)$ как линейную комбинацию непрерывных функций, что равносильно $\varphi \in C^1(-a, a)$.

Пусть $k \geqslant 2$ и лемма верна для $k-1$. Так как $f \in D^k\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big) \subset D^{k-1}\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$, то $\varphi^{(k-1)}(t) = F(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ при $t \in (-a, a)$, где $F(\mathbf{x}) := d^{k-1} f(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ по предположению индукции, причём $F \in D\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$ как линейная комбинация дифференцируемых функций. Таким образом, при всех $t \in (-a, a)$ имеем

$$\varphi^{(k)}(t) = \big[\varphi^{(k-1)}\big]'(t) \overset{\text{инд.}}{=} dF(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}, \mathbf{h}) = F'(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\mathbf{h} \overset{\text{Т. 2}}{=}$$
$$\overset{\text{Т. 2}}{=} (h_1\partial_1 + \ldots + h_n\partial_n)F(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) =$$
$$= (h_1\partial_1 + \ldots + h_n\partial_n)\big[(h_1\partial_1 + \ldots + h_n\partial_n)^{k-1} f\big](\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) = d^k f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}, \mathbf{h}).$$

Если $f \in C^k\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$, то $F \in C^1\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$ как линейная комбинация частных производных функции f порядка $k-1$. В силу базы и предположения индукции из этого вытекает, что $\varphi^{(k-1)} \in C^1(-a, a)$, что равносильно $\varphi \in C^k(-a, a)$. ◀

Теорема 18 (Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть $k \in \mathbb{N}_0$, $\delta > 0$, $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$ и $f \in D^{k+1}\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$. Тогда остаточный член в формуле* (24) *Тейлора представим в виде*

$$r_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \frac{d^{k+1} f(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}, \mathbf{h})}{(k+1)!}, \text{ где } \theta \in (0, 1).$$

Доказательство. По лемме 11 имеем $\varphi := f \circ g \in D^{k+1}(-a, a)$, где $g(t) := \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$ и $a > 1$. Для любого $t \in (-a, a)$ запишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (см. теорему 4.6.1) в точке $t_0 = 0$ для функции $\varphi\colon (-a, a) \to \mathbb{R}$:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} t^m + \frac{\varphi^{(k+1)}(\theta t)}{(k+1)!} t^{k+1} \overset{\text{Л. 11}}{=}$$
$$\overset{\text{Л. 11}}{=} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{d^m f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})}{m!} t^m + \frac{d^{k+1} f(\mathbf{x}_0 + \theta t\mathbf{h}, \mathbf{h})}{(k+1)!} t^{k+1},$$

где $\theta \in (0, 1)$. Подставив $t = 1$, получим утверждение теоремы. ◀

Следствие 5 [Формула Лагранжа]. *Пусть выполнены все условия теоремы 18 при $k = 0$, тогда найдётся $\theta \in (0, 1)$ такое, что*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h}, \mathbf{h}) = f'(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})\mathbf{h}. \tag{25}$$

Замечание 23. Теорема 18 Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа дословно переносится на случай, когда вместо $O_\delta(\mathbf{x}_0)$ рассматривается произвольное *выпуклое множество* (см. определение 8.0.12), а вместо $\mathbb{R}^n$ — произвольное *нормированное пространство H*. Однако уже для функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ формула (25) Лагранжа, а значит, и теорема 18 Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, вообще говоря, неверна. Действительно, для функции

$f(t) \coloneqq (\sin t, \cos t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ равенство

$$\mathbf{0} = f(2\pi) - f(0) = f'(\xi)2\pi = 2\pi(\cos\xi, -\sin\xi)$$

означало бы, что $\sin^2\xi + \cos^2\xi = 0$, чего быть не может. Тем не менее для любой пары нормированных пространств H, N и для любой функции

$$f\colon H \to N \in C\big([\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]\big) \cap D\big((\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h})\big)$$

можно доказать существование числа $\theta \in (0, 1)$ такого, что выполнено *неравенство*

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\|_N \leqslant \|df(\mathbf{x}_0 + \theta\mathbf{h})\| \|\mathbf{h}\|_H.$$

Теорема 19 (Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). *Пусть* $k \in \mathbb{N}_0$, $\delta > 0$, $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$ *и* $f \in C^{k+1}\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$. *Тогда остаточный член в формуле* (24) *Тейлора представим в виде*

$$r_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \frac{1}{k!}\int\limits_0^1 (1-\tau)^k d^{k+1} f(\mathbf{x}_0 + \tau\mathbf{h}, \mathbf{h})\, d\tau.$$

Доказательство. По лемме 11 имеем $\varphi \coloneqq f \circ g \in C^{k+1}(-a, a) \subset D^{k+1}(-a, a)$, где $g(t) \coloneqq \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$ и $a > 1$. Для любого $t \in (-a, a)$ запишем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме (см. теорему 6.1.15) в точке $t_0 = 0$ для функции $\varphi\colon (-a, a) \to \mathbb{R}$:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} t^m + \frac{1}{k!}\int\limits_0^t (t-\tau)^k \varphi^{(k+1)}(\tau)\, d\tau \overset{\text{л. }11}{=}$$

$$\overset{\text{л. }11}{=} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{d^m f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})}{m!} t^m + \frac{1}{k!}\int\limits_0^t (t-\tau)^k d^{k+1} f(\mathbf{x}_0 + \tau\mathbf{h}, \mathbf{h})\, d\tau.$$

Подставив $t = 1$, получим утверждение теоремы. ◀

Замечание 24. Отметим, что требования

$$f \in D^{k+1}\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big) \quad \text{и} \quad f \in C^{k+1}\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$$

в теоремах 18 Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и 19 Тейлора с остаточным членом в интегральной форме соответственно зачастую являются *завышенными*. Например, утверждения обеих этих теорем остаются верными для функции

$$f(x, y) \coloneqq \begin{cases} \operatorname{sgn}(xy)\min\left\{\left|\frac{y}{x}\right|, x^2\right\} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

при $k := 1$, $\mathbf{x}_0 := (0,0)$ и $\mathbf{h} := (1,0)$, однако функция

$$f_y(t\mathbf{h}) = f_y(t,0) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{при } t \neq 0, \\ 0 & \text{при } t = 0 \end{cases}$$

является разрывной и неинтегрируемой на отрезке $[0,1]$.

Замечание 25. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in D^m(\Omega)$ и $m \in \mathbb{N}_0$. Тогда $d^m f(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ можно рассматривать как функцию $2n$ переменных $d^m f \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Как и прежде при $k \in \overline{1,n}$, под $\partial_k d^m f$ будем понимать $\dfrac{\partial}{\partial x_k} d^m f$. При фиксированном $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ имеем $d^m f(\mathbf{x}_0, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, так как эта функция является многочленом (см. определение 5.2.12), а её производную в любой точке $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ будем обозначать

$$(d^m f)'_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) := \left(\frac{\partial}{\partial h_1} d^m f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}), \ldots, \frac{\partial}{\partial h_n} d^m f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) \right).$$

Лемма 12. *Пусть $f \in D^m(\mathbf{x}_0)$ и $m \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $p \in \overline{1,n}$ и для всех $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ верно равенство*

$$\frac{\partial}{\partial h_p} d^m f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = m d^{m-1}(\partial_p f)(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}).$$

Доказательство. При $m = 1$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial h_p} df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \frac{\partial}{\partial h_p} \big(\partial_1 f(\mathbf{x}_0) h_1 + \ldots + \partial_n f(\mathbf{x}_0) h_n \big) = \partial_p f(\mathbf{x}_0),$$

а следовательно, лемма верна. Пусть $m \geqslant 2$ и лемма верна для $m-1$. По лемме 9 имеем $\partial_j f \in D^{m-1}(\mathbf{x}_0)$ при всех $j \in \overline{1,n}$, также имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial h_p} d^m f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \frac{\partial}{\partial h_p} \Big[\overbrace{(h_1 \partial_1 + \ldots + h_n \partial_n)^{m-1}}^{d^{m-1}} (h_1 \partial_1 + \ldots + h_n \partial_n) f \Big] (\mathbf{x}_0) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial h_p} \sum_{j=1}^n h_j d^{m-1}(\partial_j f)(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = d^{m-1}(\partial_p f)(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) + \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial h_p} d^{m-1}(\partial_j f)(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) \overset{\text{инд.}}{=}$$
$$\overset{\text{инд.}}{=} d^{m-1}(\partial_p f)(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) + (m-1) \sum_{j=1}^n h_j d^{m-2}(\partial_p \partial_j f)(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) \overset{\text{Т.17}}{=}$$
$$\overset{\text{Т.17}}{=} d^{m-1}(\partial_p f)(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) + (m-1) d^{m-1}(\partial_p f)(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = m d^{m-1}(\partial_p f)(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

что и требовалось доказать. ◀

Замечание 26. Отметим, что условие $f \in D^m(\mathbf{x}_0)$ в лемме 12 может быть заменено более слабым условием $f \in \widetilde{D}^m(\mathbf{x}_0)$ (см. определение 15 минимальной k-кратной дифференцируемости). При этом для её доказательства (см. [45]) вместо теоремы 17 (следствие теоремы 16 Янга) достаточно сослаться на теорему 10.6.1 [Обобщённая теорема Янга]. Отметим также, что при всех $m \neq 3$ можно обойтись без применения этой теоремы: при $m = 2$ утверждение следует из теоремы 16 Янга, а при $m \geqslant 4$ для некоторого $\delta > 0$ имеем

$$f \in D^{m-1}\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big) \overset{\text{Утв. } 4}{\subset} C^{m-2}\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big) \overset{\text{Утв. } 4}{\subset} D^{m-2}\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big) \subset D^2\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big),$$

поэтому применима теорема 17 (следствие теоремы 16 Янга).

Теорема 20 (Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $f \in D^k(\mathbf{x}_0)$. Тогда остаточный член $r_k(f, \mathbf{x}_0, \cdot)$ в формуле (24) Тейлора определён на некотором шаре $O_\delta(\mathbf{0})$ и представим в виде $r_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|^k)$ при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.*

Доказательство проведём по индукции. При $k = 1$ теорема верна по определению 2 дифференцируемой функции. Пусть $k \geqslant 2$ и теорема верна для $k - 1$. Рассмотрим функцию $\varphi(\mathbf{h}) := f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - P_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h})$. Тогда $\varphi(\mathbf{0}) = 0$ и $r_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \varphi(\mathbf{h}) = \varphi(\mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{0})$. Из условия $f \in D^k(\mathbf{x}_0)$ следует, что найдётся $\delta > 0$ такое, что все частные производные функции f порядка $k - 1$ определены в шаре $O_\delta(\mathbf{x}_0)$, а следовательно, и все частные производные функции φ определены в шаре $O_\delta(\mathbf{0})$. Для любого $\mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{0})$ запишем представление

$$\begin{gathered} r_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \varphi(\mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{0}) = \\ = \sum_{p=1}^{n} \Big[\varphi(0, \ldots, 0, h_p, \ldots, h_n) - \varphi(0, \ldots, 0, h_{p+1}, \ldots, h_n)\Big], \end{gathered} \tag{26}$$

в котором все аргументы функции φ также лежат в шаре $O_\delta(\mathbf{0})$. Пользуясь выпуклостью шара $O_\delta(\mathbf{0})$ (см. определение 8.0.12), применим к p-й квадратной скобке из равенства (26) теорему 4.4.6 Лагранжа и учтём, что функция $\partial_p f$ удовлетворяет условиям теоремы при $k - 1$ (см. лемму 9):

$$\begin{gathered} \varphi(0, \ldots, 0, h_p, \ldots, h_n) - \varphi(0, \ldots, 0, h_{p+1}, \ldots, h_n) = \partial_p \varphi(\boldsymbol{\xi}_p) h_p = \\ = \left[\partial_p f(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}_p) - \sum_{m=1}^{k} \frac{\frac{\partial}{\partial h_p}(d^m f)(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}_p)}{m!}\right] h_p \overset{\text{Л. } 12}{=} \\ \overset{\text{Л. } 12}{=} \left[\partial_p f(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}_p) - \sum_{m=1}^{k} \frac{d^{m-1}(\partial_p f)(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}_p)}{(m-1)!}\right] h_p \overset{q := m-1}{=} \end{gathered}$$

$$\overset{q := m-1}{=} \left[\partial_p f(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}_p) - \partial_p f(\mathbf{x}_0) - \sum_{q=1}^{k-1} \frac{d^q(\partial_p f)(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}_p)}{q!}\right] h_p =$$
$$= r_{k-1}(\partial_p f, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}_p) h_p \overset{\text{инд.}}{=} o(\|\boldsymbol{\xi}_p\|^{k-1}) h_p \overset{\|\boldsymbol{\xi}_p\| \leqslant \|\mathbf{h}\|}{=} o(\|\mathbf{h}\|^{k-1}) h_p =$$
$$= o(\|\mathbf{h}\|^k) \frac{h_p}{\|\mathbf{h}\|} = o(\|\mathbf{h}\|^k),$$

где $\boldsymbol{\xi}_p = (0, \ldots, 0, \theta_p h_p, h_{p+1}, \ldots, h_n)$, $\theta_p \in (0, 1)$. Подставляя полученные при $p = 1, 2, \ldots, n$ выражения в формулу (26), получим

$$r_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{p=1}^{n} o(\|\mathbf{h}\|^k) = o(\|\mathbf{h}\|^k)$$

при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 27. Отметим, что условие $f \in D^k(\mathbf{x}_0)$ в теореме 20 Тейлора с остаточным членом в форме Пеано может быть заменено более слабым условием $f \in \widetilde{D}^k(\mathbf{x}_0)$ (см. определение 15 минимальной k-кратной дифференцируемости). При этом для её доказательства (см. [45]) достаточно воспользоваться замечанием 26.

Лемма 13. *Пусть* $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, P_k *— многочлен степени не выше* $k \in \mathbb{N}_0$, *то есть*

$$P_k(\mathbf{h}) = \sum_{m=0}^{k} R_m(\mathbf{h}) = \sum_{m=0}^{k} \overbrace{\sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n}}^{R_m(\mathbf{h})},$$

где $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ *при всех* $j \in \overline{1, n}$. *Пусть для некоторого* $\delta > 0$ *и всех* $\mathbf{h} \in O_\delta(\mathbf{0})$ *имеет место представление* $P_k(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|^k)$ *при* $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, *тогда* $P_k = \mathbf{0}$.

Доказательство. Фиксируем произвольный вектор $\widetilde{\mathbf{h}} \in O_\delta(\mathbf{0})$ и при всех $t \in (-1, 1)$ рассмотрим функцию

$$Q(t) := P_k(t\widetilde{\mathbf{h}}) = \sum_{m=0}^{k} t^m \overbrace{\sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m} c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \widetilde{h}_1^{\alpha_1} \ldots \widetilde{h}_n^{\alpha_n}}^{a_m := R_m(\widetilde{\mathbf{h}}) = const} = \sum_{m=0}^{k} a_m t^m = o(t^k) \tag{27}$$

при $t \to 0$, так как $\|\widetilde{\mathbf{h}}\|^k \alpha(t\widetilde{\mathbf{h}})$ — бесконечно мало, и

$$\left|o(\|t\widetilde{\mathbf{h}}\|^k)\right| \overset{\text{О. } 1.2}{\leqslant} \alpha(t\widetilde{\mathbf{h}}) \|t\widetilde{\mathbf{h}}\|^k = \|\widetilde{\mathbf{h}}\|^k \alpha(t\widetilde{\mathbf{h}}) |t|^k.$$

По теореме 4.6.3 единственности представления функции многочленом с остатком в форме Пеано из равенства (27) вытекает, что $Q = \mathbf{0}$, а следовательно, при всех $m \in \overline{0, k}$ имеем

$$R_m(\widetilde{\mathbf{h}}) = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m} c_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \widetilde{h}_1^{\alpha_1} \ldots \widetilde{h}_n^{\alpha_n} \equiv 0$$

для всех $\widetilde{\mathbf{h}} \in O_\delta(\mathbf{0})$ (в действительности и на всём $\mathbb{R}^n$, что вытекает из однородности многочленов R_m), а значит, и любая частная производная любой функции R_m любого порядка тождественно равна нулю в шаре $O_\delta(\mathbf{0})$. Но тогда для всех $m \in \overline{0, k}$ при $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m$ имеем $0 = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} R_m(\mathbf{0}) = \alpha_1! \ldots \alpha_n! c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$, а значит, все коэффициенты $c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ многочлена P_k равны нулю, отсюда $P_k = \mathbf{0}$. ◀

Теорема 21 (единственности представления функции многочленом с остатком в форме Пеано). *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $O_\delta(\mathbf{x}_0) \subset \operatorname{Dom}(f)$, $k \in \mathbb{N}_0$ *и*

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = P_k(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|^k), \ \ f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = Q_k(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|^k)$$

при $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, *где* P_k, Q_k *— многочлены степени не выше* k. *Тогда* $P_k = Q_k$.

Доказательство. Для многочлена $R_k := P_k - Q_k$ степени не выше k выполняются все условия леммы 13, поэтому $R_k = \mathbf{0}$, то есть $P_k = Q_k$. ◀

§ 9.3. Теоремы о неявной функции

Теорема 1 [Элементарная теорема о неявной функции]. *Пусть* $F\colon \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{z}_0 := (x_0, y_0) \in \operatorname{int}(\Omega)$ *и*

1) $F(\mathbf{z}_0) = 0$;
2) $\exists \delta > 0, \exists k \in \mathbb{N}_0\colon F \in C^k\big(O_\delta(\mathbf{z}_0)\big)$;
3) F_y *непрерывна в точке* $\mathbf{z}_0$ *и* $F_y(\mathbf{z}_0) \neq 0$.

Тогда существует $b_0 > 0$ *такое, что для любого* $b \in (0, b_0]$ *найдутся число* $a > 0$ *и функция* $f\colon B_a(x_0) \to B_b(y_0)$, *где* $B_a(x_0) := O_a(x_0)$, $B_b(y_0) := O_b(y_0)$, *для которых выполнено:*

(а) $\forall (x, y) \in B_a(x_0) \times B_b(y_0) \subset O_\delta(\mathbf{z}_0)$ *имеем* $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$ (*в частности,* $f(x_0) = y_0$);

(б) $f \in C^k\big(B_a(x_0)\big)$;

(в) *если* $x \in B_a(x_0)$ *и* $F \in D(\mathbf{z})$ *при* $\mathbf{z} := \big(x, f(x)\big)$, *то существует*

$$f'(x) = -\left[F_y(\mathbf{z})\right]^{-1} F_x(\mathbf{z}) := -\left[F_y\big(x, f(x)\big)\right]^{-1} F_x\big(x, f(x)\big) = -\frac{F_x\big(x, f(x)\big)}{F_y\big(x, f(x)\big)}.$$

Доказательство. Рис. 38 иллюстрирует доказательство теоремы.

I (Существование и локальная единственность). Пусть $F_y(\mathbf{z}_0) > 0$ (случай $F_y(\mathbf{z}_0) < 0$ рассматривается аналогично либо сводится к этому умножением функции F на -1). В силу непрерывности функции F_y в точке $\mathbf{z}_0$ найдутся $a_0, b_0 > 0$ такие, что $F_y(x, y) > 0$ при всех $(x, y) \in O_{a_0}(x_0) \times O_{b_0}(y_0) =: D_0 \subset$ $\subset O_\delta(\mathbf{z}_0)$ и $F \in C\big(\mathrm{cl}(D_0)\big) \cap C^k(D_0)$. Функция $\varphi_{x_0}(y) := F(x_0, y)$ непрерывна и строго возрастает на $[y_0 - b_0, y_0 + b_0]$ в силу того, что $\varphi'_{x_0}(y) = F_y(x_0, y) > 0$ при всех $y \in O_{b_0}(y_0)$ (см. следствие 4.4.2 теоремы Лагранжа), поэтому

$$\varphi_{x_0}(y_0 - b_0) = F(A) < 0, \quad \varphi_{x_0}(y_0 + b_0) = F(B) > 0,$$

где $A := (x_0, y_0 - b_0)$, $B := (x_0, y_0 + b_0)$. В силу непрерывности функции F в точках A и B по теореме 1.10 о локальном знакопостоянстве непрерывных функций найдётся $a_1 \in (0, a_0]$ такое, что $F(\mathbf{z}) < 0$ для всех $\mathbf{z} \in O_{a_1}(A)$ и $F(\mathbf{z}) > 0$ для всех $\mathbf{z} \in O_{a_1}(B)$. Но тогда для всех $x \in O_{a_1}(x_0)$ имеем

$$\varphi_x(y_0 - b_0) = F(x, y_0 - b_0) < 0, \quad \varphi_x(y_0 + b_0) = F(x, y_0 + b_0) > 0.$$

Таким образом, в силу непрерывности и строгого возрастания функции φ_x на $[y_0 - b_0, y_0 + b_0]$ для любого $x \in O_{a_1}(x_0)$ по теореме 3.2.3 Больцано–Коши найдётся единственное $\xi_x \in O_{b_0}(y_0)$ такое, что $F(x, \xi_x) = \varphi_x(\xi_x) = 0$. Для всех $x \in O_{a_1}(x_0)$ определим функцию $f(x) := \xi_x$. Таким образом, $f\colon O_{a_1}(x_0) \to$ $\to O_{b_0}(y_0)$ и утверждение (а) выполнено по определению функции f при $a := a_1$, $b := b_0$.

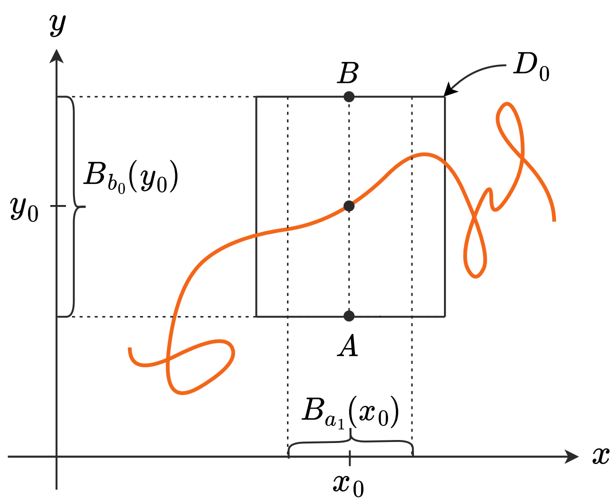


Рис. 38

II (Непрерывность). Пусть $\varepsilon > 0$, положим $b_1 := \min\{b_0, \varepsilon\}$. Проводя рассуждения, аналогичные приведённым выше в пункте I, получим функцию $\widetilde{f}$: $O_{a_2}(x_0) \to O_{b_1}(y_0) \subset O_\varepsilon(y_0)$, для которой выполнено (a), используя которое, для всех $x \in O_{\min\{a_1,a_2\}}(x_0)$ получим $f(x) \equiv \widetilde{f}(x) \in O_\varepsilon(y_0)$, что равносильно непрерывности функции f в точке x_0. Теперь фиксируем любое $x \in O_{a_1}(x_0)$ и $b_2 > 0$ такое, что $O_{b_2}\big(f(x)\big) \subset O_{b_0}(y_0)$. Проводя аналогичные рассуждения для точки $\mathbf{z} := \big(x, f(x)\big)$ (корректные в силу того, что $F_y > 0$ в некотором шаре $O_\delta\big(x, f(x)\big)$, хотя функция F_y, вообще говоря, не является непрерывной в точке $\mathbf{z}$), получим функцию $\widehat{f}\colon O_{a_3}(x) \to O_{b_2}\big(f(x)\big)$ непрерывную в точке x, для которой утверждение (a) выполнено. Но тогда, используя (a), для всех $t \in O_{a_1}(x_0) \cap O_{a_3}(x)$ получим $f(t) \equiv \widehat{f}(t)$, то есть функция f непрерывна в точке x. Таким образом, $f \in C\big(O_{a_1}(x_0)\big)$.

III (Дифференцируемость). Пусть для некоторого $x \in O_{a_1}(x_0)$ существует $F'\big(x, f(x)\big)$. Выберем $\delta_1 > 0$ такое, что $O_{\delta_1}(x) \subset O_{a_1}(x_0)$. Для всех $\Delta x \in$ $\in (-\delta_1, \delta_1)$ положим

$$\Delta f := f(x + \Delta x) - f(x).$$

Таким образом, при $\Delta x \in (-\delta_1, \delta_1)$ по лемме 2.6 имеем

$$\begin{aligned} 0 = F\big(x + \Delta x, f(x + \Delta x)\big) = F\big(x + \Delta x, f(x) + \Delta f\big) = \\ = F\big(x, f(x)\big) + F_x\big(x, f(x)\big)\Delta x + F_y\big(x, f(x)\big)\Delta f + \\ + \alpha(\Delta x, \Delta f)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta f)\Delta f = \\ = \big(F_x\big(x, f(x)\big) + \gamma(\Delta x)\big)\Delta x + \big(F_y\big(x, f(x)\big) + \eta(\Delta x)\big)\Delta f = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $F\big(x, f(x)\big) = 0$, $\Delta f \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ — бесконечно малые. Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_x\big(x, f(x)\big) + \gamma(\Delta x)}{F_y\big(x, f(x)\big) + \eta(\Delta x)} = \frac{F_x\big(x, f(x)\big)}{F_y\big(x, f(x)\big)},$$

из (1) получаем

$$\Delta f = -\left(\frac{F_x\big(x, f(x)\big)}{F_y\big(x, f(x)\big)} + \psi(\Delta x)\right)\Delta x,$$

где ψ — бесконечно малая в нуле функция, что равносильно дифференцируемости функции f в точке x и равенству $f'(x) = -\dfrac{F_x\big(x, f(x)\big)}{F_y\big(x, f(x)\big)}$.

IV (Гладкость). Пусть в условии 2) $k \geqslant 1$. Из рассуждений пункта I вытекает, что

$$F \in C^k\big(O_{a_1}(x_0) \times O_{b_0}(y_0)\big) \subset D\big(O_{a_1}(x_0) \times O_{b_0}(y_0)\big),$$

поэтому $f \in D\big(O_{a_1}(x_0)\big)$ по пункту III.

Покажем по индукции, что $f \in C^k\big(O_{a_1}(x_0)\big)$. Пусть $\mathbb{N}_0 \ni l \leqslant k-1$ и $f \in C^l\big(O_{a_1}(x_0)\big)$. Тогда

$$F_x, F_y \in \underbrace{C^{k-1}\big(O_{a_1}(x_0) \times O_{b_0}(y_0)\big)}_{\substack{\cap \\ C^l\left(O_{a_1}(x_0) \times O_{b_0}(y_0)\right)}}.$$

Используя лемму 2.7, теорему 2.9 о композициях функций класса $\mathbf{C^k}$, а также тот факт, что $\dfrac{1}{x} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, получим

$$f'(x) = -\big[F_y\big(x, f(x)\big)\big]^{-1} F_x\big(x, f(x)\big) \in C^l\big(O_{a_1}(x_0)\big),$$

а следовательно, $f \in C^{l+1}\big(O_{a_1}(x_0)\big)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что все рассуждения остаются в силе, если вместо b_0 в пункте I взять любое число $b \in (0, b_0]$. ◀

Теорема 1$'$. *Пусть* $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \supset \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{z}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0) = (\mathbf{x}_0, y_0) \in \operatorname{int}(\Omega)$ *и*

1) $F(\mathbf{z}_0) = 0$;

2) $\exists \delta > 0, \exists k \in \mathbb{N}_0\colon F \in C^k\big(O_\delta(\mathbf{z}_0)\big)$;

3) F_y *непрерывна в точке* $\mathbf{z}_0$ *и* $F_y(\mathbf{z}_0) \neq 0$.

Тогда существует $b_0 > 0$ *такое, что для любого* $b \in (0, b_0]$ *найдутся число* $a > 0$ *и функция* $f\colon \mathbb{R}^n \supset B_a(\mathbf{x}_0) \to B_b(y_0) \subset \mathbb{R}$, *где* $B_a(\mathbf{x}_0) := O_a(x_0^1) \times \ldots \times O_a(x_0^n)$, $B_b(y_0) := O_b(y_0)$, *для которых выполнено:*

(а) $\forall (\mathbf{x}, y) \in B_a(\mathbf{x}_0) \times B_b(y_0) \subset O_\delta(\mathbf{z}_0)$ *имеем* $F(\mathbf{x}, y) = 0 \iff y = f(\mathbf{x})$ *(в частности,* $f(\mathbf{x}_0) = y_0$*)*;

(б) $f \in C^k\big(B_a(\mathbf{x}_0)\big)$;

(в) *если* $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{x}_0)$ *и* $F \in D\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)$, *то существует*

$$f'(\mathbf{x}) = -\big[F_y\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)\big]^{-1} F'_{\mathbf{x}}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big) = \left(-\frac{F_{x^1}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)}{F_y\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)}, \dots, -\frac{F_{x^n}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)}{F_y\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)}\right).$$

Доказательство. Пункты I, II и IV доказательства теоремы 1$'$ дословно повторяют соответствующие пункты теоремы 1 [Элементарная теорема о неявной функции] с учётом того, что теперь $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ и $B_a(\mathbf{x}) = O_a(x^1) \times \ldots \times O_a(x^n)$. В пункте III по аналогии получим

$$\Delta f = -\left[\left(\frac{F_{x^1}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)}{F_y\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)} + \psi_1(\Delta\mathbf{x})\right)\Delta x^1 + \ldots + \left(\frac{F_{x^n}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)}{F_y\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)} + \psi_n(\Delta\mathbf{x})\right)\Delta x^n\right],$$

где $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x^1, \dots, \Delta x^n)$ и для всех $i \in \overline{1, n}$ функции $\psi_i(\Delta\mathbf{x})$ являются бесконечно малыми при $\Delta\mathbf{x} \to \mathbf{0}$, а затем воспользуемся леммой 2.6. ◀

Замечание 1. Из утверждения (в) теоремы 1′ следует, что если $F \in D\big(O_\delta(\mathbf{z}_0)\big)$ и функция F_{x^i} непрерывна в точке $\mathbf{z}_0$, то функция f_{x^i} непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.

Теорема 2 (о неявной функции). *Пусть* $F = (F^1, \ldots, F^m)\colon \mathbb{R}^{n+m} \supset \Omega \to \to \mathbb{R}^m$, $(x_0^1, \ldots, x_0^n, y_0^1, \ldots, y_0^m) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) =: \mathbf{z}_0 \in \operatorname{int}(\Omega)$ *и*

1) $F(\mathbf{z}_0) = \mathbf{0}$;

2) $\exists \delta > 0, \exists k \in \mathbb{N}_0\colon F \in C^k\big(O_\delta(\mathbf{z}_0)\big) \cap D\big(O_\delta(\mathbf{z}_0)\big)$;

3) $\forall i, j \in \overline{1, m}$ *функции* $F^i_{y_j}$ *непрерывны в точке* $\mathbf{z}_0$ *и* $\det F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}_0) \neq 0$.

Тогда существует $b_0 > 0$ *такое, что для любого* $b \in (0, b_0]$ *найдутся число* $a > 0$ *и функция* $f = (f^1, \ldots, f^m)\colon \mathbb{R}^n \supset B_a(\mathbf{x}_0) \to B_b(\mathbf{y}_0) \subset \mathbb{R}^m$, *где* $B_a(\mathbf{x}_0) := := O_a(x_0^1) \times \ldots \times O_a(x_0^n)$, $B_b(\mathbf{y}_0) := O_b(y_0^1) \times \ldots \times O_b(y_0^m)$, *для которых выполнено:*

(а) $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B_a(\mathbf{x}_0) \times B_b(\mathbf{y}_0) \subset O_\delta(\mathbf{z}_0)$ *имеем* $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ (*в частности,* $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$);

(б) $f \in C^k\big(B_a(\mathbf{x}_0)\big) \cap D\big(B_a(\mathbf{x}_0)\big)$;

(в) *для всех* $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{x}_0)$ *существует*

$$f'(\mathbf{x}) = -\left[F'_{\mathbf{y}}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)\right]^{-1} F'_{\mathbf{x}}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big), \tag{2}$$

где

$$F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} F^1_{x^1}, & \ldots, & F^1_{x^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F^m_{x^1}, & \ldots, & F^m_{x^n} \end{bmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

$$F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} F^1_{y^1}, & \ldots, & F^1_{y^m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F^m_{y^1}, & \ldots, & F^m_{y^m} \end{bmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f^1_{x^1}, & \ldots, & f^1_{x^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f^m_{x^1}, & \ldots, & f^m_{x^n} \end{bmatrix} (\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Доказательство. При $m = 1$ теорема верна, так как верна теорема 1′. Пусть $m \geqslant 2$ и теорема верна для $m - 1$. В силу условия 3) найдётся $\delta' \in (0, \delta]$ такое, что $\det F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$ для всех $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in O_{\delta'}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. Так как $\det F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$, некоторый элемент последней строки этой матрицы не равен 0. Не ограничивая общности, будем считать, что $F^m_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$. Тогда для последнего уравнения системы

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \tag{3}$$

то есть для уравнения $F^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, применима теорема 1′, в которой роль δ играет число δ'. Таким образом, найдутся числа $a_1, b_1 > 0$ и функция φ :

$B_{a_1}(\mathbf{x}_0) \times B_{a_1}(\widetilde{\mathbf{y}}_0) = B_{a_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) \to O_{b_1}(y_0^m)$ такие, что

$$F^m(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}, y^m) = 0 \iff y^m = \varphi(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}})$$

для всех $(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}, y^m) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B_{a_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) \times O_{b_1}(y_0^m) \subset O_{\delta'}(\mathbf{z}_0)$, где $\widetilde{\mathbf{y}} :=$ $:= (y^1, \ldots, y^{m-1})$ и $\varphi \in C^k(B_{a_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0)) \cap D(B_{a_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0))$. Заменяя последнее уравнение системы (3) на уравнение $y^m = \varphi(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}) = \varphi(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^{m-1})$ и подставляя $\varphi(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}})$ вместо y^m в первые $m-1$ уравнений (3), получим систему

$$\begin{cases} \widetilde{F}^i(\overbrace{x^1, \ldots, x^n}^{\mathbf{x}}, \overbrace{y^1, \ldots, y^{m-1}}^{\widetilde{\mathbf{y}}}) = 0, \quad i \in \overline{1, m-1}; \\ y^m = \varphi(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^{m-1}), \end{cases} \tag{4}$$

где $\widetilde{F}^i(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}) := F^i(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}, \varphi(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}))$, *равносильную* системе (3) при $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in$ $\in B_{a_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) \times O_{b_1}(y_0^m)$. В силу равенства $y_0^m = \varphi(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}_0})$ получим $\widetilde{F}^i(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) =$ $= F^i(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$ для всех $i \in \overline{1, m-1}$. Так как $F^i \in C^k(O_{\delta'}(\mathbf{z}_0)) \cap D(O_{\delta'}(\mathbf{z}_0))$ по лемме 2.5 о покомпонентной дифференцируемости, используя теоремы 2.5 о дифференцируемости композиции функций и 2.9 о композициях функций класса $\mathbf{C^k}$, получим

$$\widetilde{F}^i \in C^k(B_{a_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0)) \cap D(B_{a_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0))$$

для всех $i \in \overline{1, m-1}$. Снова используя лемму 2.5 о покомпонентной дифференцируемости и выбирая $\delta_1 > 0$ так, что $O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) \subset B_{a_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0)$, получим

$$\widetilde{F} := (\widetilde{F}^1, \ldots, \widetilde{F}^{m-1}) \in C^k(O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0)) \cap D(O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0)).$$

Используя следствие 2.3, для всех $i, p \in \overline{1, m-1}$ получим, что функции

$$\widetilde{F}^p_{y^i}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}) = F^p_{y^i}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}, \varphi(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}})) + F^p_{y^m}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}, \varphi(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}))\varphi_{y^i}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}) \colon O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) \to \mathbb{R}$$

непрерывны в точке $(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0)$ в силу непрерывности суммы, произведения и композиции непрерывных функций (см. теоремы 1.6′-1.8′), а также в силу дифференцируемости функции F^m в $O_{\delta'}(\mathbf{z}_0)$, непрерывности функций $F^m_{y^i}$ в точке $\mathbf{z}_0$ и замечания 1 (отметим, что именно в этом месте доказательства мы существенно используем требование дифференцируемости функции F в окрестности точки $\mathbf{z}_0$). В силу тождества $F^m(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}, \varphi(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}})) \equiv 0$ для всех $(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}) \in O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0)$ также имеем

$$0 = F^m_{y^i}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0, \varphi(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0)) + F^m_{y^m}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0, \varphi(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0))\varphi_{y^i}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) =$$
$$= F^m_{y^i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + F^m_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\varphi_{y^i}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0)$$

для всех $i \in \overline{1, m-1}$. Добавлением к i-м столбцам матрицы $F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ её последнего столбца, умноженного соответственно на $\varphi_{y^i}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0)$ при $i \in \overline{1, m-1}$, получим

$$0 \neq \det F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \begin{matrix} F^1_{y^1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)+ \\ +F^1_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\times \\ \times\varphi_{y^1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) \end{matrix} & \ldots & \begin{matrix} F^1_{y^{m-1}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)+ \\ +F^1_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\times \\ \times\varphi_{y^{m-1}}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) \end{matrix} & F^1_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \begin{matrix} F^m_{y^1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)+ \\ +F^m_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\times \\ \times\varphi_{y^1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) \end{matrix} & \ldots & \begin{matrix} F^m_{y^{m-1}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)+ \\ +F^m_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\times \\ \times\varphi_{y^{m-1}}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0), \end{matrix} & F^m_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \widetilde{F}^1_{y^1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) & \ldots & \widetilde{F}^1_{y^{m-1}}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) & F^1_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \widetilde{F}^{m-1}_{y^1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) & \ldots & \widetilde{F}^{m-1}_{y^{m-1}}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) & F^{m-1}_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ 0 & \ldots & 0 & F^m_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{bmatrix} =$$

$$= F^m_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \det \widetilde{F}'_{\widetilde{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0).$$

Отсюда, поскольку $F^m_{y^m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$, получаем $\det \widetilde{F}'_{\widetilde{\mathbf{y}}}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) \neq 0$. Тогда по *предположению индукции* найдутся числа $a_2, b_2 > 0$ и функция $\widetilde{f} = (f^1, \ldots, f^{m-1}) : B_{a_2}(\mathbf{x}_0) \to B_{b_2}(\widetilde{\mathbf{y}}_0)$ такие, что для всех $(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}) \in B_{a_2}(\mathbf{x}_0) \times B_{b_2}(\widetilde{\mathbf{y}}_0) \subset \subset O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) \subset B_{a_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0)$ имеем

$$\widetilde{F}(\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{0} \iff \widetilde{\mathbf{y}} = \widetilde{f}(\mathbf{x}) \in C^k\big(B_{a_2}(\mathbf{x}_0)\big) \cap D\big(B_{a_2}(\mathbf{x}_0)\big).$$

Таким образом, для всех $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B_{a_2}(\mathbf{x}_0) \times B_{b_2}(\widetilde{\mathbf{y}}_0) \times O_{b_1}(y^m_0)$ имеем

$$(4) \iff \begin{cases} y^1 = f^1(\mathbf{x}), \\ \ldots \\ y^{m-1} = f^{m-1}(\mathbf{x}), \\ y^m = \varphi(\mathbf{x}, y^1, \ldots, y^{m-1}) \end{cases} \iff \begin{cases} y^1 = f^1(\mathbf{x}), \\ \ldots \\ y^{m-1} = f^{m-1}(\mathbf{x}), \\ y^m = f^m(\mathbf{x}) \end{cases} \iff \mathbf{y} = f(\mathbf{x}),$$

где $f^m(\mathbf{x}) := \varphi\big(\mathbf{x}, f^1(\mathbf{x}), \ldots, f^{m-1}(\mathbf{x})\big)$ и $f := (f^1, \ldots, f^m)$. Используя теоремы 2.5 о дифференцируемости композиции функций и 2.9 о композициях функций класса $\mathbf{C^k}$, получим $f^m \in C^k\big(B_{a_2}(\mathbf{x}_0)\big) \cap D\big(B_{a_2}(\mathbf{x}_0)\big)$. Таким образом, $f \in \in C^k\big(B_{a_2}(\mathbf{x}_0)\big) \cap D\big(B_{a_2}(\mathbf{x}_0)\big)$ по лемме 2.5 о покомпонентной дифференцируемости. Положим $b_0 := \min\{b_1, b_2\}$. В силу непрерывности функции f в точке $\mathbf{x}_0$ для любого $b \in (0, b_0]$ найдётся $a \in (0, a_2]$ такое, что $f\colon B_a(\mathbf{x}_0) \to B_b(\mathbf{y}_0)$. Пройдя по цепочке эквивалентных систем и используя то, что две системы, эквивалентные на некотором множестве, также эквивалентны на любом его подмножестве, так как $B_a(\mathbf{x}_0) \subset B_{a_2}(\mathbf{x}_0)$, $B_b(\mathbf{y}_0) \subset B_{b_2}(\widetilde{\mathbf{y}}_0) \times O_{b_1}(y_0^m)$, окончательно для всех $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B_a(\mathbf{x}_0) \times B_b(\mathbf{y}_0)$ получим $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ и $F\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big) \equiv \equiv \mathbf{0}$ для всех $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{x}_0)$. Но тогда для всех $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{x}_0)$ в силу вложений

$$B_a(\mathbf{x}_0) \times B_b(\mathbf{y}_0) \subset B_{a_2}(\mathbf{x}_0) \times B_{b_2}(\widetilde{\mathbf{y}}_0) \times O_{b_1}(y_0^m) \subset$$
$$\subset O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) \times O_{b_1}(y_0^m) \subset B_{a_1}(\mathbf{x}_0, \widetilde{\mathbf{y}}_0) \times O_{b_1}(y_0^m) \subset O_{\delta'}(\mathbf{z}_0)$$

по теореме 2.5 о дифференцируемости композиции функций имеем

$$\mathbf{0} \equiv \big[F\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)\big]' = F'\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big) \left[\frac{I}{f'(\mathbf{x})}\right] =$$
$$= \Big[F'_{\mathbf{x}}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big) \big| F'_{\mathbf{y}}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)\Big] \left[\frac{I}{f'(\mathbf{x})}\right] = F'_{\mathbf{x}}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big) + F'_{\mathbf{y}}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big) f'(\mathbf{x}).$$

В силу существования $\big[F'_{\mathbf{y}}\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)\big]^{-1}$ для всех $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{x}_0)$ выполнено утверждение (в). ◀

Замечание 2. Другое изящное и универсальное (допускающее обобщение на бесконечномерный случай) доказательство теоремы 2 о неявной функции основано на *принципе неподвижной точки* (см., например, [19, с. 299]). При таком подходе теоремы 1 и 1′ являются частными случаями теоремы 2 о неявной функции, а для доказательства существования, локальной единственности и непрерывности неявной функции в точке $\mathbf{x}_0$ вместо условия 2) теоремы 2 о неявной функции достаточно потребовать лишь непрерывности функции $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$ в точке $\mathbf{x}_0$ (при таких условиях применимо, например, доказательство [8, с. 546]). При этом если $F \in C^k\big(O_\delta(\mathbf{z}_0)\big)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}_0$, то $f \in C^k\big(B_a(\mathbf{x}_0)\big)$, а если $F \in D\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)$ для некоторого $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{x}_0)$, то $f \in D(\mathbf{x})$ и выполнено равенство (2). Также можно показать (см. [2, с. 112]), что для существования $f'(x_0)$ и справедливости формулы (2) достаточно потребовать существование $F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}_0)$, а для существования $f'_{x_i}(\mathbf{x}_0)$ для некоторого $i \in \overline{1, n}$ достаточно лишь существования $F'_{x_i}(\mathbf{z}_0)$, при этом для $f'_{x_i}(\mathbf{x}_0)$ имеет место представление, вытекающее из (2). Формулировку и доказательство теоремы 2 о неявной функции в терминах *строгой (частной) дифференцируемости* можно найти, например, в [48], а достаточно полный обзор различных вариантов и обобщений этой теоремы содержится в [36]. Вывод условия строгой дифференцируемости из непрерывности частных производных приведён в [44].

Замечание 3. Условия существования неявной функции f в теоремах 1, 1′, 2 являются достаточными, но отнюдь не необходимыми. Например, уравнения $F(x, y, z) := |z| = 0$ или $F(x, y, z) := z^2 = 0$ определяют однозначную функцию

$z = f(x, y) \equiv 0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, хотя в первом случае $\nexists F_z(0,0,0)$, а во втором имеем $F_z(0,0,0) = 0$, поэтому условия теорем $1'$ и 2 не выполнены в точке $(0,0,0)$.

Далее приведём теорему, являющуюся следствием теоремы 2 (и поэтому допускающую соответствеющие модификации, согласно замечанию 2).

Теорема 2′ (об обратной функции). *Пусть* $g = (g^1, \ldots, g^m)\colon \mathbb{R}^m \supset \Omega \to \to \mathbb{R}^m$, $(y_0^1, \ldots, y_0^m) =: \mathbf{y}_0 \in \operatorname{int}(\Omega)$ *и*

1) $\exists \delta > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}_0\colon g \in C^k\big(O_\delta(\mathbf{y}_0)\big) \cap D\big(O_\delta(\mathbf{y}_0)\big)$;

2) $\forall i, j \in \overline{1, m}$ *функции* $g^i_{y_j}$ *непрерывны в точке* $\mathbf{y}_0$ *и* $\det g'(\mathbf{y}_0) \neq 0$.

Тогда существует $b_0 > 0$ *такое, что для любого* $b \in (0, b_0]$ *найдутся число* $a > 0$ *и функция* $f = (f^1, \ldots, f^m)\colon \mathbb{R}^m \supset B_a(\mathbf{x}_0) \to B_b(\mathbf{y}_0) \subset \mathbb{R}^m$, *где* $\mathbf{x}_0 := := g(\mathbf{y}_0)$, $B_a(\mathbf{x}_0) := O_a(x_0^1) \times \ldots \times O_a(x_0^m)$, $B_b(\mathbf{y}_0) := O_b(y_0^1) \times \ldots \times O_b(y_0^m) \subset \subset O_\delta(\mathbf{y}_0)$, *для которых выполнено:*

(а) $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B_a(\mathbf{x}_0) \times B_b(\mathbf{y}_0)$ *имеем* $\mathbf{x} = g(\mathbf{y}) \iff \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ (*в частности,* $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$);

(б) *существует открытое линейно связное* (см. определение 1.6) *множество* $U \subset B_b(\mathbf{y}_0)$ *такое, что* $\mathbf{y}_0 \in U$ *и сужение* $g\big|_U\colon U \to B_a(\mathbf{x}_0)$ (см. определение 0.5.6) *является биекцией, причём функции* $g\big|_U$ *и* f *взаимно обратны* (см. определение 0.5.12), *то есть* $f = g\big|_U^{-1}$;

(в) $f \in C^k\big(B_a(\mathbf{x}_0)\big) \cap D\big(B_a(\mathbf{x}_0)\big)$ (*в силу* (б) *это означает, что функция* $g\big|_U$ *по определению является* C^k*-диффеоморфизмом*);

(г) *для всех* $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{x}_0)$ *существует*

$$f'(\mathbf{x}) = \big[g'\big(f(\mathbf{x})\big)\big]^{-1}. \tag{5}$$

Доказательство. Определим функцию $F\colon \mathbb{R}^m \times O_\delta(\mathbf{y}_0) \to \mathbb{R}^m$ формулой $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := g(\mathbf{y}) - \mathbf{x}$. Нетрудно убедиться, что функция F удовлетворяет всем условиям теоремы 2 о неявной функции в точке $\mathbf{z}_0 := (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in R^{2m}$ (равенство $F'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [-I | g'(\mathbf{y})]$ для всех $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in O_\delta(\mathbf{z}_0)$ проверяется непосредственно по определению 2.4 производной). Записывая для функции F утверждения (а), (б), (в) теоремы 2 о неявной функции, получим соответственно утверждения (а), (в), (г).

Для доказательства утверждения (б) рассмотрим сужение $\widetilde{g}$ функции g на открытое множество $B_b(\mathbf{y}_0)$. Рассматривая $B_b(\mathbf{y}_0)$ как топологическое подпространство в $\mathbb{R}^m$, в силу непрерывности функции g на $O_\delta(\mathbf{y}_0)$ получим, что функция $\widetilde{g}$ является *непрерывной*, отсюда в силу открытости множества $B_a(\mathbf{x}_0)$ в $\mathbb{R}^m$ по теореме 10.2.6 получим, что его прообраз $U := \widetilde{g}^{-1}[(B_a(\mathbf{x}_0)]$ *открыт* в пространстве $B_b(\mathbf{y}_0)$, а следовательно, и в $\mathbb{R}^m$ (так как множество $B_b(\mathbf{y}_0)$ само является открытым в $\mathbb{R}^m$). По определению множества U имеем вложение $g(U) \subset B_a(\mathbf{x}_0)$. Также для любого $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{x}_0)$ имеем $f(\mathbf{x}) \in B_b(\mathbf{y}_0)$

и $g\big(f(\mathbf{x})\big) = \mathbf{x}$ по утверждению (а), а следовательно, $f(\mathbf{x}) \in U$ и $g(U) = B_a(\mathbf{x}_0)$. Снова используя утверждение (а), убеждаемся в инъективности, а следовательно и в биективности отображения $g\big|_U : U \to B_a(\mathbf{x}_0)$, а также в равенстве $f = g\big|_U^{-1}$. Линейная связность множества U вытекает из линейной связности множества $B_a(\mathbf{x}_0)$, непрерывности функции f и теоремы 1.8′ о непрерывности композиции непрерывных функций. ◄

Замечание 4. Отметим, что из непрерывности всех частных производных всех функций g^i в точке $\mathbf{y}_0$ вытекает равномерная непрерывность функции g в некоторой окрестности этой точки в силу утверждения 2.2 и леммы 1.4 о покомпонентной равномерной непрерывности, а также её дифференцируемость в самой точке $\mathbf{y}_0$ в силу теоремы 2.3 о достаточном условии дифференцируемости и леммы 2.5 о покомпонентной дифференцируемости. Таким образом (см. замечание 2), если в теореме 2′ об обратной функции отказаться от условия 1), то останутся верным утверждения (а), (б) и $f \in C\big(B_a(\mathbf{x}_0)\big) \cap D(\mathbf{x}_0)$. При этом если $g \in C^k\big(O_\delta(\mathbf{y}_0)\big)$, то $f \in C^k\big(B_a(\mathbf{x}_0)\big)$, а если $g \in D\big(f(\mathbf{x})\big)$ для некоторого $\mathbf{x} \in B_a(\mathbf{x}_0)$, то $f \in D(\mathbf{x})$ и выполнено равенство (5).

Замечание 5. Число a в теоремах 1, 1′, 2 и 2′, так же как и число b, можно неограниченно уменьшать. Действительно, для любого $\widetilde{a} \in (0, a]$, рассматривая сужение $\widetilde{f} := f\big|_{B_{\widetilde{a}}(\mathbf{x}_0)}$ функции f на куб $B_{\widetilde{a}}(\mathbf{x}_0)$, получим выполнение утверждений этих теорем при замене a и f на $\widetilde{a}$ и $\widetilde{f}$ соответственно.

Замечание 6. Теоремы 2 о неявной функции и 2′ об обратной функции являются двойственными, то есть одна из них выводится из другой и наоборот. Одно из изящных доказательств теоремы 2′ об обратной функции (правда, при завышенном требовании принадлежности функции g классу C^1 в некоторой окрестности точки $\mathbf{y}_0$) можно найти в [24, с. 231–236].

§ 9.4. Экстремум

9.4.1. Безусловный экстремум

Определение 1. Точка $\mathbf{z}_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ называется ***точкой (строгого) локального минимума функции*** $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, если существует $\delta > 0$ такое, что $f(\mathbf{z}_0) \leqslant f(\mathbf{z})$ $\big(f(\mathbf{z}_0) < f(\mathbf{z})\big)$ для всех $\mathbf{z} \in \mathring{O}_\delta(\mathbf{z}_0) \cap \mathrm{Dom}(f)$.

Определение 2. Точка $\mathbf{z}_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ называется ***точкой (строгого) локального максимума функции*** $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, если существует $\delta > 0$ такое, что $f(\mathbf{z}_0) \geqslant f(\mathbf{z})$ $\big(f(\mathbf{z}_0) > f(\mathbf{z})\big)$ для всех $\mathbf{z} \in \mathring{O}_\delta(\mathbf{z}_0) \cap \mathrm{Dom}(f)$.

Определение 3. Точки $\mathbf{z}_0$, указанные в определениях 1 и 2, называются ***точками экстремума функции*** $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Теорема 1 [Необходимое условие экстремума]. *Пусть $\mathbf{z}_0$ — точка экстремума функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и для некоторого $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ существует $D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{z}_0)$. Тогда $D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{z}_0) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(t) \coloneqq f(\mathbf{z}_0 + t\mathbf{h})\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. По определению 2.6 производной по вектору имеем существование $g'(0) =\colon D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{z}_0)$. Из определения 3 вытекает, что функция g имеет экстремум в точке $t = 0$, отсюда по теореме 4.4.2 о необходимом условии экстремума [Лемма Ферма] получим $g'(0) = 0$. В частности, если $\mathbf{h} = \mathbf{e}_i$ — i-й вектор *естественного базиса* в $\mathbb{R}^n$, тогда $\partial_i f(\mathbf{z}_0) = 0$. ◀

Следствие 1 теорем 1 и 2.2. *Если $\mathbf{z}_0$ — точка экстремума функции $f\colon\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f \in D(\mathbf{z}_0)$, то $f'(\mathbf{z}_0) = \mathbf{0}$ и $df(\mathbf{z}_0) = \mathbf{0}$.*

Определение 4. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f \in D^2(\mathbf{z}_0)$. Тогда $d^2f(\mathbf{z}_0)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ есть *билинейная*, а $d^2f(\mathbf{z}_0, \cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — *квадратичная форма*. Определим $f''(\mathbf{z}_0)$ как *матрицу* этих форм в естественном базисе, то есть согласно замечанию 2.17 имеем:

$$f''(\mathbf{z}_0) \coloneqq \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f & \ldots & \partial_n\partial_1 f \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_1\partial_n f & \ldots & \partial_n\partial_n f \end{bmatrix} (\mathbf{z}_0).$$

Таким образом, $d^2f(\mathbf{z}_0)\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 = \langle f''(\mathbf{z}_0)\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\rangle$ и $d^2f(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}) \coloneqq d^2f(\mathbf{z}_0)\mathbf{h}\mathbf{h} = \langle f''(\mathbf{z}_0)\mathbf{h}, \mathbf{h}\rangle$ для всех $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. По теореме 2.17 (следствие теоремы 16 Янга) получаем, что матрица $f''(\mathbf{z}_0)$, а значит, и билинейная форма $d^2f(\mathbf{z}_0)$ являются *симметричными*.

Определение 5. *Квадратичная форма* $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется ***положительно*** [***неотрицательно***] ***определённой***, если $B(\mathbf{h}) > 0$ $[B(\mathbf{h}) \geqslant 0]$ для всех $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. При этом используются обозначения $B > 0$ $[B \geqslant 0]$.

Определение 6. *Квадратичная форма* $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется ***отрицательно*** [***неположительно***] ***определённой***, если $B(\mathbf{h}) < 0$ $[B(\mathbf{h}) \leqslant 0]$ для всех $\mathbf{h} \neq 0$. При этом используются обозначения $B < 0$ $[B \leqslant 0]$.

Определение 7. *Квадратичная форма* $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется ***знакопеременной***, если существуют $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^n$ такие, что $B(\mathbf{h}_1) < 0$ и $B(\mathbf{h}_2) > 0$.

Теорема 2 [Критерий Сильвестра] (см. курс алгебры). *Пусть $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — квадратичная форма, $\widetilde{B}$ — её симметричная матрица в естественном базисе. Обозначим через $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ угловые миноры матрицы $\widetilde{B}$. Тогда*

(1.а) $B > 0 \iff$ *все собственные значения матрицы $\widetilde{B}$ положительны* $\iff \Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.

(1.б) $B \geqslant 0 \iff$ *все собственные значения матрицы $\widetilde{B}$ неотрицательны* $\iff$ *все главные (не только угловые!) миноры матрицы $\widetilde{B}$ неотрицательны.*

(2.а) $B < 0 \iff$ *все собственные значения матрицы $\widetilde{B}$ отрицательны* $\iff \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$.

(2.б) $B \leqslant 0 \iff$ *все собственные значения матрицы $\widetilde{B}$ неположительны* $\iff$ *все главные (не только угловые!) миноры матрицы $\widetilde{B}$ чётного порядка неотрицательны, а нечётного — неположительны.*

Теорема 3 [Достаточное условие экстремума]. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in D^2(\mathbf{z}_0)$ и выполнено необходимое условие экстремума в точке $\mathbf{z}_0$, то есть $df(\mathbf{z}_0) = \mathbf{0}$* (см. следствие 1). *Тогда:*

(а) *если $d^2 f(\mathbf{z}_0, \cdot) > 0$, то $\mathbf{z}_0$ — точка строгого локального минимума;*

(б) *если $d^2 f(\mathbf{z}_0, \cdot) < 0$, то $\mathbf{z}_0$ — точка строгого локального максимума;*

(в) *если $d^2 f(\mathbf{z}_0, \cdot)$ — знакопеременная форма, то в точке $\mathbf{z}_0$ экстремума нет.*

Доказательство. При доказательстве теоремы воспользуемся методом, изложенным в монографии Ф.П. Васильева [4]. Для начала докажем утверждение (а) (утверждение (б) доказывается аналогично либо сводится к (а) умножением функции f на -1). Пусть $d^2 f(\mathbf{z}_0, \cdot) > 0$ и $\mathbf{z}_0$ *не является* точкой строгого локального минимума, то есть существует последовательность $\mathbf{z}_m \to \mathbf{z}_0$ такая, что $f(\mathbf{z}_m) \leqslant f(\mathbf{z}_0)$ и $\mathbf{z}_m \neq \mathbf{z}_0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Обозначая $0 \neq \|\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_0\| =: \alpha_m \to 0$, $(1/\alpha_m)(\mathbf{z}_m - \mathbf{z}_0) =: \mathbf{d}_m$, получим $\mathbf{z}_m = \mathbf{z}_0 + \alpha_m \mathbf{d}_m$, где $\|\mathbf{d}_m\| = 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$. В силу компактности единичной сферы (см. лемму 1.6) и теоремы 8.0.1 о секвенциальной компактности существует подпоследовательность $\mathbf{d}_{m_k} =: \mathbf{e}_k \to \mathbf{e}$, причём $\|\mathbf{e}\| = 1$ (данный факт также вытекает из теоремы 1.2 Больцано–Вейерштрасса и леммы 1.5 о непрерывности нормы). Обозначим $\mathbf{x}_k := \mathbf{z}_{m_k}$, $t_k := \alpha_{m_k}$. Тогда $\mathbf{x}_k = \mathbf{z}_0 + t_k \mathbf{e}_k$ и

$$\begin{aligned} 0 \geqslant f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{z}_0) &\overset{\text{Т. 2.20}}{=} df(\mathbf{z}_0, t_k\mathbf{e}_k) + \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{z}_0, t_k\mathbf{e}_k) + o(\|t_k\mathbf{e}_k\|^2) = \\ &= t_k df(\mathbf{z}_0)\mathbf{e}_k + \frac{1}{2} t_k^2 d^2 f(\mathbf{z}_0, \mathbf{e}_k) + o(t_k^2), \end{aligned} \tag{1}$$

где $df(\mathbf{z}_0) = \mathbf{0}$. Разделив неравенство (1) на t_k^2 и перейдя к пределу при $k \to \infty$, в силу непрерывности многочлена $d^2 f(\mathbf{z}_0, \cdot)$ (непрерывность многочленов следует из леммы 1.1 о покомпонентной сходимости, определения 1.1′ Гейне и теоремы 2.1.3 об арифметических операциях над сходящимися последовательностями)

получим
$$\frac{d^2 f(\mathbf{z}_0, \mathbf{e})}{2} \leqslant 0$$
по теореме 2.1.1 о предельном переходе в неравенстве. Так как $\|\mathbf{e}\| = 1 \neq 0$, последнее неравенство противоречит условию $d^2 f(\mathbf{z}_0, \cdot) > 0$.

Перейдём к доказательству утверждения (в). Существуют $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^n$ такие, что $d^2 f(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}_1) < 0$ и $d^2 f(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}_2) > 0$. Для некоторого $\delta > 0$ для всех $t \in (-\delta, \delta)$ при $i = 1, 2$ имеем
$$f(\mathbf{z}_0 + t\mathbf{h}_i) - f(\mathbf{z}_0) \overset{\text{Т. } 2.20}{=} \overbrace{df(\mathbf{z}_0, t\mathbf{h}_i)}^{0} + \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{z}_0, t\mathbf{h}_i) + o(\|t\mathbf{h}_i\|^2) =$$
$$= \frac{1}{2} t^2 d^2 f(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}_i) + o(t^2).$$
Таким образом, имеем
$$\frac{f(\mathbf{z}_0 + t\mathbf{h}_i) - f(\mathbf{z}_0)}{t^2} \xrightarrow{t \to 0} \begin{cases} \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}_1) < 0 & \text{при } i = 1; \\ \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}_2) > 0 & \text{при } i = 2, \end{cases}$$
отсюда следует, что $\mathbf{z}_0$ *не является точкой экстремума*. ◀

Замечание 1. Отметим, что условие $f \in D^2(\mathbf{z}_0)$ в теореме 3 [Достаточное условие экстремума] может быть заменено более слабым условием $f \in \widetilde{D}^2(\mathbf{z}_0)$ (см. определение 2.15 минимальной k-кратной дифференцируемости). При этом для её доказательства достаточно воспользоваться замечанием 2.27.

Пример 1. Непрерывная функция двух переменных, имеющая *единственный локальный экстремум* (минимум), не являющийся *глобальным*.
$$f(x, y) = x^2 + y^2(1 - x)^3.$$
Нетрудно убедиться, что $(0, 0)$ — единственная критическая точка, являющаяся точкой локального минимума функции f, но $f(4, 1) = -11 < f(0, 0) = 0$.

9.4.2. Условный экстремум

Всюду в этом параграфе будем предполагать, что $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $n := k + m$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (***целевая функция***), $F = (F^1, \ldots, F^m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(F)$ — *открытое* множество. Определим множество
$$S := \{\mathbf{z} \in \mathrm{Dom}(F) : F(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\}. \tag{2}$$

Определение 8. Точка $\mathbf{z}_0 \in S$ называется ***точкой (строгого) условного минимума функции f на множестве S*** (или ***при ограничениях*** $F(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, которые также иногда называют ***условиями связи***), если существует $\delta > 0$ такое, что $f(\mathbf{z}_0) \leqslant f(\mathbf{z})$ $\big(f(\mathbf{z}_0) < f(\mathbf{z})\big)$ для всех $\mathbf{z} \in \overset{\circ}{O}_\delta(\mathbf{z}_0) \cap S$.

Определение 9. Точка $\mathbf{z}_0 \in S$ называется ***точкой (строгого) условного максимума функции f на множестве S*** (или ***при ограничениях $F(\mathbf{z})=\mathbf{0}$***), если существует $\delta>0$ такое, что $f(\mathbf{z}_0) \geqslant f(\mathbf{z})$ $\big(f(\mathbf{z}_0)>f(\mathbf{z})\big)$ для всех $\mathbf{z} \in \overset{\circ}{O}_\delta(\mathbf{z}_0) \cap S$.

Определение 10. Точки z_0, указанные в определениях 8 и 9, называются ***точками условного экстремума*** функции f ***на множестве*** S.

Задачу о нахождении точек условного экстремума часто обозначают следующим образом: $f|_S \to \mathrm{extr}$.

Определение 11. Пусть $F \in D(\mathbf{z}_0)$. ***Рангом дифференцируемого отображения $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке*** $\mathbf{z}_0$ называется число $\mathrm{rank} F(\mathbf{z}_0) := \mathrm{rank}\big(F'(\mathbf{z}_0)\big)$, равное *рангу матрицы* $F'(\mathbf{z}_0)$.

Определение 12 (дифференцируемой k-мерной поверхности). Пусть $F(\mathbf{z}_0) = \mathbf{0}$ (то есть $\mathbf{z}_0 \in S$) и существует $\delta > 0$ такое, что $F \in D\big(O_\delta(\mathbf{z}_0)\big)$. Пусть также $\mathrm{rank} F(\mathbf{z}_0) = m$ (в этом случае точку $\mathbf{z}_0$ называют *нормальной*). Тогда существуют попарно различные номера $i_1, \ldots, i_m \in \overline{1,n}$ $(n = k+m)$ такие, что $\det F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}_0) \neq 0$, где $y^1 := z^{i_1}, \ldots, y^m := z^{i_m}$, $\mathbf{y} := (y^1, \ldots, y^m)$. Не ограничивая общности (так как можно перенумеровать переменные z^i) будем предполагать, что $i_q = k+q$ для всех $q \in \overline{1,m}$, то есть $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$, где $\mathbf{x}_0 = (z_0^1, \ldots, z_0^k)$, $\mathbf{y}_0 = (z_0^{k+1}, \ldots, z_0^{k+m})$ и $\det F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$. Если для всех $i, j \in \overline{1,m}$ функции $F^i_{y_j}$ *непрерывны в точке* $\mathbf{z}_0$, то множество S, определённое равенством (2), будем называть ***дифференцируемой k-мерной поверхностью в точке*** $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$.

Если $F \in C^p\big(\mathrm{Dom}(F)\big)$ при $p \geqslant 1$ и $\mathrm{rank} F(\mathbf{z}) = m$ для всех $\mathbf{z} \in \mathrm{Dom}(F)$, то S называют ***гладкой k-мерной поверхностью класса C^p***.

Замечание 2. Отметим, что для рассматриваемых в нашем курсе приложений условие $F \in D\big(O_\delta(\mathbf{z}_0)\big)$ в определении 12 дифференцируемой k-мерной поверхности носит чисто технический характер (см. замечание 3.2) и может быть заменено на существенно более слабое условие существования $F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}_0)$.

Определение 13 (касательного подпространства). Пусть S $\big($см. (2)$\big)$ — дифференцируемая k-мерная поверхность в точке $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. ***Касательным k-мерным подпространством к поверхности S в точке*** $\mathbf{z}_0$ называется *k-мерное линейное пространство*

$$TS_{\mathbf{z}_0} := \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{k+m} : F'(\mathbf{z}_0)\mathbf{h} = \mathbf{0}\}.$$

Касательной k-мерной плоскостью к поверхности S в точке $\mathbf{z}_0$ называется *k-мерное линейное многообразие*

$$\pi := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{k+m} : F'(\mathbf{z}_0)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) = \mathbf{0}\} = TS_{\mathbf{z}_0} + \mathbf{z}_0.$$

Замечание 3. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Тогда множество

$$S : z = f(x,y) \iff F(x,y,z) := z - f(x,y) = 0$$

может быть рассмотрено (см. замечание 2) как *дифференцируемая двухмерная поверхность* в точке $\mathbf{u}_0 := \big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$, при этом

$$\pi : z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

является касательной плоскостью к поверхности S в этой точке. Таким образом, определение 2.8 касательной плоскости к графику функции $z = f(x,y)$ является частным случаем определения 13 касательного подпространства к дифференцируемой двухмерной поверхности.

Лемма 1 (Люстерника). *Пусть* S (см. (2))) — *дифференцируемая* k*-мерная поверхность в точке* $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ (см. определение 12). *Тогда:*

(а) *для любого* $\mathbf{h} \in TS_{\mathbf{z}_0}$ *существуют* $\delta > 0$ *и кривая* $\gamma\colon (-\delta,\delta) \to S$ *такая, что* $\gamma(0) = \mathbf{z}_0$ *и* $\gamma'(0) = \mathbf{h}$*;*

(б) *для любой дифференцируемой в точке* 0 *кривой* $\gamma\colon (-\delta,\delta) \to S$ *такой, что* $\gamma(0) = \mathbf{z}_0$*, имеем* $\gamma'(0) \in TS_{\mathbf{z}_0}$.

Доказательство. Для начала докажем утверждение (а). Пусть

$$\mathbf{h} = (\underbrace{h_1,\ldots,h_k}_{\mathbf{e}}, \underbrace{h_{k+1},\ldots,h_{k+m}}_{\boldsymbol{\eta}}) = \begin{bmatrix}\mathbf{e}\\ \boldsymbol{\eta}\end{bmatrix} \in TS_{\mathbf{z}_0} \overset{\text{О. 13}}{\iff}$$

$$\overset{\text{О. 13}}{\iff} \mathbf{0} = F'(\mathbf{z}_0)\mathbf{h} = \big[F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}_0)\big|F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}_0)\big]\begin{bmatrix}\mathbf{e}\\ \boldsymbol{\eta}\end{bmatrix} = F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}_0)\mathbf{e} + \overbrace{F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}_0)}^{\det\neq 0}\,\boldsymbol{\eta} \iff$$

$$\iff \boldsymbol{\eta} = -\big[F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}_0)\big]^{-1}F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}_0)\mathbf{e}.$$

Из теоремы 3.2 о неявной функции следует существование функции $f\colon \mathbb{R}^k \supset \supset B(\mathbf{x}_0) \to \mathbb{R}^m$ такой, что $F\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big) \equiv \mathbf{0}$ для всех $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0)$. Выберем $\delta_1 > 0$ настолько малым, чтобы имело место вложение $O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0) \subset B(\mathbf{x}_0)$. Положим $\delta := \delta_1/(\|\mathbf{e}\|+1)$, тогда $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e} \in O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0)$ для всех $t \in (-\delta,\delta)$. Для каждого $t \in (-\delta,\delta)$ положим $\gamma(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}\\ f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{e})\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+m}$, тогда $F\big(\gamma(t)\big) = F\big(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}, f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{e})\big) \equiv \mathbf{0}$, то есть $\gamma\colon (-\delta,\delta) \to S$. При этом $\gamma(0) = \mathbf{z}_0$,

$$\gamma'(0) \overset{\text{Л. 2.5, Т. 2.5}}{=} \begin{bmatrix}\mathbf{e}\\ f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{e}\end{bmatrix} \overset{\text{Т. 3.2}}{=} \begin{bmatrix}\mathbf{e}\\ -\big[F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}_0)\big]^{-1}F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}_0)\mathbf{e}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}\\ \boldsymbol{\eta}\end{bmatrix} = \mathbf{h}$$

и утверждение (а) доказано.

Утверждение (б) следует из того, что $F\big(\gamma(t)\big) \equiv \mathbf{0}$ для всех $t \in (-\delta,\delta)$, а значит,

$$\mathbf{0} = (F\circ\gamma)'(0) \overset{\text{Т. 2.5}}{=} F'(\mathbf{z}_0)\gamma'(0) \overset{\text{О. 13}}{\iff} \gamma'(0) \in TS_{\mathbf{z}_0}. \qquad \blacktriangleleft$$

Замечание 4. Из леммы 1 Люстерника вытекает, что касательное подпространство к дифференцируемой поверхности S (см. (2)) в точке $\mathbf{z}_0$ определено однозначно самим множеством S и не зависит от функции F, удовлетворяющей условиям определения 12 дифференцируемой k-мерной поверхности.

Теорема 4 [Необходимое условие существования условного экстремума] (линейная зависимость градиентов). *Пусть* S (см. (2)) — *дифференцируемая k-мерная поверхность в точке* $\mathbf{z}_0$ (см. определение 12), *функция f имеет экстремум на поверхности S в точке $\mathbf{z}_0$, и $f \in D(\mathbf{z}_0)$. Тогда векторы $f'(\mathbf{z}_0), (F^1)'(\mathbf{z}_0), \ldots, (F^m)'(\mathbf{z}_0)$ линейно зависимы, более того, существует вектор $\boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_0^1, \ldots, \lambda_0^m) \in \mathbb{R}^{1\times m}$ такой, что*

$$f'(\mathbf{z}_0) = \lambda_0^1 (F^1)'(\mathbf{z}_0) + \ldots + \lambda_0^m (F^m)'(\mathbf{z}_0) = \boldsymbol{\lambda}_0 F'(\mathbf{z}_0).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{h} \in TS_{\mathbf{z}_0} = \operatorname{Span}^{\perp}\{(F^1)'(\mathbf{z}_0), \ldots, (F^m)'(\mathbf{z}_0)\}$, где Span — *линейная оболочка*, а $\operatorname{Span}^{\perp}$ — *ортогональное дополнение* к ней. По утверждению (a) леммы 1 Люстерника существует кривая $\gamma\colon (-\delta, \delta) \to S$ такая, что $\gamma(0) = \mathbf{z}_0$ и $\gamma'(0) = \mathbf{h}$, что влечёт непрерывность кривой γ в точке $t = 0$. При этом функция $f \circ \gamma\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ обязана иметь экстремум в точке $t = 0$, иначе возникнет противоречие с определением 10. Но тогда $(f\circ\gamma)'(0) \overset{\text{Т. } 2.5}{=} f'(\mathbf{z}_0)\mathbf{h} = 0$ по теореме 4.4.2 о необходимом условии экстремума [Лемма Ферма]. Таким образом, мы получили

$$\operatorname{Span}^{\perp}\{(F^1)'(\mathbf{z}_0), \ldots, (F^m)'(\mathbf{z}_0)\} \subset \operatorname{Span}^{\perp}\{f'(\mathbf{z}_0)\} \iff$$
$$\iff \operatorname{Span}\{f'(\mathbf{z}_0)\} \subset \operatorname{Span}\{(F^1)'(\mathbf{z}_0), \ldots, (F^m)'(\mathbf{z}_0)\},$$

что и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 5. При выполнении условий теоремы 4 имеем $\operatorname{rank} F(\mathbf{z}_0) = m$, поэтому векторы $(F^1)'(\mathbf{z}_0), \ldots, (F^m)'(\mathbf{z}_0)$ *линейно независимы* и вектор $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^m$ определён *однозначно*.

Определим ***функцию Лагранжа*** $L : \operatorname{Dom}(F) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ формулой

$$L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) \coloneqq f(\mathbf{z}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda^i F^i(\mathbf{z}). \tag{3}$$

Замечание 6. Если в точке $\mathbf{z}_0$ выполнены условия теоремы 4, то существует вектор $\boldsymbol{\lambda}_0$ такой, что в точке $(\mathbf{z}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ выполнено *необходимое условие (безусловного!) экстремума* (см. замечание 1) для *функции Лагранжа*, то есть $dL(\mathbf{z}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = \mathbf{0}$.

Теорема 5 [Достаточный признак условного экстремума]. *Пусть в точке* $\mathbf{z}_0 \in S$ (см. (2)) *выполнено необходимое условие существования условного экстремума функции* f *на поверхности* S (см. теорему 4) *и* $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^m$ — *вектор, определяемый этой теоремой, а также* $f, F^1, \ldots, F^m \in D^2(\mathbf{z}_0)$. *Рассмотрим функцию* $L(\mathbf{z}) := L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}_0)$ (см. (3)), *зависящую лишь от переменной* $\mathbf{z}$ *(при фиксированном* $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0$*). Тогда* $dL(\mathbf{z}_0) \overset{\text{Т. 4}}{=} \mathbf{0}$, *существует* $d^2L(\mathbf{z}_0)$ *и верны следующие утверждения:*

(а) *если* $d^2L(\mathbf{z}_0, \cdot)\big|_{TS_{\mathbf{z}_0}} > 0$, *то есть* $d^2L(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}) > 0$ *для всех* $\mathbf{h} \in TS_{\mathbf{z}_0} \setminus \{\mathbf{0}\}$, *то* $\mathbf{z}_0$ — *точка строгого условного минимума;*

(б) *если* $d^2L(\mathbf{z}_0, \cdot)\big|_{TS_{\mathbf{z}_0}} < 0$, *то есть* $d^2L(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}) < 0$ *для всех* $\mathbf{h} \in TS_{\mathbf{z}_0} \setminus \{\mathbf{0}\}$, *то* $\mathbf{z}_0$ — *точка строгого условного максимума;*

(в) *если форма* $d^2L(\mathbf{z}_0, \cdot)$ *знакопеременна на* $TS_{\mathbf{z}_0}$, *то есть существуют* $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in TS_{\mathbf{z}_0}$ *такие, что* $d^2L(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}_1) < 0$, $d^2L(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}_2) > 0$, *то условного экстремума в точке* $\mathbf{z}_0$ *нет.*

Доказательство. Докажем утверждение (а), пользуясь методом, изложенным в монографии Ф.П. Васильева [4] (утверждение (б) доказывается аналогично либо сводится к (а) умножением функций f и F на -1). Пусть $d^2L(\mathbf{z}_0, \cdot)\big|_{TS_{\mathbf{z}_0}} > 0$ и $\mathbf{z}_0$ не является точкой строгого условного минимума. Тогда существует последовательность $\mathbf{z}_m \in S$ такая, что $\mathbf{z}_m \to \mathbf{z}_0$, а также $f(\mathbf{z}_m) \leqslant f(\mathbf{z}_0)$ и $\mathbf{z}_m \neq \mathbf{z}_0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Как и при доказательстве утверждения (а) теоремы 3 [Достаточное условие экстремума], найдём подпоследовательность $\mathbf{x}_k := \mathbf{z}_{m_k} = \mathbf{z}_0 + t_k \mathbf{e}_k \in S$, где $\|\mathbf{e}\| = 1$ и $\|\mathbf{e}_k\| = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\mathbf{0} = F(\mathbf{x}_k) - F(\mathbf{z}_0) \overset{\text{О. 2.2}}{=} t_k dF(\mathbf{z}_0, \mathbf{e}_k) + o(\|t_k \mathbf{e}_k\|).$$

Разделив последнее равенство на $t_k \neq 0$ и переходя к пределу при $k \to \infty$, в силу непрерывности линейного оператора $dF(\mathbf{z}_0)$ (см. лемму 2.4), получим $dF(\mathbf{z}_0, \mathbf{e}) \overset{\text{О. 2.4}}{=} F'(\mathbf{z}_0)\mathbf{e} = \mathbf{0}$, то есть $\mathbf{e} \in TS_{\mathbf{z}_0}$. Так как $L\big|_S = f$ (то есть $L \equiv f$ на поверхности S), имеем

$$0 \geqslant f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{z}_0) = L(\mathbf{x}_k) - L(\mathbf{z}_0) \overset{\text{Т. 2.20}}{=} t_k \underbrace{dL(\mathbf{z}_0, \mathbf{e}_k)}_{0} + \frac{1}{2} t_k^2 d^2L(\mathbf{z}_0, \underset{\substack{\downarrow \\ \mathbf{e}}}{\mathbf{e}_k}) + o(t_k^2).$$

Действуя так же, как при доказательстве утверждения (а) теоремы 3, получим $d^2L(\mathbf{z}_0, \mathbf{e}) \leqslant 0$, что противоречит условию теоремы, так как $\mathbf{e} \in TS_{\mathbf{z}_0}$ и $\|\mathbf{e}\| = 1 \neq 0$.

Перейдём к доказательству утверждения (в). По утверждению (а) леммы 1 Люстерника для некоторого $\delta > 0$ при $i = 1, 2$ существуют кривые $\gamma_i : (-\delta, \delta) \to S$

такие, что $\gamma_i(0) = \mathbf{z}_0$ и $\gamma_i'(0) = \mathbf{h}_i$. Тогда для каждого $t \in (-\delta, \delta)$ верны равенства

$$\gamma_i(t) - \overbrace{\gamma_i(0)}^{\mathbf{z}_0} \overset{\text{О. 2.2}}{=} \underset{\mathbb{R}^{1\times 1}}{\underset{\Cap}{\mathbf{h}_i}} \; \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\Cap}{t}} + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Cap}{o(t)}} = t\,\mathbf{h}_i + o(t) \tag{4}$$

и

$$f\big(\gamma_i(t)\big) - f(\mathbf{z}_0) = L\big(\gamma_i(t)\big) - L\big(\gamma_i(0)\big) \overset{\text{Т. 2.20}}{=}$$

$$\overset{\text{Т. 2.20}}{=} \overbrace{dL\big(\mathbf{z}_0, \gamma_i(t) - \gamma_i(0)\big)}^{0} + \frac{1}{2} d^2L\big(\mathbf{z}_0, \gamma_i(t) - \gamma_i(0)\big) + o(\|\gamma_i(t) - \gamma_i(0)\|^2) \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} \frac{1}{2} t^2 d^2L\big(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}_i + \underset{\mathbf{0}}{\underset{\downarrow}{o(1)}}\big) + \overbrace{o(t^2 \underbrace{\|\mathbf{h}_i + o(1)\|^2}_{\substack{\downarrow \\ \|\mathbf{h}_i\|^2 = const}})}^{o(t^2)}.$$

Используя непрерывность функции $d^2L(\mathbf{z}_0, \cdot)$, а также теорему 1.8′ о непрерывности композиции непрерывных функций, аналогично доказательству утверждения (в) теоремы 3 [Достаточное условие экстремума], получим

$$\frac{f\big(\gamma_i(t)\big) - f(\mathbf{z}_0)}{t^2} \xrightarrow{t \to 0} \begin{cases} \frac{1}{2} d^2L(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}_1) < 0 & \text{при } i = 1; \\ \frac{1}{2} d^2L(\mathbf{z}_0, \mathbf{h}_2) > 0 & \text{при } i = 2, \end{cases}$$

отсюда следует, что $\mathbf{z}_0$ *не является точкой условного экстремума.* ◄

Замечание 7. Отметим, что условие $f, F^1, \ldots, F^m \in D^2(\mathbf{z}_0)$ в теореме 5 [Достаточный признак условного экстремума] может быть заменено более слабым условием $f, F^1, \ldots, F^m \in \widetilde{D}^2(\mathbf{z}_0)$ (см. определение 2.15 минимальной k-кратной дифференцируемости). При этом для её доказательства достаточно воспользоваться замечанием 2.27.

§ 9.5. Функциональная зависимость

Всюду в этом параграфе $f = (f^1, \ldots, f^m)\colon \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int}(\Omega)$.

Определение 1 (функцианальной независимости). Система функций $f^1, \ldots, f^m$ называется ***функционально независимой*** в окрестности точки $\mathbf{x}_0$, если для любого $\delta_1 > 0$ такого, что $O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$, и для любой функции $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ такой, что $\Phi\big(f(\mathbf{x})\big) \equiv 0$ при всех $\mathbf{x} \in O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0)$, найдётся $\delta_2 > 0$ такое, что $\Phi(\mathbf{y}) \equiv 0$ при всех $\mathbf{y} \in O_{\delta_2}\big(f(\mathbf{x}_0)\big)$.

Замечание 1. Определение 1 функцианальной независимости равносильно тому, что в образе любого открытого шара с центром в $\mathbf{x}_0$ под действием функции f содержится некоторый открытый шар с центром в $f(\mathbf{x}_0)$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in D\big(O_\delta(\mathbf{x}_0)\big)$ *для некоторого* $\delta > 0$, $\det \widehat{f}'_{\widehat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$, *где* $\widehat{f} := (f^1, \ldots, f^k)$, $\widehat{\mathbf{x}} := (x^1, \ldots, x^k)$, $f^i_{x^j}$ *непрерывны в точке* $\mathbf{x}_0$ *при всех* $i, j \in \overline{1, k}$ *и* $\operatorname{rank} f(\mathbf{x}) = k$ *при всех* $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$. *Тогда система* $\widehat{f}$ *функционально независима в окрестности* $\mathbf{x}_0$ *и существует* $\delta_1 > 0$ *такое, что для всех* $i \in \overline{k+1, m}$ *найдутся функции* $g^i \in D\Big(\widehat{f}\big(O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0)\big)\Big)$, *для которых равенства* $f^i(\mathbf{x}) = g^i\big(\widehat{f}(\mathbf{x})\big)$ *выполнены для всех* $\mathbf{x} \in O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0)$.

Доказательство. Обозначим $\widetilde{\mathbf{x}} := (x^{k+1}, \ldots, x^n)$ и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} u^1 = f^1(\mathbf{x}) \\ \cdots \\ u^k = f^k(\mathbf{x}) \end{cases} \iff F(\widehat{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) := \mathbf{u} - \widehat{f}(\widehat{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \ \ F\colon \mathbb{R}^{n+k} \supset \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k.$$

При $\mathbf{u}_0 := \widehat{f}(\mathbf{x}_0)$ проверяется, что для функции F в точке $(\widehat{\mathbf{x}}_0, \widetilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_0)$ выполнены все условия теоремы 3.2 о неявной функции, где в качестве $\mathbf{y}$ рассматривается $\widehat{\mathbf{x}}$ (например, после двухкратного применения леммы 2.5 о покомпонентной дифференцируемости из определения 2.4 производной вытекает, что $F'(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \big[-\widehat{f}'(\mathbf{x})\big|I\big]$ при всех $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in O_\delta(\mathbf{x}_0) \times \mathbb{R}^k$). Таким образом, для любого $\delta' \leqslant \min\{\delta, \delta''\}$, где δ'' выбрано так, что $\det \widehat{f}'_{\widehat{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) \neq 0$ для всех $\mathbf{x} \in O_{\delta''}(\mathbf{x}_0)$, найдётся функция $\varphi\colon B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_0) \to B_b(\widehat{\mathbf{x}}_0)$ такая, что $\varphi \in D\big(B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_0)\big)$ и

$$\mathbf{u} = \widehat{f}(\widehat{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}}) \iff \widehat{\mathbf{x}} = \varphi(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$$
$$\text{для всех } (\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \widehat{\mathbf{x}}) \in B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0) \times B_a(\mathbf{u}_0) \times B_b(\widehat{\mathbf{x}}_0) \subset O_{\delta'}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0). \tag{1}$$

Последнего вложения всегда можно добиться уменьшением чисел a и b (см. замечание 3.5). Из (1) очевидно следует,

$$\mathbf{u} = \widehat{f}\underbrace{\big(\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \widetilde{\mathbf{x}}\big)}_{\substack{\Cap \\ B_b(\widehat{\mathbf{x}}_0) \times B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0) \subset O_{\delta'}(\mathbf{x}_0)}} \quad \text{для всех } (\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \in B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_0). \tag{2}$$

Таким образом, $B_a(\mathbf{u}_0) \subset \widehat{f}\big(O_{\delta'}(\mathbf{x}_0)\big)$ и всегда найдётся число $\delta_2 > 0$ такое, что $O_{\delta_2}(\mathbf{u}_0) = O_{\delta_2}\big(\widehat{f}(\mathbf{x}_0)\big) \subset \widehat{f}\big(O_{\delta'}(\mathbf{x}_0)\big)$, что и означает функциональную независимость системы $\widehat{f}$ в окрестности $\mathbf{x}_0$ по определению 1 функцианальной независимости (см. замечание 1). Далее для всех $i \in \overline{1, m}$ обозначим $\gamma^i(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) := f^i\big(\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \widetilde{\mathbf{x}}\big) \in D\big(B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_0)\big)$ и покажем, что γ^i не зависят от $\widetilde{\mathbf{x}}$ при $i \in \overline{k+1, m}$ (а значит, и при всех $i \in \overline{1, m}$, так как при $i \in \overline{1, k}$ это следует из равенства (2)). Для всех $i \in \overline{1, m}$, $j \in \overline{k+1, n}$, $(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \in B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_0)$ имеем

$$\gamma^i_{x^j}(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \sum_{l=1}^{k} f^i_{x^l}\big(\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \widetilde{\mathbf{x}}\big)\varphi^l_{x^j}(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + f^i_{x^j}\big(\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \widetilde{\mathbf{x}}\big) = \langle a_i(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), b(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\rangle,$$

для векторов $a_i(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) := \big(f^i_{x^1}, \ldots, f^i_{x^k}, f^i_{x^j}\big)\big(\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \widetilde{\mathbf{x}}\big)$, $b(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) := (\varphi^1_{x^j}, \ldots$ $\ldots, \varphi^k_{x^j}, 1)(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$.

Для всех $i \in \overline{1, k}$, $j \in \overline{k+1, n}$, $(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \in B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_0)$ из равенства (2) следует, что $\gamma^i(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = u^i$, поэтому $\gamma^i_{x^j}(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \langle a_i(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), b(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\rangle \equiv 0$. Так как по условию для всех $i \in \overline{k+1, m}$, $(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \in B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_0)$ имеем

$$\det\begin{bmatrix} f^1_{x^1}, & \ldots, & f^1_{x^k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f^k_{x^1}, & \ldots, & f^k_{x^k} \end{bmatrix}\big(\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \widetilde{\mathbf{x}}\big) \neq 0$$

и

$$\det\begin{bmatrix} f^1_{x^1}, & \ldots, & f^1_{x^k}, & f^1_{x^j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^k_{x^1}, & \ldots, & f^k_{x^k}, & f^k_{x^j} \\ f^i_{x^1}, & \ldots, & f^i_{x^k}, & f^i_{x^j} \end{bmatrix}\big(\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \widetilde{\mathbf{x}}\big) = 0$$

как минор порядка $k+1$ производной функции f, по теореме о базисном миноре (см., например, [25, с. 43]) последняя строка этой матрицы есть линейная комбинация первых k строк, то есть $a_i(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \sum\limits_{p=1}^{k}\lambda_p(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})a_p(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$, отсюда

$$\langle a_i(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), b(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\rangle = \sum_{p=1}^{k} \lambda_p(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\underbrace{\langle a_p(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), b(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})\rangle}_{0} \equiv 0.$$

Таким образом, $\gamma^i_{x^j}(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \equiv 0$ при всех $(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \in B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_0)$, $i \in \overline{k+1, m}$, $j \in \overline{k+1, n}$. В силу выпуклости (см. определение 8.0.12) и открытости $B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0)$ это означает, что функции γ^i при $i \in \overline{k+1, m}$ не зависят от $\widetilde{\mathbf{x}}$ (доказательство этого факта основано на том, что любые точки $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0)$ можно соединить тропой со звеньями, параллельными ортам, а затем так же, как и при доказательстве утверждения 2.2, воспользоваться теоремой 4.4.6 Лагранжа и получить равенство $\gamma^i(\mathbf{z}_1, \mathbf{u}) = \gamma^i(\mathbf{z}_2, \mathbf{u})$), то есть для всех $i \in \overline{k+1, m}$ найдутся функции $g^i\colon B_a(\mathbf{u}_0) \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f^i\big(\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \widetilde{\mathbf{x}}\big) = g^i(\mathbf{u}) := \gamma^i(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}) \tag{3}$$

для всех $(\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \in B_a(\widetilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_0)$. Так как функция $\mathbf{u} \mapsto (\widetilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^m$ дифференцируема на $\mathbb{R}^k$ (что проще всего установить с помощью теоремы 2.3 о достаточном условии дифференцируемости), то $g^i \in D\big(B_a(\mathbf{u}_0)\big)$ по теореме 2.5 о дифференцируемости композиции функций. В силу непрерывности функции $\widehat{f}$ в точке

$\mathbf{x}_0$ найдётся $c \in (0, \min\{a, b\}]$ такое, что для всех $\mathbf{x} = (\widehat{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}}) \in B_c(\mathbf{x}_0)$ имеем $\widehat{f}(\mathbf{x}) \in B_a(\mathbf{u}_0)$. Но тогда, используя (1) при $\mathbf{u} := \widehat{f}(\mathbf{x})$, для всех $\mathbf{x} \in B_c(\mathbf{x}_0)$ имеем

$$g^i\big(\widehat{f}(\mathbf{x})\big) \overset{(3)}{=} f^i\big(\underbrace{\varphi\big(\widetilde{\mathbf{x}}, \widehat{f}(\mathbf{x})\big)}_{\widehat{\mathbf{x}}}, \widetilde{\mathbf{x}}\big) \overset{(1)}{=} f^i(\widehat{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{x}}) = f^i(\mathbf{x})$$

при всех $i \in \overline{k+1, m}$. Для завершения доказательства теоремы осталось выбрать $\delta_1 > 0$ настолько малым, чтобы имело место вложение $O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0) \subset B_c(\mathbf{x}_0)$. ◀

Замечание 2. Из того, что $f_x(x, y) \equiv 0$ для всех (x, y) из некоторого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, вообще говоря, не следует, что функция f не зависит от переменной x на Ω.

Действительно, на открытом множестве $\Omega := \{(x, y) : y > -|x|\}$ рассмотрим функцию $f(x, y) := y(\theta(y) - 1)\mathrm{sgn}(x)$, где $\theta(t) := \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geqslant 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда. Нетрудно проверить, что условие $f_x(x, y) \equiv 0$ выполнено на множестве Ω, однако не существует функции g такой, что $f(x, y) = g(y)$ для всех $(x, y) \in \Omega$. ◀

Замечание 3. При выполнении условий теоремы 1 и $k < m$ получаем, что система f функционально зависима по определению 1. Действительно, в качестве Φ можно взять

$$\Phi(y^1, \dots, y^m) := \begin{cases} y^{k+1} - g^{k+1}(y^1, \dots, y^k) & \text{при } (y^1, \dots, y^k) \in \mathrm{Dom}(g^{k+1}), \\ y^{k+1} & \text{при } (y^1, \dots, y^k) \notin \mathrm{Dom}(g^{k+1}). \end{cases}$$

Тогда $\Phi_{y^{k+1}}(\mathbf{y}) \equiv 1$ для всех $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, поэтому равенство $\Phi \equiv 0$ в шаре $O_\delta(\mathbf{y}_0)$ невозможно.

Замечание 4. Из того, что система функционально зависима по определению 1, не следует, что одна из функций выражается через остальные. Рассмотрим функции

$$u(t) := \begin{cases} t & \text{при } t \neq \dfrac{1}{2^k} \\ 0 & \text{при } t = \dfrac{1}{2^k} \end{cases} \quad \text{и} \quad v(t) := \begin{cases} t & \text{при } t \neq \dfrac{1}{3^k} \\ 0 & \text{при } t = \dfrac{1}{3^k} \end{cases},$$

где k пробегает множество натуральных чисел. Тогда $\Phi\big(u(t), v(t)\big) \equiv 0$ для функции $\Phi(x, y) := xy(x - y)$, однако не существует функции φ, для которой одно из равенств $u = \varphi \circ v$ или $v = \varphi \circ u$ было бы выполнено в некотором интервале $O_\delta(0)$.

Глава 10
Дополнения

§ 10.1. Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение 1. ***Масштабом*** на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$ будем называть любую функцию $\delta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ такую, что $\delta(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$.

Определение 2. Пусть $\delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — *масштаб* на отрезке $[a,b]$. *Размеченное разбиение* $P_{\boldsymbol{\xi}}$ отрезка $[a,b]$ называется ***согласованным с масштабом*** δ (или δ***-разбиением Хенстока***), если $\xi_i - \delta(\xi_i) < x_{i-1} < x_i < \xi_i + \delta(\xi_i)$ для всех $i \in \overline{1, n(P)}$.

Далее докажем лемму о существовании размеченных разбиений, согласованных с произвольным масштабом (см., например, [15]).

Лемма 1. *Для любого масштаба δ на отрезке $[a,b]$ существует размеченное разбиение $P_{\boldsymbol{\xi}}$ этого отрезка, согласованное с масштабом δ.*

Доказательство. Пусть для некоторого масштаба δ на отрезке $I_0 \coloneqq [a,b]$ не существует размеченного разбиения $P_{\boldsymbol{\xi}}$, с ним согласованного. Разбивая отрезок I_0 точкой $c \coloneqq (a+b)/2$ пополам, получим, что для одного из отрезков $[a,c]$, $[c,b]$ не существует размеченного разбиения, согласованного с тем же масштабом δ (иначе в качестве $P_{\boldsymbol{\xi}}$ можно было бы взять объединение разбиений этих двух отрезков). Обозначим этот отрезок через I_1. Разбивая отрезок I_1 пополам и рассуждая аналогично, получим отрезок I_2, также не имеющий размеченного разбиения, согласованного с масштабом δ. Продолжая описанную процедуру до бесконечности, получим последовательность $I_0 \supset I_1 \supset \ldots$ вложенных отрезков, каждый из которых не имеет размеченного разбиения, согласованного с масштабом δ, при этом $|I_n| = (b-a)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначая через θ общую точку этих отрезков (см. принцип 2.5.1 вложенных отрезков), получим существование отрезка $I_m = [a_m, b_m]$ такого, что $|I_m| < \delta(\theta)$. По определению это означает, что размеченное разбиение $P_{\boldsymbol{\xi}}$ отрезка I_m, где $P = (a_m, b_m)$, $\boldsymbol{\xi} = (\theta)$, согласовано с масштабом δ на этом отрезке. Но это противоречит построению отрезков I_n, что и завершает доказательство леммы. ◀

Определение 3 (колебания функции в точке). Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \supset \supset \operatorname{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ ограничена и для всех $\delta > 0$ имеем $\operatorname{Dom}(f) \cap O_\delta(x_0) \neq \varnothing$. Рассмотрим функцию $g\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$, определённую равенством $g(\delta) := := \omega\big(f, \operatorname{Dom}(f) \cap O_\delta(x_0)\big)$ (см. определение 6.1.8). Очевидно, что функция g не убывает на своей области определения, поэтому $\exists \lim\limits_{\delta\to 0+} g(\delta) =: \omega(x_0)$, называемый ***колебанием функции*** f ***в точке*** x_0.

Лемма 2. *Пусть* $x_0 \in \operatorname{Dom}(f)$. *Тогда функция* f *непрерывна в точке* $x_0 \iff \iff \omega(x_0) = 0$.

Доказательство. Утверждение леммы напрямую вытекает из теоремы 3.2.2′ [Критерий Коши непрерывности функции в точке]. ◀

Далее приведём доказательство *Критерия Лебега интегрируемости по Риману*, сформулированного в теореме 6.1.7.

Доказательство теоремы 6.1.7. Пусть $a < b$ (случай $a = b$ тривиален).

$\Longleftarrow$: В силу ограниченности функции f найдётся число $M > 0$ такое, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [a, b]$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем покрытие

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \supset \Omega$$

так, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon/(4M).$$

Далее, для любого $x \in [a, b] \setminus \Omega$ в силу непрерывности функции f в точке x существует число $\delta_x > 0$ такое, что $|f(t) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$ для всех $t \in \in [a, b] \cap (x - \delta_x, x + \delta_x)$. Для любого $x \in \Omega$ существует число $\delta_x > 0$ такое, что $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subset (a_k, b_k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Определим на отрезке $[a, b]$ *масштаб* $\delta(x) := \delta_x$. По лемме 1 существует *размеченное разбиение* $P_{\boldsymbol{\xi}}$ отрезка $[a, b]$, *согласованное с масштабом* δ. Рассмотрим индексные множества $K_1 := \{k \in \overline{1, n(P)} : \xi_k \notin \Omega\}$ и $K_2 := \{k \in \overline{1, n(P)} : \xi_k \in \Omega\}$. Тогда

$$S^*(P) - s_*(P) = \sum_{k=1}^{n(P)} \omega_k \Delta x_k = \sum_{k\in K_1} \omega_k \Delta x_k + \sum_{k\in K_2} \omega_k \Delta x_k \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k\in K_1} \Delta x_k + 2M \sum_{k\in K_2} \Delta x_k < \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} + \frac{2M\varepsilon}{4M} = \varepsilon,$$

поэтому $f \in R[a, b]$ в силу теоремы 6.1.3 [Критерии интегрируемости].

$\Longrightarrow$: В силу теоремы 6.1.3 [Критерии интегрируемости] для всех $\lambda, \varepsilon > 0$ найдётся разбиение P отрезка $[a, b]$ такое, что

$$\frac{\lambda\varepsilon}{2} > S^*(P) - s_*(P) = \sum_{k\in K_1} \omega_k \Delta x_k + \sum_{k\in K_2} \omega_k \Delta x_k \geqslant \sum_{k\in K_1} \omega_k \Delta x_k, \qquad (1)$$

где $K_1 := \{k \in \overline{1, n(P)} : \operatorname{int}(\Delta_k) \cap \Omega_\lambda \neq \varnothing\}$ и $K_2 := \{k \in \overline{1, n(P)} : \operatorname{int}(\Delta_k) \cap \cap \Omega_\lambda = \varnothing\}$; $\Omega_\lambda := \{x \in [a, b] : \omega(x) \geqslant \lambda\}$ (см. определение 3 колебания функции в точке). Таким образом, для любого $k \in K_1$ найдутся $x_0 \in \Omega_\lambda$ и $\delta > 0$ такие, что $O_\delta(x_0) \subset \Delta_k$, а значит, $\omega_k = \omega(f, \Delta_k) \geqslant \omega\big(f, O_\delta(x_0)\big) \geqslant \omega(x_0) \geqslant \lambda$ (см. определение 3 колебания функции в точке). В силу (1) это означает, что

$$\lambda\varepsilon/2 > \sum_{k\in K_1} \omega_k \Delta x_k \geqslant \lambda \sum_{k\in K_1} \Delta x_k,$$

отсюда получаем

$$\sum_{k\in K_1} \Delta x_k < \varepsilon/2.$$

Поместив каждую точку x_k разбиения P в интервал J_k длины $\varepsilon/2^{k+2}$, получим

$$\Omega_\lambda \subset \left(\bigcup_{k\in K_1} \Delta_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n(P)} J_k\right).$$

В силу свойства *полуаддитивности* меры Жордана имеем

$$\mu\left(\left(\bigcup_{k\in K_1} \Delta_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n(P)} J_k\right)\right) \leqslant \sum_{k\in K_1} \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n(P)} \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

отсюда $\mu^J(\Omega_\lambda) = 0$, а значит, и подавно $\mu^L(\Omega_\lambda) = 0$. Из равенства $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_{\frac{1}{k}}$ (см. лемму 2) и утверждения 6.1.1 вытекает, что $\mu^L(\Omega) = 0$, что и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 1. Приведённое выше доказательство критерия Лебега практически без изменений переносится на n-мерный случай, если вместо отрезка $[a, b]$ рассмотреть *n-мерный брус* $I := I_1 \times \ldots \times I_n$. Другое доказательство этого критерия, не опирающееся на лемму 1, можно найти, например, в [18, с. 36].

§ 10.2. О метрических и топологических пространствах. Универсальное топологическое пространство $\widetilde{\mathbb{R}}$

10.2.1. Метрические пространства

Определение 1 (метрического пространства). Пусть имеется некоторое множество M и некоторая функция $\rho\colon M \times M \to \mathbb{R}^+$. Функция ρ называется ***метрикой***, а пара (M, ρ) — ***метрическим пространством***, если при всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in M$ выполнено:

1) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$ и $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$;
2) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (симметричность);
3) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (неравенство треугольника).

При этом вместо (M, ρ) часто используют сокращённое обозначение M, автоматически подразумевая, что на M задана некоторая метрика ρ.

Всюду далее в этом пункте $M = (M, \rho)$ — произвольное *метрическое пространство*.

Определение 2. Пусть $\delta > 0$, $\mathbf{x}_0 \in M$.

Множество $O_\delta(\mathbf{x}_0) \coloneqq \{\mathbf{x} \in M : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta\}$ называется ***открытым шаром*** радиуса δ с центром в $\mathbf{x}_0$.

Множество $\mathring{O}_\delta(\mathbf{x}_0) \coloneqq O_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ называется ***проколотым открытым шаром*** радиуса δ с центром в $\mathbf{x}_0$.

Множество $S_\delta(\mathbf{x}_0) \coloneqq \{\mathbf{x} \in M : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta\}$ называется ***сферой*** радиуса δ с центром в $\mathbf{x}_0$.

Множество $B_\delta(\mathbf{x}_0) \coloneqq \{\mathbf{x} \in M : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leqslant \delta\} = O_\delta(\mathbf{x}_0) \cup S_\delta(\mathbf{x}_0)$ называется ***замкнутым шаром*** радиуса δ с центром в $\mathbf{x}_0$.

Определение 3 (ограниченного множества). Множество $\Omega \subset M$ называется ***ограниченным***, если оно целиком содержится в некотором шаре.

Определение 4 (ограниченной последовательности). Последовательность $\mathbf{x}_k \in M$ называется ***ограниченной (по метрике ρ)***, если существует элемент $\mathbf{a} \in M$ такой, что *числовая последовательность* $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{x}_k)$ *ограничена* (что равносильно тому, что все элементы последовательности $\mathbf{x}_k$ лежат в некотором шаре).

Определение 5 (сходящейся последовательности). Последовательность $\mathbf{x}_k \in M$ называется ***сходящейся (по метрике ρ)*** к элементу $\mathbf{a} \in M$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) = 0$. При этом $\mathbf{a}$ называют ***пределом*** последовательности $\mathbf{x}_k$ (*обозначение*: $\mathbf{a} = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$). Также используют обозначение ($\mathbf{x}_k \xrightarrow{\rho} \mathbf{a}$).

Лемма 1. *Любая сходящаяся последовательность $\mathbf{x}_k \in M$ является ограниченной.*

Доказательство. Если $\mathbf{x}_k \to \mathbf{a} \in M$, то по определению 5 числовая последовательность $\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a})$ является бесконечно малой, а следовательно, ограниченной. ◀

Далее на случай метрических пространств дословно переносятся определения 8.0.5 – 8.0.17, замечания 8.0.2 – 8.0.4, леммы 8.0.2 и 8.0.5. Теорема 8.0.1 о секвенциальной компактности также верна в метрических пространствах (см. замечание 8.0.6).

Определение 6 (метрического подпространства). Пусть (M, ρ) — метрическое пространство, $M \supset S$ — произвольное подмножество. Очевидно, что сужение функции ρ на множество $S \times S \subset M \times M$ является метрикой на множестве S. Обозначая рассмотренное сужение ρ_s, получим метрическое пространство (S, ρ_s), называемое ***метрическим подпространством*** пространства M. При этом метрику ρ_s часто называют ***индуцированной*** из M метрикой.

Определение 7 (фундаментальной последовательности). Последовательность $\mathbf{x}_k \in M$ называется ***фундаментальной (по метрике*** ρ***)***, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall p, q \geqslant N \ \ \rho(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q) < \varepsilon.$$

Определение 8 (полного метрического пространства). Метрическое пространство называется ***полным***, если *любая фундаментальная последовательность его элементов сходится.*

Определение 9 (эквивалентности метрик). Пусть на одном и том же множестве M определены метрики ρ и $\widetilde{\rho}$. Метрики ρ и $\widetilde{\rho}$ называются ***эквивалентными***, если существуют $c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1\widetilde{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \leqslant c_2\widetilde{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$. *Обозначение*: $\rho \sim \widetilde{\rho}$. Для метрических пространств $M_1 := (M, \rho)$ и $M_2 := (M, \widetilde{\rho})$, наделённых эквивалентными метриками, мы также будем использовать обозначение $M_1 \sim M_2$.

Нетрудно проверить, что введённое в определении 9 *бинарное отношение* $\sim$ на классе метрических пространств действительно является *отношением эквивалентности* по определению 0.6.2 (то есть оно *рефлексивно, симметрично и транзитивно*).

Замечание 1. Важно отметить, что свойства некоторой точки быть внутренней или внешней для Ω, свойства множества Ω быть ограниченным, открытым, замкнутым или компактным, свойства некоторой последовательности быть сходящейся к некоторому элементу $\mathbf{x}_0$ или быть фундаментальной *зависят от выбора метрики* ρ на множестве M. Однако все эти свойства *сохраняются при переходе к эквивалентной метрике*.

Далее для функций, действующих между метрическими пространствами, формулируются определения предела и непрерывности в точке, аналогичные определениям 9.1.1 Коши, 9.1.1′ Гейне и 9.1.3 Коши, 9.1.3′ Гейне. Доказательство эквивалентности этих определений текстуально повторяет доказательство аналогичных теорем 3.1.1 и 3.2.1′ для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Более подробно об общих свойствах предела и непрерывных функций см. пункт 10.2.2, посвящённый топологическим пространствам. Остановимся подробнее на определении, характерном именно для метрических пространств.

Определение 10 (равномерной непрерывности). Пусть (M_1, ρ_1), (M_2, ρ_2) — *метрические пространства*. Функция $f\colon M_1 \supset \mathrm{Dom}(f) \to M_2$ называется ***равномерно непрерывной*** на множестве $\Omega \subset \mathrm{Dom}(f)$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$

$$\rho_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < \delta \implies \rho_2\big(f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)\big) < \varepsilon.$$

Замечание 2. Из определения 10 равномерной непрерывности непосредственно вытекает, что если функция $f\colon M_1 \supset \mathrm{Dom}(f) \to M_2$ равномерно непрерывна на некотором множестве Ω, то она равномерно непрерывна на любом его подмножестве, а функция $f\big|_{\Omega}$ является непрерывной на Ω.

Теорема 1. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство. Тогда функция*

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

является метрикой на множестве E.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$. Проверим для функции ρ выполнение трёх условий определения 1.

1): очевидно.

2): $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|(-1)(\mathbf{y}-\mathbf{x})\| = |-1|\|(\mathbf{y}-\mathbf{x})\| = \|(\mathbf{y}-\mathbf{x})\| = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

3): $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - (\mathbf{y} - \mathbf{z})\| \leqslant \|(\mathbf{x} - \mathbf{z})\| + \|(\mathbf{y} - \mathbf{z})\| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. ◀

Определение 11 (метрики, порождённой нормой). Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — *нормированное пространство*. Метрика $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (см. теорему 1) на множестве E называется ***метрикой, порождённой*** нормой $\|\cdot\|$.

Замечание 3. Любое *нормированное пространство* $(E, \|\cdot\|)$ может быть рассмотрено как *метрическое пространство* с метрикой, порождённой нормой $\|\cdot\|$. В случае сходимости последовательности по этой метрике используют обозначение $\mathbf{x}_k \overset{\|\cdot\|}{\to} \mathbf{a}$. Все определения и утверждения, сформулированные выше для метрических пространств M, *автоматически переносятся* на нормированные пространства E. При этом всегда предполагается, что метрика порождена соответствующей нормой.

Замечание 4. Из определения 11 метрики, порождённой нормой, вытекает, что *эквивалентные нормы порождают эквивалентные метрики.*

10.2.2. Топологические пространства

Определение 12 (топологического пространства). Пусть имеется некоторое множество Ω и $\mathcal{P}(\Omega)$ — множество всех его подмножеств. Множество $\tau \subset \mathcal{P}(\Omega)$ называется ***топологией*** на множестве Ω, а пара (Ω, τ) — ***топологическим пространством***, если:

1) $\Omega, \varnothing \in \tau$.

2) Объединение любой совокупности множеств из топологии принадлежит топологии, то есть

$$\bigcup A \in \tau$$

для всех $A \in \mathcal{P}(\tau)$.

3) Пересечение любой *конечной* совокупности множеств из топологии принадлежит топологии, то есть

$$U_1, U_2, \ldots, U_n \in \tau \implies \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau.$$

При этом вместо (Ω, τ) часто используют сокращённое обозначение Ω, автоматически подразумевая, что на Ω задана некоторая топология τ.

Определение 13 (открытого множества). ***Открытыми*** множествами в топологическом пространстве (Ω, τ) называются элементы τ. Произвольное множество $U_x \in \tau$ такое, что $x \in U_x$, называется ***окрестностью*** точки x. При этом множество $\mathring{U}_x := U_x \setminus \{x\}$ называется ***проколотой окрестностью*** точки x.

Пример 1. Если Ω — произвольное множество, то множество всех подмножеств Ω задают на нём топологию. Такая топология называется сильнейшей или ***дискретной***, а Ω, таким образом, превращается в ***дискретное*** топологическое пространство. При этом $\operatorname{card}(\tau) = 2^{\operatorname{card}(\Omega)}$. Другим примером является ***тривиальная*** топология: $\tau := \{\Omega, \varnothing\}$. В этом случае топологическое пространство Ω также называют ***пространством слипшихся точек***, а $\operatorname{card}(\tau) = 2$.

Пример 2. Рассмотрим множество из четырёх слов:

$$\Omega := \{\text{ёж, дикобраз, hedgehog, porcupine}\}.$$

Помимо тривиальной и сильнейшей топологий на Ω можно, например, рассмотреть смысловую топологию

$$\tau_1 := \Big\{\varnothing, \Omega, \{\text{ёж, hedgehog}\}, \{\text{дикобраз, porcupine}\}\Big\}$$

или языковую топологию

$$\tau_2 := \Big\{\varnothing, \Omega, \{\text{ёж, дикобраз}\}, \{\text{hedgehog, porcupine}\}\Big\}$$

(см. рис. 39). Какие слова в рассмотренном множестве считать близкими и, соответственно, какая из топологий является естественной, зависит от конкретной

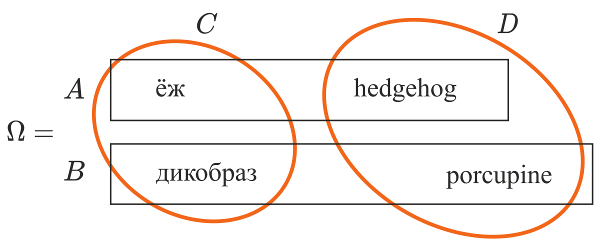


Рис. 39

постановки задачи (например, спаривание дикобразов в зоопарке, или определение страны, откуда они прибыли).

Любопытно также отметить, что на рассмотренном множестве, состоящем из 4 элементов, можно задать 355 различных топологий, а на множестве из 10 элементов их количество равно 8977053873043, правда всего 4717687 из них будут попарно *неэквивалентны*, то есть соответствующие топологические пространства попарно *негомеоморфны* (см. определение 27).

Определение 14 (топологического подпространства). Пусть (Ω, τ) — топологическое пространство, $\Omega \supset S$ — произвольное подмножество. Легко убедиться, что система $\tau_s := \{U \cap S : U \in \tau\}$ является топологией на множестве S по определению 12 топологического пространства. Топологическое пространство (S, τ_s) называют ***топологическим подпространством*** пространства Ω, а топологию τ_s — ***индуцированной*** из Ω топологией.

Всюду далее в этом пункте $\Omega = (\Omega, \tau)$ — произвольное *топологическое пространство*, $\Omega \supset S$ — произвольное его подмножество. Через $\overline{S} := \Omega \setminus S = \{x \in \Omega : x \notin S\}$ будем обозначать ***дополнение*** ко множеству S в пространстве Ω. Таким образом, для любых множеств $A, B \subset \Omega$ верно равенство $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Определение 15 (замкнутого множества). ***Замкнутыми*** множествами в топологическом пространстве (Ω, τ) называются *дополнения к открытым*, то есть множества вида $\overline{U}$, где $U \in \tau$. Таким образом, множества Ω и $\varnothing$ являются одновременно и замкнутыми, и открытыми.

Определение 16 (предельной точки). Точка $x \in \Omega$ называется ***предельной*** для множества S, если в любой её окрестности содержится хотя бы одна точка $y \in S$, отличная от x. Точка $x \in S$, не являющаяся предельной для S, называется ***изолированной точкой*** множества S.

Определение 17 (замыкания). Пусть S' — множество всех *предельных точек* множества S. Тогда множество $S \cup S' =: \mathrm{cl}(S)$ называется ***замыканием*** множества S.

Лемма 2. *Множество S является замкнутым* $\iff$ $S = \mathrm{cl}(S)$.

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Так как множество $\overline{S}$ по определению открыто, то у любой точки $x \in \overline{S}$ имеется окрестность (например, $\overline{S}$), не пересекающаяся с S, то есть $x \notin \mathrm{cl}(S)$, а значит, $\mathrm{cl}(S) \subset S$. Ввиду очевидного вложения $S \subset \mathrm{cl}(S)$ получаем, что $S = \mathrm{cl}(S)$.

$\Longleftarrow$: Если $x \in \overline{S} = \Omega \setminus \mathrm{cl}(S)$, то существует окрестность U_x точки x такая, что $U_x \cap S = \varnothing$. Это значит, что множество $\overline{S} = \bigcup\limits_{x \in \overline{S}} U_x$ по определению открыто, то есть $S = \overline{\overline{S}}$ по определению замкнуто. ◀

Лемма 3. $\mathrm{cl}\big(\mathrm{cl}(S)\big) = \mathrm{cl}(S)$.

Доказательство. Вложение $\mathrm{cl}(S) \subset \mathrm{cl}\big(\mathrm{cl}(S)\big)$ очевидно. Пусть $x \in \mathrm{cl}\big(\mathrm{cl}(S)\big)$. Тогда по определению для любой *окрестности* $U_x \ni x$ найдётся $y \in U_x \cap \mathrm{cl}(S)$. По определению это означает, что найдётся $z \in U_x \cap S$, то есть $x \in \mathrm{cl}(S)$, отсюда $\mathrm{cl}\big(\mathrm{cl}(S)\big) \subset \mathrm{cl}(S)$, что и завершает доказательство леммы. ◀

Следствие 1 лемм 2 и 3. *Замыкание любого подмножества топологического пространства всегда замкнуто.*

Определение 18 (внутренней точки). ***Внутренностью*** множества S будем называть множество $\mathrm{int}(S) := \bigcup\limits_{S \supset B \text{ — открыто}} B$. Точки $x \in \mathrm{int}(S)$ будем называть ***внутренними*** точками множества S.

Из данного определения вытекает, что $\mathrm{int}(S)$ состоит из тех и только из тех точек, которые входят в S вместе с некоторой своей *окрестностью*, а также то, что множество $\mathrm{int}(S)$ всегда *открыто*.

Лемма 4. $\mathrm{int}\big(\mathrm{int}(S)\big) = \mathrm{int}(S)$.

Доказательство. Вложение $\mathrm{int}\big(\mathrm{int}(S)\big) \subset \mathrm{int}(S)$ очевидно. Пусть $x \in \mathrm{int}(S)$. Тогда по определению 18 внутренней точки существует *окрестность* $U_x \ni x$, вложенная в S. Тогда по определению имеем $U_x \subset \mathrm{int}(S)$, отсюда по тому же определению $U_x \subset \mathrm{int}\big(\mathrm{int}(S)\big)$, то есть $\mathrm{int}(S) \subset \mathrm{int}\big(\mathrm{int}(S)\big)$. ◀

Лемма 5. $\mathrm{int}(S) = \overline{\mathrm{cl}(\overline{S})}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{int}(S)$. Тогда найдётся открытое множество $U_x \subset S$ такое, что $x \in U_x$. Так как $U_x \cap \overline{S} = \varnothing$, то $x \notin \mathrm{cl}(\overline{S})$, а значит, $x \in \overline{\mathrm{cl}(\overline{S})}$ и $\mathrm{int}(S) \subset \overline{\mathrm{cl}(\overline{S})}$.

Если $x \in \overline{\mathrm{cl}(\overline{S})}$, то у точки x найдётся окрестность U_x, не пересекающаяся со множеством $\overline{S}$, то есть $U_x \subset S$, отсюда по определению имеем $x \in \mathrm{int}(S)$ и $\overline{\mathrm{cl}(\overline{S})} \subset \mathrm{int}(S)$. ◀

Определение 19 (внешней точки). ***Внешностью*** множества S будем называть множество $\mathrm{ext}(S) := \overline{\mathrm{cl}(S)}$. Точки $x \in \mathrm{ext}(S)$ будем называть ***внешними*** для множества S.

Из данного определения вытекает, что $\mathrm{ext}(S)$ состоит из тех и только из тех точек, у которых существует *окрестность*, не пересекающаяся с S. По следствию 1 также имеем, что множество $\mathrm{ext}(S)$ всегда *открыто*.

Определение 20 (граничной точки). ***Границей*** множества S будем называть множество $\partial(S) := \overline{\mathrm{int}(S) \sqcup \mathrm{ext}(S)} = \overline{\mathrm{int}(S)} \cap \overline{\mathrm{ext}(S)}$. Точки $x \in \partial(S)$ будем называть ***граничными*** для множества S.

Из данного определения вытекает, что $\partial(S)$ состоит из тех и только из тех точек, у которых в любой *окрестности*, найдутся точки как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству S. Также отметим, что граница всегда *замкнута*, так как является дополнением к объединению двух открытых множеств.

Замечание 5. Из определений 16 предельной точки, 20 граничной точки вытекает, что любая точка, не лежащая во множестве S, является для него предельной тогда и только тогда, когда она является граничной. Таким образом, $\mathrm{cl}(S) = S \cup \partial(S)$. В силу того, что $S \setminus \mathrm{int}(S) \subset \partial(S)$, также получим $\mathrm{cl}(S) = \mathrm{int}(S) \sqcup \partial(S)$, отсюда $\mathrm{cl}(S) \setminus \mathrm{int}(S) = \partial(S)$, $\mathrm{cl}(S) \setminus \partial(S) = \mathrm{int}(S)$.

Определение 21 (покрытия). ***Покрытием*** множества $S \subset \Omega$ в пространстве (Ω, τ) называется любое семейство $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$ подмножеств Ω такое, что $S \subset \bigcup A$. Если при этом $A \subset \tau$, то покрытие A называется ***открытым***.

Определение 22 (подпокрытия). ***Подпокрытием*** покрытия A множества S называется любое множество $B \subset A$ такое, что $S \subset \bigcup B$.

Определение 23 (компакта). Множество S называется ***компактом***, если у любого его *открытого покрытия* существует *конечное* подпокрытие.

Всюду далее будем предполагать, что Ω_1, Ω_2 — *топологические пространства* и что на некотором множестве $S \subset \Omega_1$ определена функция f, принимающая значения из Ω_2. Вместо громоздкой записи $f\colon \Omega_1 \supset S \to \Omega_2$ будем использовать короткую запись $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$, а область определения уточнять отдельно, если потребуется. В случаях, когда явно определено некоторое подмножество $S \subset \Omega_1$, запись $f\colon S \to \Omega_2$ автоматически означает, что $\mathrm{Dom}(f) = S$.

Определение 24 (предела функции). Пусть $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ и $\Omega_1 \ni a$ — *предельная точка* для множества $\mathrm{Dom}(f)$. Элемент $b \in \Omega_2$ называется ***пределом функции*** f в точке a, если для любой *окрестности* V_b точки b найдётся некоторая *проколотая окрестность* $\mathring{U}_a$ точки a такая, что

$$f\big(\mathring{U}_a \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset V_b.$$

При этом употребляются обозначения $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Замечание 6. Если в определении 24 предела функции вместо Ω_1 взять топологическое пространство $\mathrm{Dom}(f) \cup \{a\}$ с индуцированной из исходного Ω_1 топологией, то функцию f всегда можно считать *определённой на всём* пространстве Ω_1 за исключением, быть может, самой точки a.

Утверждение 1 (о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел). *Пусть* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, *тогда функция* f *локально ограничена в точке* a.

Доказательство проводится точно так же, как доказательство утверждения 3.1.3 о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с заменой окрестностей $\mathring{O}_\delta(a)$ и $O_\delta(a)$ на $\mathring{U}_a$ и U_a соответственно. ◀

Теорема 2 (о предельном переходе в неравенстве). *Пусть* $f_1, f_2 \colon \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = b_1, \ \lim_{x\to a} f_2(x) = b_2,$$

a *— предельная точка для множества* $\mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2)$ *и найдётся проколотая окрестность* $\mathring{U}_a$ *точки a такая, что*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x)$$

для всех $x \in \mathring{U}_a \cap \mathrm{Dom}(f_1) \cap \mathrm{Dom}(f_2)$. *Тогда* $b_1 \leqslant b_2$.

Доказательство проводится точно так же, как доказательство теоремы 3.1.5 о предельном переходе в неравенстве для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с заменой окрестностей $\mathring{O}_\delta(a)$ на $\mathring{U}_a$. ◀

Теорема 3 [Принцип двустороннего ограничения]. *Пусть* $f_1, f_2, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = b,$$

a *— предельная точка для множества* $\mathrm{Dom}(g)$ *и найдётся проколотая окрестность* $\mathring{U}_a$ *точки a такая, что*

$$f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$$

для всех $x \in \mathring{U}_a \cap \mathrm{Dom}(g)$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Доказательство проводится точно так же, как доказательство теоремы 3.1.6 [Принцип двустороннего ограничения] для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с заменой окрестностей $\mathring{O}_\delta(a)$ на $\mathring{U}_a$. ◀

Теорема 4 [Критерий Коши существования предела функции]. *Пусть* M *— полное метрическое пространство* (см. определение 8) $f\colon \Omega \to M$ *и a — предельная точка для множества* $\mathrm{Dom}(f)$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \in M \iff$ $\iff \forall \varepsilon > 0$ *найдётся проколотая окрестность* $\mathring{U}_a$ *точки a такая, что для всех* $x_1, x_2 \in \mathring{U}_a \cap \mathrm{Dom}(f)$ *выполнено* $\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \varepsilon$.

Доказательство проводится точно так же, как доказательство теоремы 3.1.2 [Критерий Коши существования предела функции] для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с заменой $|x-y|$ на $\rho(x,y)$, с заменой окрестностей $\mathring{O}_\delta(a)$ на $\mathring{U}_a$ и с использованием полноты пространства M. ◀

Теорема 5 (об арифметических свойствах предела). *тити Пусть* $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x) \to a \in \mathbb{R}$, $g(x) \to b \in \mathbb{R}$ *при* $x \to x_0$ *и* x_0 *— предельная точка для множества* $\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$. *Тогда* $f(x) + g(x) \to a + b$, $f(x)g(x) \to ab$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{a}{b}$ *(в случае если* $b \neq 0$*) при* $x \to x_0$.

Доказательство проводится так же, как доказательство аналогичной теоремы 2.1.3 об арифметических операциях над сходящимися последовательностями с заменой $n \to \infty$ на $x \to x_0$, x_n на $f(x)$, y_n на $g(x)$, α_n на $\alpha(x)$, β_n на $\beta(x)$, где $\alpha(x), \beta(x) \to 0$ при $x \to x_0$, а также с использованием утверждения, аналогичного утверждению 3.1.2. ◀

Определение 25 (непрерывности функции в точке). Пусть $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ и $a \in \mathrm{Dom}(f)$. Функция f называется ***непрерывной в точке*** a, если для любой *окрестности* $V_{f(a)}$ точки $f(a)$ найдётся некоторая окрестность U_a точки a такая, что

$$f\big(U_a \cap \mathrm{Dom}(f)\big) \subset V_{f(a)}.$$

Определение 26 (непрерывности функции на множестве). Пусть f : $\Omega_1 \to \Omega_2$ и $S \subset \mathrm{Dom}(f)$. Функция f называется ***непрерывной на множестве*** S, если она непрерывна *в любой точке* $x \in S$. Класс всех функций f таких, что их сужения $f\big|_S$ непрерывны на S, обозначим через $C(S)$. При этом в случае $S = \mathrm{Dom}(f)$ функцию f называют ***непрерывной***. Согласно определениям 14 топологического подпространства и 25 непрерывности функции в точке условие $f \in C(S)$ равносильно непрерывности функции $f\big|_S\colon S \to \Omega_2$, где S рассматривается как *топологическое подпространство* пространства Ω_1.

Замечание 7. Под функцией $f \in C(S)$ в определении 26 непрерывности функции на множестве следует понимать не саму f, а тройку (f, Ω_1, Ω_2), только тогда корректно определено понятие непрерывности.

Замечание 8. Пусть Ω_1 — *тривиальное*, Ω_2 — *дискретное*, а Ω — произвольное топологические пространства (см. пример 1). Из определения 25 непрерывности функции в точке вытекает, что любые функции $f\colon \Omega \to \Omega_1$ и $g\colon \Omega_2 \to \Omega$ непрерывны на своих областях определения. Также по определению 25 непрерывности функции в точке проверяется, что любая функция является непрерывной в любой *изолированной* (см. определение 16) точке своей области определения.

Теорема 6. *Пусть $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$, $\mathrm{Dom}(f) = \Omega_1$ (если $\mathrm{Dom}(f) \Subset \Omega_1$, то в качестве Ω_1 возьмём $\mathrm{Dom}(f)$, рассмотренное как топологическое пространство с индуцированной топологией согласно определению 14). Тогда f непрерывна* (см. определение 26) $\iff$ *для любого открытого множества $A \subset \Omega_2$ его прообраз $f^{-1}[A]$ открыт в Ω_1.*

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Рассмотрим произвольную точку $x \in f^{-1}[A]$. Тогда открытое множество A является окрестностью точки $f(x)$, а значит, найдётся такая окрестность U_x точки x, что $f(U_x) \subset A$, следовательно,

$$U_x \subset f^{-1}[f(U_x)] \subset f^{-1}[A].$$

Это означает, что множество $f^{-1}[A] = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}[A]} U_x$ открыто.

$\Longleftarrow$: Возьмём произвольную точку $x \in \Omega_1$ и произвольную окрестность $V_{f(x)}$ точки $f(x) \in \Omega_2$. Тогда $f^{-1}[V_{f(x)}] =: U_x$ есть окрестность точки x и по определению прообраза $f(U_x) \subset V_{f(x)}$, что и означает непрерывность функции f в точке x. ◀

Определение 27 (гомеоморфизма). ***Гомеоморфизмом*** (или ***топологическим изоморфизмом***) пространств Ω_1, Ω_2 называется *непрерывная биекция* $f\colon \Omega_1 \xrightarrow{\sim} \Omega_2$, для которой $\mathrm{Dom}(f) = \Omega_1$ и *обратная* биекция $f^{-1}\colon \Omega_2 \xrightarrow{\sim} \Omega_1$ также *непрерывна*.

Нетрудно проверить, что отношение топологического изоморфизма на классе топологических пространств является *отношением эквивалентности* по определению 0.6.2 (то есть оно *рефлексивно, симметрично и транзитивно*). Обозначение: $\Omega_1 \overset{\mathrm{Top}}{\cong} \Omega_2$. Очевидно, что обратное к гомеоморфизму f отображение f^{-1} также является гомеоморфизмом.

Определение 28 (хаусдорфова пространства). Топологическое пространство называется ***хаусдорфовым***, если у любых двух его различных точек существуют *непересекающиеся* окрестности.

Замечание 9 (о единственности предела). Пусть Ω_H — *хаусдорфово* топологическое пространство, $f\colon \Omega \to \Omega_H$. Из определения 24 предела функции вытекает, что ни в какой точке $a \in \Omega$ функция f не может иметь более одного предела.

Определение 29 (локальной базы). Семейство $\mathcal{B}(x)$ *окрестностей точки* $x \in \Omega$ называется ***локальной базой*** пространства Ω в точке x (или ***базой окрестностей точки*** x), если для любой окрестности U_x точки x найдётся элемент $V \in \mathcal{B}(x)$ такой, что $V \subset U_x$.

Определение 30. Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет ***первой аксиоме счётности***, если в каждой его точке существует *не более чем счётная локальная база*.

Замечание 10. Отметим, что лемма 8.0.5 остаётся в силе для топологических пространств, удовлетворяющих *первой аксиоме счётности* (см. [1, 129]).

Замечание 11. Пусть пространство Ω_1 удовлетворяет *первой аксиоме счётности* (см. определение 30), $f\colon \Omega_1 \to \Omega$, $\mathrm{Dom}(f) = \Omega_1$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \iff$ для любой последовательности $a \neq x_n \to a$ имеем $f(x_n) \to b$, то есть верно определение предела функции по Гейне (секвенциальная сходимость). Доказательство этого факта можно найти, например, в [41, с. 83].

Определение 31 (базы топологии). Семейство $\mathcal{B}_\tau$ *открытых множеств* в пространстве (Ω, τ) называется ***базой топологии*** τ, если любое *открытое множество* U представимо в виде объединения некоторых множеств из $\mathcal{B}_\tau$, то есть если существует множество $A \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_\tau)$ такое, что

$$U = \bigcup A.$$

При этом говорят, что топология τ ***порождается*** базой $\mathcal{B}_\tau$. Из данного определения очевидным образом вытекает, что топология τ однозначно определяется любой из своих баз и состоит в точности из всевозможных объединений множеств из $\mathcal{B}_\tau$.

Утверждение 2. *Система $\mathcal{B}$ подмножеств множества Ω является базой некоторой топологии на Ω $\iff$*

(1) $\forall x \in \Omega\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B$,

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Доказательство.

$\Longrightarrow$: (1) вытекает из открытости множества Ω, а (2) — из открытости множества $B_1 \cap B_2$.

$\Longleftarrow$: Рассмотрим систему τ, состоящую из всевозможных объединений множеств из системы $\mathcal{B}$:

$$\tau := \Big\{ \bigcup A : A \in \mathcal{P}(\mathcal{B}) \Big\}.$$

Проверим, что τ является топологией на Ω, то есть проверим выполнение первого и третьего условий из определения 12 (второе условие выполнено по определению τ). При $A = \varnothing$ получим, что $\varnothing \in \tau$. При $A = \mathcal{B}$ в силу (1) получим, что $\Omega \in \tau$. Далее, если $U_1, U_2 \in \tau$, то $U_1 = \bigcup A_1$, $U_2 = \bigcup A_2$, где $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Тогда $U_1 \cap U_2 = \bigcup\limits_{\alpha \in A_1, \beta \in A_2} \alpha \cap \beta$. Так как для любых $\alpha \in A_1 \subset \mathcal{B}, \beta \in A_2 \subset \mathcal{B}$ и любого $x \in \alpha \cap \beta$ в силу (2) найдётся $B_x \in \mathcal{B}$, для которого $x \in B_x \subset \alpha \cap \beta$, то $\alpha \cap \beta = \bigcup\limits_{x \in \alpha \cap \beta} B_x$, отсюда окончательно следует $U_1 \cap U_2 \in \tau$. ◀

В качестве иллюстрации к определению базы топологии и утверждению 2 приведём следующее утверждение.

Утверждение 3. *Множество простых чисел бесконечно.*

Доказательство. На множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел рассмотрим топологию τ, порождённую базой $\mathcal{B}$, состоящей из всевозможных (неограниченных в обе стороны) арифметических прогрессий. Для проверки того, что множество $\mathcal{B}$ действительно порождает некоторую топологию, убедимся в выполнении двух условий утверждения 2. Условие (1) очевидно выполнено. Выполнение условия (2) следует из того, что если пересечение арифметических прогрессий с разностями p и q непусто, то арифметическая прогрессия с разностью pq целиком лежит в этом пересечении. Также дополнение к любой арифметической прогрессии с разностью $p \geqslant 1$ в $\mathbb{Z}$ есть объединение $p-1$ прогрессии с той же разностью, то есть открытое множество. Таким образом, по определению 15 замкнутого множества любая прогрессия является множеством замкнутым (и открытым одновременно), а значит, и любое конечное объединение прогрессий является замкнутым множеством. Далее для любого $p \in \mathbb{Z}$ рассмотрим прогрессию $A_p := \{kp : k \in \mathbb{Z}\}$ и определим множество $A := \bigcup\limits_{p\text{— простое}} A_p$. Так как дополнение $\overline{A} = \{-1, 1\}$ не является открытым, само множество A не является замкнутым, а значит, не может являться конечным объединением прогрессий. Это и означает, что множество простых чисел не может быть конечным. ◀

Определение 32 (топологии, порождённой метрикой). Пусть (M, ρ) — *метрическое пространство*. Тогда семейство открытых шаров $\mathcal{B}_\tau := \{O_\delta(x)\colon \delta > 0,\ x \in M\}$ удовлетворяет двум условиям утверждения 2, а значит, является базой некоторой (однозначно определённой!) топологии τ. При этом однозначно определено *топологическое пространство* (M, τ), а τ называют топологией, ***порождённой метрикой*** ρ.

Замечание 12. По определению 32 топологии, порождённой метрикой, нетрудно проверить, что *топологии, порождённые эквивалентными метриками* (см. определение 9), *совпадают*.

Определение 33 (метризуемого пространства). Топологическое пространство (Ω, τ) называется ***метризуемым***, если на множестве Ω существует некоторая *метрика ρ, порождающая топологию τ*.

Замечание 13. Многие ранее известные нам определения (открытого и замкнутого множеств, границы, предельной точки, предела функции, непрерывности, компактности и некоторые другие), данные для *метрических* пространств, полностью согласуются с соответствующими определениями для этих же пространств, рассмотренных как *топологические*. В частности, если M — некоторое *метрическое пространство*, $S \subset M$ — его *подпространство* (см. определение 6), то рассматривая пространства M и S как *топологические*, мы получим полное соответствие определений 6 и 14. Из этого замечания автоматически вытекает, что *любое подпространство метризуемого топологического пространства является метризуемым топологическим пространством.*

Теорема 7 [Критерий метризуемости]. *Топологическое пространство (Ω, τ) метризуемо $\iff$ существует гомеоморфизм $f\colon (\Omega, \tau) \to (M, \tau_1)$, где (M, τ_1) — некоторое метризуемое топологическое пространство.*

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Очевидно, так как тождественное отображение $\mathrm{Id}(x) = x$ пространства (Ω, τ) в себя является гомеоморфизмом.

$\Longleftarrow$: Пусть топология τ_1 порождена метрикой ρ на множестве M. Легко убедиться в том, что функция $\rho'\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, определённая равенством

$$\rho'(x, y) \coloneqq \rho\big(f(x), f(y)\big),$$

является *метрикой* на множестве Ω. Проверим, что топология τ порождена метрикой ρ'. Пусть $x \in \Omega$, $\delta > 0$. Покажем, что всевозможные шары $O_\delta(x)$ в метрике ρ' образуют базу топологии τ. В пространстве (Ω, τ) открытость шаров

$$O_\delta(x) = f^{-1}\Big(f\big(O_\delta(x)\big)\Big) = f^{-1}\Big(O_\delta\big(f(x)\big)\Big) = f^{-1}\big[O_\delta\big(f(x)\big)\big],$$

где $O_\delta\big(f(x)\big)$ — шар в (M, ρ), следует из теоремы 6. Далее, для любого открытого множества $A \in \tau$ в силу непрерывности обратной функции f^{-1} по теореме 6 имеем открытость в (M, τ_1) множества $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A) = (f^{-1})^{-1}[A]$. Для любого $x \in A$ это по определению означает, что для некоторого $\varepsilon_x > 0$ найдётся шар $O_{\varepsilon_x}\big(f(x)\big) \subset f(A)$ в метрике ρ. Но тогда для шара $O_{\varepsilon_x}(x)$ в метрике ρ' имеем

$$O_{\varepsilon_x}(x) = f^{-1}\Big(f\big(O_{\varepsilon_x}(x)\big)\Big) = f^{-1}\Big(O_{\varepsilon_x}\big(f(x)\big)\Big) \subset f^{-1}\big(f(A)\big) = A,$$

то есть $A = \bigcup\limits_{x \in A} O_{\varepsilon_x}(x)$, что и завершает доказательство того, что шары в метрике ρ' образуют базу топологии τ. ◀

Утверждение 4. *Любое метризуемое топологическое пространство (Ω, τ) является хаусдорфовым.*

Доказательство. Пусть ρ — метрика, порождающая топологию τ, $x, y \in \Omega$ и $x \neq y$. Тогда $\rho(x, y) =: d > 0$, шары $O_{\frac{d}{2}}(x), O_{\frac{d}{2}}(y)$, рассмотренные в метрике ρ, по определению принадлежат топологии τ и $O_{\frac{d}{2}}(x) \cap O_{\frac{d}{2}}(y) = \varnothing$. ◀

Утверждение 5. *Любое метризуемое топологическое пространство (Ω, τ) удовлетворяет первой аксиоме счётности.*

Доказательство. Действительно, в качестве локальной базы пространства Ω в любой его точке x можно взять не более чем счётную систему открытых шаров

$$\mathcal{B}(x) := \{O_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

в метрике ρ, порождающей топологию τ. ◀

Теорема 8 (о непрерывном образе компакта). *Пусть $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$, $f \in C(K)$, где K — компакт. Тогда $f(K)$ — компакт.*

Доказательство. Пусть $f(K) \subset \bigcup A$ — *открытое покрытие* (см. определение 21) множества $f(K)$. Рассматривая K как *топологическое подпространство* пространства Ω_1, по определению 14 *индуцированной топологии* получим непрерывность функции $f\big|_K$, рассмотренной *на пространстве* K. Тогда для всех $\alpha \in A$ прообраз $f\big|_K^{-1}[\alpha]$ открыт в пространстве K по теореме 6, а значит, $f\big|_K^{-1}[\alpha] = K \cap U_\alpha$, где U_α — некоторое *открытое в* Ω_1 *множество*. Так как для любого $x \in K$ имеем $f\big|_K(x) = f(x) \in \alpha$ для некоторого $\alpha \in A$, то

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} f\big|_K^{-1}[\alpha] = K \cap \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

В силу компактности K имеем $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$, отсюда

$$f(K) = f\left(K \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(K \cap U_{\alpha_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} f\big(f\big|_K^{-1}[\alpha_i]\big) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

что и означает компактность множества $f(K)$. ◀

Следствие 2 теоремы 8 о непрерывном образе компакта. *Для функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, действующих из топологических пространств, справедливы аналоги первой 9.1.12 и второй 9.1.13 теорем Вейерштрасса.*

Пример 3. Добавим ко множеству вещественных чисел новый элемент, который обозначим символом ∞. На множестве

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

введём базу топологии τ:

$$B_\tau := \big\{(a,b), (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \cup \{\infty\} : a, b \in \mathbb{R}\big\}.$$

Таким образом, построим *топологическое пространство* $\overline{\mathbb{R}} := (\overline{\mathbb{R}}, \tau)$.

На плоскости $\mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой ρ рассмотрим окружность $S_1(0,1) :=$ $:= \{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 = 1\}$. Имеем метрическое пространство $\big(S_1(0,1), \rho\big)$ (см. определение 2.6), а значит, и топологическое пространство $\big(S_1(0,1), \tau_1\big)$, где топология τ_1 порождена метрикой ρ (см. определение 32). Далее определим функцию $f\colon (S_1(0,1), \tau_1) \to (\overline{\mathbb{R}}, \tau)$ по следующему правилу: каждой точке $M \in$ $\in S_1(0,1) \setminus \{(0,2)\}$ поставим в соответствие точку $x \in \mathbb{R}$, являющуюся первой координатой точки пересечения оси Ox с лучом, выходящим из точки $(0,2)$ и проходящим через точку M. Самой точке $(0,2)$ поставим в соответствие точку ∞ (см. рис. 40).

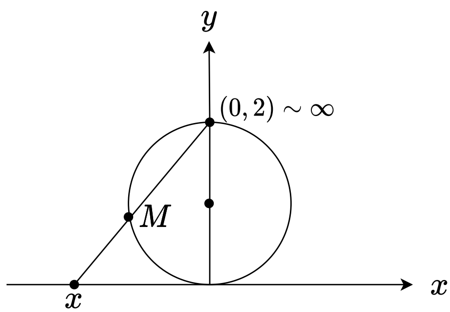


Рис. 40

Нетрудно проверить, что f — биекция. Более того, для всех $\delta > 0$ и всех $A \in$ $\in \mathbb{R}^2$ множество $M := f\big(S_1(0,1) \cap O_\delta(A)\big)$ есть либо некоторый интервал (a,b), где $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$, либо множество вида $(-\infty, a) \cup (b, +\infty) \cup \{\infty\}$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Обратно, для любого из рассмотренных множеств M имеем равенство $f^{-1}(M) = S_1(0,1) \cap O_\delta(A)$ для некоторого $\delta > 0$ и некоторого $A \in \mathbb{R}^2$. В силу определений баз топологий τ и τ_1, используя теорему 6, а также тот факт, что образ объединения любых множеств является объединением их образов, получим, что f является *гомеоморфизмом* топологических пространств.

Используя теорему 7 [Критерий метризуемости], получим, что пространство $\overline{\mathbb{R}}$ *метризуемо*. Также имеем компактность окружности $S_1(0,1)$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ по лемме 9.1.6 о компактности сфер и замкнутых шаров в $\mathbb{R}^n$, отсюда (см. замечание 13) по определению индуцированной топологии следует её компактность в себе, поэтому по теореме 8 получаем, что пространство $\overline{\mathbb{R}}$ является *компактом*.

Замечание 14. Совершенно аналогично примеру 3, можно рассмотреть топологическое пространство $(\overline{\mathbb{R}^2}, \tau)$, где

$$\overline{\mathbb{R}^2} := \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$$

и

$$B_\tau := \big\{ O_\delta(\mathbf{z}), \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \setminus \mathrm{cl}\big(O_\delta(\mathbf{z})\big) : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2, \delta > 0 \big\},$$

где $\operatorname{cl}\bigl(O_\delta(\mathbf{z})\bigr) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| \leqslant \delta\}$. По аналогии с примером 3 строится *гомеоморфизм* (называемый *стереографической проекцией*) $f\colon \bigl(S_1(0,0,1),\rho\bigr) \to$ $\to (\overline{\mathbb{R}^2},\tau)$, где $S_1(0,0,1) := \{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-1)^2 = 1\}$ (сфера Римана), ρ — *евклидова метрика*, индуцированная из $\mathbb{R}^3$. При этом $f(0,0,2) := \infty$. Совершенно аналогично примеру 3 показывается, что пространство $\overline{\mathbb{R}^2}$ является *метризуемым компактом*. Отметим, что построение пространств $\overline{\mathbb{R}}$ и $\overline{\mathbb{R}^2}$ при помощи добавления всего одной точки ∞ полностью укладывается в концепцию *одноточечной компактификации Александрова* (см. [42, с. 150] или [1, с. 311]). Отметим также, что стандартные определения пределов $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)$ даются как соответствующие пределы в *топологических пространствах* $\overline{\mathbb{R}}$ и $\overline{\mathbb{R}^2}$.

Утверждение 6. *На множестве $\overline{\mathbb{R}}$ не существует метрики, продолжающей стандартную метрику ρ на $\mathbb{R}$ и порождающей топологию τ из примера 3.*

Доказательство. Пусть на множестве $\overline{\mathbb{R}}$ определена некоторая метрика $\overline{\rho}$, совпадающая с метрикой ρ на $\mathbb{R}$ и порождающая топологию τ. Тогда, согласно определению 32 топологии, порождённой метрикой, $O_1^{\overline{\rho}}(\infty) =: U \in \tau$, при этом $\infty \in U$, а значит, для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$ имеем $(-\infty, a) \cup (b, +\infty) \subset U$ по определению базы топологии τ. Но тогда

$$\overline{\rho}(b+102, b+105) = \rho(b+102, b+105) = 3 \leqslant \overline{\rho}(b+102,\infty) + \overline{\rho}(b+105,\infty) < 2,$$

так как выполнено $b+102, b+105 \in O_1^{\overline{\rho}}(\infty)$. Получили противоречие. ◀

Пример 4. Рассмотрим *расширенную числовую прямую*, впервые определённую в 1.3.5, как топологическое пространство $(\overline{\overline{\mathbb{R}}},\tau)$, где $\overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и

$$B_\tau := \bigl\{(a,b), (-\infty,a)\cup\{-\infty\}, (b,+\infty)\cup\{+\infty\} : a, b \in \mathbb{R}\bigr\}$$

— *база* топологии τ. Нетрудно (аналогично примеру 3) проверить, что функция $f\colon (\overline{\overline{\mathbb{R}}},\tau) \to [0,1]$, определённая равенством

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x + 1\right) & \text{при } x \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{при } x = -\infty, \\ 1 & \text{при } x = +\infty. \end{cases}$$

является *гомеоморфизмом* соответствующих *топологических пространств*, а значит, $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ является *метризуемым компактом* в силу теорем 7 [Критерий метризуемости] и 8 о непрерывном образе компакта. Отметим также, что стандартные определения пределов $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ даются как соответствующие пределы в *топологическом пространстве* $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

Замечание 15 (о пределе последовательности). Рассматривая произвольную последовательность $x_n \in \Omega$ как функцию $f\colon \overline{\overline{\mathbb{R}}} \supset \mathbb{N} \to \Omega$, $x_n := f(n)$, мы получим определение *предела последовательности точек топологического пространства* как предела функции f в паре топологических пространств $(\overline{\overline{\mathbb{R}}}, \Omega)$ при $n \to +\infty$ (см. аналогичное по своей сути замечание 3.1.3 о пределе последовательности).

Пример 5. Рассмотрим пространство $(\widetilde{\mathbb{R}}, \tau)$, где

$$\widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup (\mathbb{R}-) \cup (\mathbb{R}+) \cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$$

(то есть $\widetilde{\mathbb{R}}$ состоит из трёх различных экземпляров вещественной прямой $\mathbb{R}$ и ещё из трёх точек), а база топологии τ определяется как

$$B_\tau := \big\{(a,b), \{a+\} \cup (a,c), \{a-\} \cup (d,a), (-\infty,a) \cup \{-\infty\}, (b,+\infty) \cup \{+\infty\},\\ (-\infty,a) \cup (b,+\infty) \cup \{\infty\} : a- \in \mathbb{R}-, a+ \in \mathbb{R}+, a,b,c,d \in \mathbb{R}, d < a < c\big\}.$$

Из определения B_τ вытекает, что у точек $-\infty$ и ∞ не существует непересекающихся окрестностей, а значит, пространство $\widetilde{\mathbb{R}}$ *не является хаусдорфовым*. Используя утверждение 4, получим, что $\widetilde{\mathbb{R}}$ также *не является метризуемым*. Однако, как легко проверить (в качестве элементов локальных баз можно взять соответствующие элементы базы B_τ, где $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$), пространство $\widetilde{\mathbb{R}}$ удовлетворяет *первой аксиоме счётности* (см. определение 30). В силу замечания 11 это означает, что для функций $f\colon \widetilde{\mathbb{R}} \to \Omega$ выполняется определение предела по Гейне.

Определение 34 (прямого произведения топологических пространств). Пусть (Ω_1, τ_1), (Ω_2, τ_2) — топологические пространства, а B_{τ_1}, B_{τ_2} — *произвольные базы* топологий τ_1, τ_2 соответственно. Пространство (Ω, τ), где $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$, а база топологии τ определяется как $B_\tau := B_{\tau_1} \times B_{\tau_2}$, называется ***прямым произведением топологических пространств*** Ω_1, Ω_2. Для прямого произведения топологических пространств будем также использовать обозначение $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Легко проверяется корректность данного определения в том смысле, что топология τ *не зависит* от выбора баз B_{τ_1}, B_{τ_2}.

Замечание 16. Пусть $\widetilde{\mathbb{R}}^3 := \widetilde{\mathbb{R}} \times \widetilde{\mathbb{R}} \times \widetilde{\mathbb{R}}$ (см. пример 5 и определение 34 прямого произведения топологических пространств), а $\widetilde{\mathbb{R}}$ — топологическое пространство из примера 5, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \Omega$. Тогда всевозможные пределы, такие как $\lim\limits_{(x,y,z)\to(3+,-\infty,27)} f(x,y,z)$ или $\lim\limits_{(x,y,z)\to(\infty,+\infty,5-)} f(x,y,z)$, можно понимать как соответствующие пределы функции $f\colon \widetilde{\mathbb{R}}^3 \to \Omega$ (при этом обычно предполагается, что $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^3$, хотя, доопределив функцию f в некоторых точках пространства $\widetilde{\mathbb{R}}^3$, не входящих в $\mathbb{R}^3$, мы можем варьировать определения рассмотренных выше пределов). При этом у всех этих пределов есть естественная и простая интерпретация по Гейне. Особым случаем является предел, обычно обозначаемый как $\lim\limits_{\|(x,y,z)\|\to\infty} f(x,y,z)$ или $\lim\limits_{(x,y,z)\to\infty} f(x,y,z)$, который не вписывается в рассмотренную конструкцию. Его следует понимать как соответствующий предел в пространстве $\overline{\mathbb{R}^3} \neq \overline{\mathbb{R}}^3$, то есть в *одноточечной компактификации* пространства $\mathbb{R}^3$ (см. замечание 14).

§ 10.3. Об инвариантности меры Жордана относительно изометрий

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \in J(\mathbb{R}^n)$ *и* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *— линейный оператор* (см. пункт 9.2.0), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— его матрица, то есть* $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. *Тогда* $\mathcal{A}(\Omega) \in J(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\mu\big(\mathcal{A}(\Omega)\big) = |\det(A)|\mu(\Omega).$$

Доказательство. Пусть $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— единичная матрица. Элементарной* назовём матрицу одного из трёх типов:

1) $M_{\alpha,j}$, полученную из матрицы I умножением её j-й строки на число α;

2) $C_{j,k}$ при $j < k$, полученную из матрицы I перестановкой её j-й и k-й строк местами;

3) $S_{j,k}$, полученную из матрицы I прибавлением к её k-й строке j-й строки.

Образ произвольного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ под действием линейного оператора с матрицей $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ будем обозначать через $A\Omega$, то есть $A\Omega := \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \Omega\}$. Рассмотрим *произвольное* элементарное множество

$$E = \bigsqcup_{i=1}^{m} B_i \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),$$

где B_i *— брусы*. Для произвольного бруса $B = I_1 \times \ldots \times I_n$ множества

$$M_{\alpha,j}B = I_1 \times \ldots \times I_{j-1} \times \alpha I_j \times I_{j+1} \times \ldots \times I_n,$$

$$C_{j,k}B = I_1 \times \ldots \times I_{j-1} \times I_k \times I_{j+1} \times \ldots \times I_{k-1} \times I_j \times I_{k+1} \times \ldots \times I_n$$

являются брусами, а следовательно, измеримы. При этом имеем

$$\mu(M_{\alpha,j}B) = |\alpha||B| = |\det(M_{\alpha,j})|\mu(B) \;\text{ и }\; \mu(C_{j,k}B) = |B| = |\det(C_{j,k})|\mu(B).$$

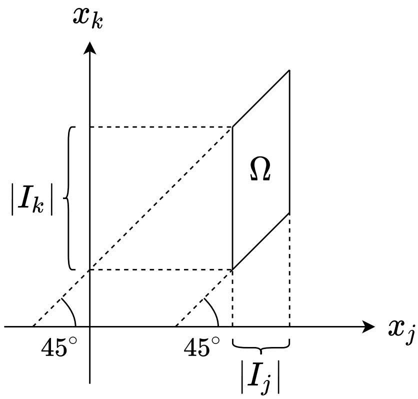


Рис. 41

Далее рассмотрим в плоскости Ox_jx_k множество (являющееся параллелограммом) $\Omega := \{(x_j, x_j + x_k) : x_j \in I_j, x_k \in I_k\}$ (см. рис. 41). По теореме 8.3.2 о площади криволинейной трапеции плоское множество Ω является измеримым и $\mu_2(\Omega) = |I_j||I_k|$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся конечные промежутки $\overline{I}_j^q, \overline{I}_k^q, \underline{I}_j^q, \underline{I}_k^q$ такие, что

$$\bigsqcup_{q=1}^{l} \underline{I}_j^q \times \underline{I}_k^q \subset \Omega \subset \bigsqcup_{q=1}^{m} \overline{I}_j^q \times \overline{I}_k^q,$$

$$\sum_{q=1}^{l} |\underline{I}_j^q||\underline{I}_k^q| > |I_j||I_k| - \frac{\varepsilon}{c+1}, \sum_{q=1}^{m} |\overline{I}_j^q||\overline{I}_k^q| < |I_j||I_k| + \frac{\varepsilon}{c+1}, \qquad (1)$$

где $c := \prod_{p \in \overline{1,n} \setminus \{j,k\}} |I_p|$. Так как $S_{j,k}B = \{(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_j + x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) : x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\}$, имеем

$$Q_1 := \bigsqcup_{q=1}^{l} I_1 \times \ldots \times I_{j-1} \times \underline{I}_j^q \times I_{j+1} \times \ldots \times I_{k-1} \times \underline{I}_k^q \times I_{k+1} \times \ldots \times I_n \subset S_{j,k}B \subset$$
$$\subset \bigsqcup_{q=1}^{m} I_1 \times \ldots \times I_{j-1} \times \overline{I}_j^q \times I_{j+1} \times \ldots \times I_{k-1} \times \overline{I}_k^q \times I_{k+1} \times \ldots \times I_n =: Q_2.$$

При этом

$$\mu(Q_1) = c \sum_{q=1}^{l} |\underline{I}_j^q||\underline{I}_k^q| \overset{(1)}{\geqslant} c|I_j||I_k| - \frac{c\varepsilon}{c+1} = |B| - \frac{c\varepsilon}{c+1} > |B| - \varepsilon,$$
$$\mu(Q_2) = c \sum_{q=1}^{m} |\overline{I}_j^q||\overline{I}_k^q| \overset{(1)}{\leqslant} c|I_j||I_k| + \frac{c\varepsilon}{c+1} = |B| + \frac{c\varepsilon}{c+1} < |B| + \varepsilon.$$

Последние неравенства влекут измеримость множества $S_{j,k}B$, а также равенство $\mu(S_{j,k}B) = |B| = |\det(S_{j,k})|\mu(B)$. Таким образом, для любой *элементарной матрицы* L и любого бруса B имеем $LB \in J(\mathbb{R}^n)$ и

$$\mu(LB) = |\det(L)|\mu(B). \qquad (2)$$

Пусть L — произвольная *элементарная матрица*. Выше было показано, что для любого бруса B множество LB является измеримым. Для произвольного элементарного множества E по лемме 8.2.1′ получим, что множество $LE = \bigcup\limits_{i=1}^{m} LB_i$ является измеримым. Если $\det(L) \neq 0$, то соответствующий оператор инъективен и

$$\mu(LE) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{m} LB_i\right) \overset{\text{т. } 8.2.1'}{=} \sum_{i=1}^{m} \mu(LB_i) \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{m} |\det(L)|\mu(B_i) = |\det(L)|\mu(E).$$

Если $\det(L) = 0$, то

$$\mu(LE) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} LB_i\right) \overset{\text{т. } 8.2.1'}{\leqslant} \sum_{i=1}^{m} \mu(LB_i) \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{m} |\det(L)|\mu(B_i) = 0,$$

то есть $\mu(LE) = 0 = |\det(L)|\mu(E)$. Таким образом, для любой элементарной матрицы L и любого множества $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ имеем $LE \in J(\mathbb{R}^n)$ и

$$\mu(LE) = |\det(L)|\mu(E). \tag{3}$$

Рассмотрим произвольное множество $\Omega \in J(\mathbb{R}^n)$. Если $\det(L) \neq 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ найдутся множества $E_1, E_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ такие, что $E_1 \subset \Omega \subset E_2$ и

$$\mu(E_1) > \mu(\Omega) - \frac{\varepsilon}{|\det(L)|}, \quad \mu(E_2) < \mu(\Omega) + \frac{\varepsilon}{|\det(L)|}. \tag{4}$$

Тогда получим $LE_1 \subset L\Omega \subset LE_2$ и

$$\mu(LE_1) \overset{(3)}{=} |\det(L)|\mu(E_1) \overset{(4)}{>} |\det(L)|\mu(\Omega) - \varepsilon,$$
$$\mu(LE_2) \overset{(3)}{=} |\det(L)|\mu(E_2) \overset{(4)}{<} |\det(L)|\mu(\Omega) + \varepsilon,$$

отсюда следует $L\Omega \in J(\mathbb{R}^n)$ по теореме 8.2.2′, а также равенство $\mu(L\Omega) = |\det(L)|\mu(\Omega)$. Если $\det(L) = 0$, то, взяв любое $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\Omega \subset E$, получим $L\Omega \subset LE$ и при этом $\mu(LE) = 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдётся множество $E' \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ такое, что $L\Omega \subset LE \subset E'$ и $\mu(E') < \varepsilon$, отсюда получим $\mu(L\Omega) = 0 = |\det(L)|\mu(\Omega)$ (см. замечание 8.2.2). Таким образом, для любой элементарной матрицы L и любого множества $\Omega \in J(\mathbb{R}^n)$ имеем $L\Omega \in J(\mathbb{R}^n)$ и

$$\mu(L\Omega) = |\det(L)|\mu(\Omega). \tag{5}$$

Из курса алгебры известно (*метод Гаусса*), что произвольная матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ представима в виде $A = L_k \ldots L_1 I$, где все L_i — *элементарные матрицы* при $i \in \overline{1, k}$. Для любого множества $\Omega \in J(\mathbb{R}^n)$, используя равенство (5), по индукции имеем $A\Omega = L_k \ldots L_1 \Omega \in J(\mathbb{R}^n)$ и $\mu(A\Omega) = |\det(L_k)| \ldots |\det(L_1)|\mu(\Omega) = |\det(A)|\mu(\Omega)$, что и завершает доказательство теоремы. ◄

Лемма 1. *Пусть* $\varphi\colon \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ — *изометрия* (см. определение 8.3.1), $\mathbf{0} \in \Omega$ *и* $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. *Тогда* $\langle \varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *для всех* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$.

Доказательство. Для всех $\mathbf{x} \in \Omega$ имеем

$$\|\varphi(\mathbf{x})\| = \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| == \|\mathbf{x}\|,$$

поэтому

$$\langle \varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{2}\bigl(\|\varphi(\mathbf{x})\|^2 + \|\varphi(\mathbf{y})\|^2 - \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\|^2\bigr) =$$
$$= \frac{1}{2}\bigl(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2\bigr) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \qquad \blacktriangleleft$$

Теорема 2 (о продолжении изометрии с произвольного множества на всё пространство). *Пусть* $\varphi\colon \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ — *изометрия* (см. определение 8.3.1). *Тогда существуют ортогональный линейный оператор* Q*:* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *и вектор* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ *такие, что*

$$\varphi(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

для всех $\mathbf{x} \in \Omega$.

Доказательство. Для любого вектора $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ определим *функцию сдвига* $T_{\mathbf{b}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ равенством $T_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{b}$. Очевидно, что функция $T_{\mathbf{b}}$ является *изометрией*. Фиксируем *произвольный* вектор $\mathbf{a} \in \Omega$ и обозначим $\Omega' := \Omega - \mathbf{a}$, $\mathbf{b} := -\varphi(\mathbf{a})$. Тогда функция $\varphi_1 := T_{\mathbf{b}} \circ \varphi \circ T_{\mathbf{a}}\colon \Omega' \to \mathbb{R}^n$ является изометрией как композиция изометрий. Имеем

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{b}}\bigl(\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{a})\bigr) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{a})$$

для всех $\mathbf{x} \in \Omega'$, отсюда $\varphi_1(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, поэтому $\|\varphi_1(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ и

$$\langle \varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_1(\mathbf{y}) \rangle \overset{\text{Л. 1}}{=} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \tag{6}$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega'$. Обозначим через $V := \operatorname{Span}(\Omega')$ *линейную оболочку* множества Ω'. Для каждого $\mathbf{y} \in V$ фиксируем *произвольно выбранное* из бесконечного множества представление в виде $\mathbf{y} = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{x}_j$, где $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \Omega'$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Используя выбранное представление, определим для всех $\mathbf{y} \in V$ функцию $Q_1\colon V \to \mathbb{R}^n$ формулой

$$Q_1(\mathbf{y}) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varphi_1(\mathbf{x}_j). \tag{7}$$

Для любых $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in \Omega'$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \in \mathbb{R}$ имеем

$$\left\| \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \varphi_1(\mathbf{x}_j) \right\|^2 = \sum_{j,q=1}^{p} \gamma_j \gamma_q \langle \varphi_1(\mathbf{x}_j), \varphi_1(\mathbf{x}_q) \rangle \overset{(6)}{=}$$
$$\overset{(6)}{=} \sum_{j,q=1}^{p} \gamma_j \gamma_q \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_q \rangle = \left\| \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \mathbf{x}_j \right\|^2, \tag{8}$$

отсюда следует, что $\|Q_1(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{y}\|$ для всех $\mathbf{y} \in V$. Далее для любого $\mathbf{y} \in V$ рассмотрим его *произвольное* представление в виде

$$\mathbf{y} = \sum_{q=1}^{m} \beta_q \mathbf{z}_q,$$

где $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m \in \Omega'$, $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\left\| Q_1(\mathbf{y}) - \sum_{q=1}^{m} \beta_q \varphi_1(\mathbf{z}_q) \right\|^2 \overset{(7)}{=} \left\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varphi_1(\mathbf{x}_j) - \sum_{q=1}^{m} \beta_q \varphi_1(\mathbf{z}_q) \right\|^2 \overset{(8)}{=}$$
$$\overset{(8)}{=} \left\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{x}_j - \sum_{q=1}^{m} \beta_q \mathbf{z}_q \right\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}\| = 0,$$

тогда равенство (7) остаётся верным *для любого представления* вида $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{x}_j$, где $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \Omega'$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, а не только для одного, изначально нами фиксированного. Отсюда автоматически вытекает, что $Q_1(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in \Omega'$, а также *линейность* функции Q_1 на всём пространстве V. Тогда для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ мы имеем

$$\|Q_1\mathbf{x} - Q_1\mathbf{y}\| = \|Q_1(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

то есть Q_1 — *изометрия*. Обозначим через $W := \mathrm{Span}\big(\varphi_1(\Omega')\big) = Q_1(V)$ *линейную оболочку* множества $\varphi_1(\Omega')$. Так как *любая изометрия инъективна*, оператор Q_1 является *линейным изоморфизмом* линейных пространств V, W. Таким образом, $\dim(V) = \dim(W)$ и $\dim(V^\perp) = \dim(W^\perp) =: m$. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ и $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ — *произвольные ортонормированные базисы* пространств $V^\perp$ и $W^\perp$ соответственно. Определив оператор $Q_2 \colon V^\perp \to W^\perp$ для всех $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{e}_m \in V^\perp$ по формуле $Q_2\mathbf{x} := \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{f}_m$, мы, очевидно, получим *линейный изоморфизм* пространств $V^\perp$ и $W^\perp$, который в силу верного для всех $\mathbf{x} \in V$ равенства $\|Q_2\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_m^2}$ является *линейной изометрией*. Определим *линейный оператор* $Q = Q_1 \oplus Q_2 \colon \mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp \to \mathbb{R}^n$ для всех $\mathbf{x} = \underset{V}{\underset{\Cap}{\mathbf{v}}} + \underset{V^\perp}{\underset{\Cap}{\mathbf{u}}} \in \mathbb{R}^n$ равенством $Q\mathbf{x} := Q_1\mathbf{v} + Q_2\mathbf{u}$. Тогда для любых векторов $\mathbf{x} = \underset{V}{\underset{\Cap}{\mathbf{v}}} + \underset{V^\perp}{\underset{\Cap}{\mathbf{u}}} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{x}' = \underset{V}{\underset{\Cap}{\mathbf{v}'}} + \underset{V^\perp}{\underset{\Cap}{\mathbf{u}'}} \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\|Q\mathbf{x} - Q\mathbf{x}'\|^2 = \|Q_1\mathbf{v} - Q_1\mathbf{v}' + Q_2\mathbf{u} - Q_2\mathbf{u}'\|^2 = \|Q_1\mathbf{v} - Q_1\mathbf{v}'\|^2 + \|Q_2\mathbf{u} - Q_2\mathbf{u}'\|^2 =$$
$$= \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}'\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{v}' + \mathbf{u} - \mathbf{u}'\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|,$$

таким образом, Q — *линейная изометрия*, отображающая пространство $\mathbb{R}^n$ на себя. По определению *сопряжённого оператора* Q^* для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\langle Q^*Q\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y}\rangle \overset{\text{Л. 1}}{=} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle,$$

отсюда при $\mathbf{y} := Q^*Q\mathbf{x} - \mathbf{x}$ получим

$$\|Q^*Q\mathbf{x} - \mathbf{x}\|^2 = \langle Q^*Q\mathbf{x} - \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0,$$

то есть $Q^*Q\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, отсюда $Q^*Q = I$ и Q — *ортогональный оператор* по определению.

Функция $\widetilde{\varphi} := T_{-\mathbf{b}} \circ Q \circ T_{-\mathbf{a}}$ является *изометрией* пространства $\mathbb{R}^n$ на себя как композиция изометрий, и для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\widetilde{\varphi}(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) - \mathbf{b} = Q\mathbf{x} + \mathbf{c},$$

где $\mathbf{c} := \varphi(\mathbf{a}) - Q\mathbf{a}$. При этом для всех $\mathbf{x} \in \Omega$ имеем $\mathbf{x} - \mathbf{a} \in \Omega' \subset V$ и

$$\widetilde{\varphi}(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) - \mathbf{b} = Q_1(\mathbf{x} - \mathbf{a}) - \mathbf{b} =$$
$$= \varphi_1(\mathbf{x} - \mathbf{a}) - \mathbf{b} = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{a} + \mathbf{a}) + \mathbf{b} - \mathbf{b} = \varphi(\mathbf{x}),$$

что и завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание 1. Пространство $V = \operatorname{Span}(\Omega - \mathbf{a})$ из доказательства теоремы 2 не зависит от выбора вектора $\mathbf{a} \in \Omega$. При этом если $V \neq \mathbb{R}^n$, то оператор Q определён *неоднозначно*, хотя его сужение на пространство V однозначно определено.

Действительно, пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega$. Тогда для любого $\mathbf{y} \in \operatorname{Span}(\Omega - \mathbf{a})$ имеем

$$\mathbf{y} = \alpha_0(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}) + \ldots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{a}) =$$
$$= \alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}) + \ldots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{b}) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k)(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \in \operatorname{Span}(\Omega - \mathbf{b}),$$

где $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \Omega$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. ◀

Теорема 3 (об инвариантности меры Жордана относительно изометрий). *Пусть* $\Omega \in J(\mathbb{R}^n)$ *и* $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ — *изометрия* (см. определение 8.3.1). *Тогда* $\varphi(\Omega) \in J(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\mu\big(\varphi(\Omega)\big) = \mu(\Omega).$$

Доказательство. По теореме 2 найдутся ортогональный оператор Q и вектор $\mathbf{c}$ такие, что $\varphi(\Omega) = Q(\Omega) + \mathbf{c}$. Так как $|\det(Q)| = 1$, получим $Q(\Omega) \in J(\mathbb{R}^n)$ и $\mu\big(Q(\Omega)\big) = \mu(\Omega)$ по теореме 1. Так как мера Жордана инвариантна относительно сдвигов (см. замечание 8.2.1), окончательно получим $\mu\big(\varphi(\Omega)\big) = \mu(\Omega)$. ◄

§ 10.4. Основная теорема алгебры

Всюду далее множество комплексных чисел будем рассматривать как нормированное пространство с *евклидовой нормой*, то есть $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ Таким образом, для всех $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ имеем $|z_1 - z_2| = \|z_1 - z_2\|$, а под сходимостью в пространстве $\mathbb{C}$ по определению понимается сходимость по норме пространства $\mathbb{R}^2$.

Следствие 1 леммы 9.1.5 о непрерывности нормы и теоремы 9.1.8′ о непрерывности композиции непрерывных функций. *Если функция* $f\colon \mathbb{C} \supset \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{C}$ *непрерывна в точке* z_0, *то функция* $|f|\colon \mathbb{C} \supset \mathrm{Dom}(f) \to \to \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* z_0.

Лемма 1. *Для любых последовательностей* $z_n, z_n' \in \mathbb{C}$ *таких, что* $z_n \to z_0 \in \mathbb{C}$, $z_n' \to z_0' \in \mathbb{C}$ *имеем*
$$z_n z_n' \to z_0 z_0'. \tag{1}$$

Доказательство. Используя неравенство 5.2.2 треугольника, свойства 5.2.5 модуля комплексного числа, лемму 9.1.5 о непрерывности нормы теорему 2.1.3 об арифметических операциях над сходящимися последовательностями, получим

$$\begin{aligned}0 \leqslant |z_n z_n' - z_0 z_0'| = |(z_n - z_0)z_n' + z_0(z_n' - z_0')| \leqslant \\ \leqslant |z_n - z_0||z_n'| + |z_0||z_n' - z_0'| \to 0|z_0'| + |z_0|0 = 0.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает (1) по принципу 2.1.2 двустороннего ограничения. ◄

Утверждение 1. *Для любого многочлена* $P \in \mathbb{C}[x]$ *функции* $\widetilde{P}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (см. определение 5.2.9) *и* $|\widetilde{P}|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *непрерывны в любой точке* $z_0 \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Непрерывность функции $\widetilde{P}$ вытекает из лемм 8.0.4, 1 и определения 9.1.3′ Гейне. Непрерывность функции $|\widetilde{P}|$ вытекает из непрерывности функции $\widetilde{P}$ в силу следствия 1. ◄

Лемма 2 (Даламбера). *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$, $a_n \neq 0$, $c \in \mathbb{C}$ *и* $|P(c)| > 0$. *Тогда существует* $z_0 \in \mathbb{C}$ *такое, что*

$$|P(z_0)| < |P(c)|.$$

Доказательство. Для всех $z \in \mathbb{C}$ рассмотрим функцию

$$Q(z) := \frac{P(z+c)}{P(c)}.$$

Так как $Q(0) = 1$, то для всех $z \in \mathbb{C}$ верно равенство

$$Q(z) = 1 + b_k z^k + \ldots + b_n z^n,$$

где $k \in \overline{1,n}$, $b_k, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ и $b_k \neq 0$. Из свойств 5.2.5 модуля комплексного числа, теоремы 5.2.1 о полярной системе координат и определения 5.2.6 комплексной экспоненты вытекает существование $\varphi \in (-\pi, \pi]$, для которого

$$e^{ik\varphi} = -\frac{|b_k|}{b_k}.$$

Для любого $r \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$Q(re^{i\varphi}) = 1 - r^k|b_k| + r^k f(r), \tag{2}$$

где

$$f(r) := rb_{k+1}e^{i(k+1)\varphi} + \ldots + r^{n-k}b_n e^{in\varphi}$$

при $k \leqslant n-1$ и $f(r) \equiv 0$ при $k = n$. Так как $r^k \to 0$ при $r \to 0$, то найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $r \in (0, \delta_1)$ имеем $1 - r^k|b_k| > 0$. Используя равенство (2), неравенство 5.2.2 треугольника, свойства комплексной экспоненты и модуля (см. утверждения 5.2.4 и 5.2.5), для всех $r \in (0, \delta_1)$ получим

$$\begin{gathered}|Q(re^{i\varphi})| \leqslant \big|1 - r^k|b_k|\big| + |r^k f(r)| = 1 - r^k|b_k| + r^k|f(r)| \leqslant \\ \leqslant 1 - r^k|b_k| + r^k(|rb_{k+1}e^{i(k+1)\varphi}| + \ldots + |r^{n-k}b_n e^{in\varphi}|) = \\ = 1 - r^k(|b_k| - r|b_{k+1}| - \ldots - r^{n-k}|b_n|) = 1 - r^k\big(|b_k| - g(r)\big),\end{gathered}$$

где

$$g(r) := r|b_{k+1}| + \ldots + r^{n-k}|b_n|$$

при $k \leqslant n-1$ и $g(r) \equiv 0$ при $k = n$. Так как $|b_k| > 0$ и $g(r) \to 0$ при $r \to 0$, то найдётся $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ такое, что для всех $r \in (0, \delta_2)$ имеем $|b_k| - g(r) > 0$ и

$$\frac{|P(re^{i\varphi}+c)|}{|P(c)|} \overset{\text{Утв. 5.2.5}}{=} \left|\frac{P(re^{i\varphi}+c)}{P(c)}\right| = |Q(re^{i\varphi})| \leqslant 1 - r^k\big(|b_k| - g(r)\big) < 1.$$

Выбирая произвольное $r_0 \in (0, \delta_2)$ и полагая $z_0 := r_0 e^{i\varphi} + c$, получим утверждение леммы. ◀

Доказательство основной теоремы 5.2.5 алгебры. Так как $|P(z)| \geqslant 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$, то по теореме 1.3.2 о существовании точных границ у ограниченных множеств существует

$$m := \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| \in \mathbb{R}^+.$$

По определению 1.3.3′ инфимума для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $z_n \in \mathbb{C}$ такое, что

$$0 \leqslant |P(z_n)| - m < \frac{1}{n},$$

а следовательно, $|P(z_n)| \to m$ по принципу 2.1.2 двустороннего ограничения. Далее рассмотрим два возможных случая.

1^0. Пусть последовательность $|z_n|$ не ограничена. Тогда существует подпоследовательность $z_{n_k} =: y_k$ такая, что $|y_k| \to +\infty$. В силу неравенства 5.2.2 треугольника имеем

$$|a_n y_k^n| = |P(y_k) - a_0 - a_1 y_k - \ldots - a_{n-1} y_k^{n-1}| \leqslant$$
$$\leqslant |P(y_k)| + |a_0| + |a_1 y_k| + \ldots + |a_{n-1} y_k^{n-1}|,$$

поэтому для некоторого $N_0 \in \mathbb{N}$ при всех $k \geqslant N_0$ имеем $|y_k| > 0$ и

$$|P(y_k)| \overset{\text{Утв. 5.2.5}}{\geqslant} |y_k|^n(|a_n| - |a_0||y_k|^{-n} - \ldots - |a_{n-1}||y_k|^{-1}) = |y_k|^n(|a_n| - x_k), \tag{3}$$

где

$$x_k := |a_0||y_k|^{-n} + \ldots + |a_{n-1}||y_k|^{-1} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Так как $|y_k|^n \to +\infty$ и $|a_n| - x_k \to |a_n| > 0$, а следовательно, $|y_k|^n(|a_n| - x_k) \to \to +\infty$ при $k \to \infty$, то $|P(y_k)| \to +\infty$ в силу неравенства (3). Последнее противоречит тому, что $|P(y_k)| \to m \in \mathbb{R}$ по определению последовательности y_k.

2^0. Пусть последовательность $|z_n|$ ограничена. По теореме 9.1.2 Больцано–Вейерштрасса существуют $c \in \mathbb{C}$ и подпоследовательность $z_{n_k} =: y_k \to c$. В силу утверждения 1 по определению 9.1.3′ Гейне получим, что

$$|P(y_k)| \to |P(c)| = m.$$

Из леммы 2 Даламбера вытекает, что $m = 0$, а следовательно, $P(c) = 0$. ◀

§ 10.5. О композициях многократно дифференцируемых функций

Теорема 1. *Пусть H, N, E — нормированные пространства, $g\colon H \to N \in D^2(\mathbf{x}_0)$, $f\colon N \to E \in D^2(g(\mathbf{x}_0))$. Тогда $f \circ g\colon H \to E \in D^2(\mathbf{x}_0)$ и при этом*

$$d^2(f\circ g)(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 =$$
$$= df\big(g(\mathbf{x}_0)\big)\big[d^2 g(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2\big] + d^2 f\big(g(\mathbf{x}_0)\big)\big[dg(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1, dg(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_2\big] \tag{1}$$

для всех $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in H$.

Доказательство. Введём обозначения $L_1 := \mathcal{L}(H,N)$, $L_2 := \mathcal{L}(N,E)$, $L_3 :=$ $:= \mathcal{L}(H,E)$ и рассмотрим *билинейную функцию* $\varphi\colon L_1 \times L_2 \to L_3$, определённую равенством

$$\varphi(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \mathcal{B} \circ \mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{A}$$

для всех $\mathcal{A} \in L_1$, $\mathcal{B} \in L_2$. Пусть $\mathcal{A}, \alpha \in L_1$, $\mathcal{B}, \beta \in L_2$. Тогда

$$\varphi(\mathcal{A}+\alpha,\mathcal{B}+\beta) - \varphi(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathcal{B}+\beta)(\mathcal{A}+\alpha) - \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\alpha + \beta\mathcal{A} + \beta\alpha.$$

Так как

$$\frac{\|\beta\alpha\|_{L_3}}{\|(\alpha,\beta)\|} \overset{\text{О. 8.0.23 и Л. 9.2.3}}{\leqslant} \frac{\|\beta\|_{L_2}\|\alpha\|_{L_1}}{\sqrt{\|\alpha\|_{L_1}^2 + \|\beta\|_{L_2}^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\|\alpha\|_{L_1}^2 + \|\beta\|_{L_2}^2}}{2} \overset{\text{О. 8.0.23}}{=} \frac{\|(\alpha,\beta)\|}{2} \xrightarrow{(\alpha,\beta)\to\mathbf{0}} 0,$$

получим $\beta\alpha = o(\|(\alpha,\beta)\|)$ при $(\alpha,\beta) \to \mathbf{0}$ (см. определение 9.1.2 о-малого). По определению 9.2.2 дифференцируемой функции это означает, что для всех $\mathcal{A} \in L_1$, $\mathcal{B} \in L_2$ существует $d\varphi(\mathcal{A},\mathcal{B})$ и при этом для всех $\alpha \in L_1$, $\beta \in L_2$ имеет место равенство

$$d\varphi(\mathcal{A},\mathcal{B})\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \mathcal{B}\alpha + \beta\mathcal{A} = \mathcal{B}\circ\alpha + \beta\circ\mathcal{A}. \tag{2}$$

Расписывая действия соответствующих дифференциалов, получим $dg\colon H \to L_1$, $d^2g\colon H \to \mathcal{L}(H,L_1)$, $d(f\circ g)\colon H \to L_3$, $df\colon N \to L_2$, $d^2f\colon N \to \mathcal{L}(N,L_2)$, $d^2(f\circ g)\colon H \to \mathcal{L}(H,L_3)$ и

$$d(f\circ g)(\mathbf{x}) \overset{\text{Т. 9.2.5}}{=} df\big(g(\mathbf{x})\big) \circ dg(\mathbf{x}) = (\varphi\circ\omega)(\mathbf{x}),$$

для всех точек $\mathbf{x}$, в которых существует функция $\omega\colon H \to L_1 \times L_2$, определённая равенством

$$\omega(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} dg(\mathbf{x}) \\ df\big(g(\mathbf{x})\big)\end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$d^2(f\circ g)(\mathbf{x}_0) = d(\varphi\circ\omega)(\mathbf{x}_0) \overset{\text{Т. 9.2.5}}{=} \underset{\mathcal{L}(L_1\times L_2, L_3)}{\underset{\Cap}{d\varphi\big(\omega(\mathbf{x}_0)\big)}} \circ d\omega(\mathbf{x}_0),$$

$$d\omega(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} d^2g(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(H,L_1) \\ d^2f\big(g(\mathbf{x}_0)\big)\circ dg(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(H,L_2)\end{bmatrix}.$$

Тогда, используя равенство (2), получим

$$d^2(f\circ g)(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1 = df\big(g(\mathbf{x}_0)\big)\circ(d^2g(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1)+\big(d^2f\big(g(\mathbf{x}_0)\big)dg(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1\big)\circ dg(\mathbf{x}_0),$$

отсюда окончательно имеем

$$d^2(f\circ g)(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 = df\big(g(\mathbf{x}_0)\big)\big[d^2g(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2\big]+d^2f\big(g(\mathbf{x}_0)\big)\big[dg(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_1, dg(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}_2\big]$$

для всех $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in H$, что и завершает доказательство теоремы. Для случая $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2 \coloneqq \mathbf{h}$ формула (1) принимает симметричный вид

$$d^2(f\circ g)(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = df\big(g(\mathbf{x}_0), d^2g(\mathbf{x}_0,\mathbf{h})\big) + d^2f\big(g(\mathbf{x}_0), dg(\mathbf{x}_0,\mathbf{h})\big). \qquad \blacktriangleleft$$

Замечание 1. Формула (1) называется *формулой типа Фаа-ди-Бруно*. Общий вид таких формул для дифференциалов порядка k установлен в работе [37], хотя и при излишних предположениях *банаховости* пространств H, N, E и принадлежности функций f, g классам C^k на соответствующих *открытых* множествах.

Пример 1. Пусть $g=(g_1,g_2,g_3)\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \in D^2(\mathbf{z}_0)$, $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\in D^2\big(g(\mathbf{z}_0)\big)$, $\mathbf{h} \coloneqq (dx, dy)$. Тогда

$$dg(\mathbf{z}_0,\mathbf{h}) = \begin{bmatrix}\partial_1 g_1 & \partial_2 g_1\\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2\\ \partial_1 g_3 & \partial_2 g_3\end{bmatrix}(\mathbf{z}_0)\begin{bmatrix}dx\\ dy\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}dx\partial_1 g_1(\mathbf{z}_0)+dy\partial_2 g_1(\mathbf{z}_0)\\ dx\partial_1 g_2(\mathbf{z}_0)+dy\partial_2 g_2(\mathbf{z}_0)\\ dx\partial_1 g_3(\mathbf{z}_0)+dy\partial_2 g_3(\mathbf{z}_0)\end{bmatrix}.$$

В силу $df\big(g(\mathbf{z}_0), d^2g(\mathbf{z}_0,\mathbf{h})\big) \overset{\text{Т. } 9.2.2}{=} \big\langle \operatorname{grad} f\big(g(\mathbf{z}_0)\big), d^2g(\mathbf{z}_0,\mathbf{h})\big\rangle$ имеем

$$\begin{gathered}d^2(f\circ g)(\mathbf{z}_0,\mathbf{h}) \overset{\text{Т. } 1 \text{ и З. } 9.2.9}{=} \big\langle \operatorname{grad} f\big(g(\mathbf{z}_0)\big), (dx\partial_1 + dy\partial_2)^2 g(\mathbf{z}_0)\big\rangle + \\ +\Big[\big(dx\partial_1 g(\mathbf{z}_0) + dy\partial_2 g_1(\mathbf{z}_0)\big)\partial_1 + \big(dx\partial_1 g_2(\mathbf{z}_0)+dy\partial_2 g_2(\mathbf{z}_0)\big)\partial_2 + \\ +\big(dx\partial_1 g_3(\mathbf{z}_0)+dy\partial_2 g_3(\mathbf{z}_0)\big)\partial_3\Big]^2 f\big(g(\mathbf{z}_0)\big).\end{gathered}$$

Данная формула нередко используется в прикладных задачах, хотя является непростой для запоминания. Здесь мы наблюдаем яркий пример того, как обобщение ведёт к упрощению.

Определение 1. Пусть $N^1,\dots,N^m$ — *произвольные нормированные пространства*, через $\widetilde{N}^1,\dots,\widetilde{N}^m$ будем обозначать *линейные* пространства, им соответствующие. Введём *линейное* пространство $\widetilde{N} \coloneqq \widetilde{N}^1\times\ldots\times\widetilde{N}^m$ и положим $N = (\widetilde{N}, \|\cdot\|_{prod}) \coloneqq N^1\times\ldots\times N^m$ — *прямое произведение нормированных пространств* (см. определение 8.0.23). На *линейном* пространстве $\widetilde{N}$ при $p \in [1, \infty]$ определим семейство p-норм равенством $\|\mathbf{x}\|_p := \big\|\big(\|x^1\|_{N^1}, \ldots, \|x^n\|_{N^n}\big)\big\|_p$ (см. определение 8.0.2) для всех $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^m) \in \widetilde{N}$, таким образом, имеем $\|\cdot\|_{prod} := \|\cdot\|_2$.

В случае, когда для некоторых *нормированных пространств* $H, E^1, \ldots, E^m$ имеют место равенства $N^1 = \mathcal{L}(H, E^1), \ldots, N^m = \mathcal{L}(H, E^m)$, любой элемент $\mathcal{A} \in \widetilde{N}$ может быть рассмотрен как *линейный оператор* $\mathcal{A}\colon H \to E := E^1 \times \ldots \times E^m$, для которого *операторная норма* (см. определение 9.2.1) определена равенством $\|\mathcal{A}\|_{op} := \sup\limits_{\|x\|_H = 1} \|\mathcal{A}(x)\|_E$.

Утверждение 1. (а) *p-нормы, введённые в определении 1, действительно являются нормами, то есть удовлетворяют всем трём условиям определения 8.0.1.*

(б) *Все p-нормы эквивалентны между собой.*

Доказательство.

(а): Проверим *неравенство треугольника* (остальные условия проверяются тривиально). При $p \in [1, \infty)$ для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \widetilde{N}$ по неравенству 4.7.5 Минковского имеем

$$\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\|_p = \big(\|x_1^1 + x_2^1\|_{N^1}^p + \ldots + \|x_1^m + x_2^m\|_{N^m}^p\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\big(\|x_1^1\|_{N^1} + \|x_2^1\|_{N^1}\big)^p + \ldots + \big(\|x_1^m\|_{N^m} + \|x_2^m\|_{N^m})^p\Big)^{\frac{1}{p}} \overset{4.7.5}{\leqslant}$$
$$\overset{4.7.5}{\leqslant} \big(\|x_1^1\|_{N^1}^p + \ldots + \|x_1^m\|_{N^m}^p\big)^{\frac{1}{p}} + \big(\|x_2^1\|_{N^1}^p + \ldots + \|x_2^m\|_{N^m}^p\big)^{\frac{1}{p}} =: \|\mathbf{x}_1\|_p + \|\mathbf{x}_2\|_p.$$

Для $\|\cdot\|_\infty$ *неравенство треугольника* является следствием неравенства 1.4.4 треугольника для чисел.

(б): Следует из теоремы 9.1.14 об эквивалентности норм в $\mathbb{R}^n$. ◀

Утверждение 2. *Пусть $H, E^1, \ldots, E^m$ — нормированные пространства, $N^1 := \mathcal{L}(H, E^1), \ldots, N^m := \mathcal{L}(H, E^m)$, $E := E^1 \times \ldots \times E^m$ и $N := N^1 \times \ldots \times N^m$. Тогда:*

(а) *Нормы $\|\cdot\|_{prod}$ и $\|\cdot\|_{op}$* (см. определение 1) *эквивалентны на линейном пространстве N и, в частности, $\|\mathcal{A}\|_{op}$ корректно определена для всех $\mathcal{A} \in N$, при этом имеет место неравенство*

$$\|\mathcal{A}\|_{op} \leqslant \|\mathcal{A}\|_{prod} \leqslant \sqrt{m}\|\mathcal{A}\|_{op}. \tag{3}$$

(б) *Линейные пространства $\mathcal{L}(H, E)$ и N совпадают.*

Доказательство.

(а): По определению 1 для всех $\mathcal{A}^1 \in \mathcal{L}(H, E^1) =: N^1, \ldots, \mathcal{A}^m \in \mathcal{L}(H, E^m) =:$ $=: N^m$ имеем

$$\|\mathcal{A}\|_{op} := \sup_{\|x\|_H=1} \sqrt{\|\mathcal{A}^1(\mathbf{x})\|^2_{E^1} + \ldots + \|\mathcal{A}^m(\mathbf{x})\|^2_{E^m}} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sup_{\|x\|_H=1} \|\mathcal{A}^1(\mathbf{x})\|^2_{E^1} + \ldots + \sup_{\|x\|_H=1} \|\mathcal{A}^m(\mathbf{x})\|^2_{E^m}} =$$
$$= \sqrt{\Big(\sup_{\|x\|_H=1} \|\mathcal{A}^1(\mathbf{x})\|_{E^1}\Big)^2 + \ldots + \Big(\sup_{\|x\|_H=1} \|\mathcal{A}^m(\mathbf{x})\|_{E^m}\Big)^2} =$$
$$= \sqrt{\|\mathcal{A}^1\|^2_{N^1} + \ldots + \|\mathcal{A}^m\|^2_{N^m}} =: \|\mathcal{A}\|_{prod} \leqslant \sqrt{m}\|\mathcal{A}\|_{op},$$

так как $\|\mathcal{A}^i\|_{N^i} \leqslant \|\mathcal{A}\|_{op}$ при всех $i \in \overline{1,m}$.

(б): Вложение $N \subset \mathcal{L}(H, E)$ вытекает непосредственно из левого неравенства (3). Для проверки обратного вложения рассмотрим произвольный оператор $\mathcal{A} =$ $= (\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^m) \in \mathcal{L}(H, E)$. Так как для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in H$ выполнено

$$\big(\mathcal{A}^1(\alpha\mathbf{h}_1 + \beta\mathbf{h}_2), \ldots, \mathcal{A}^m(\alpha\mathbf{h}_1 + \beta\mathbf{h}_2)\big) =$$
$$= \mathcal{A}(\alpha\mathbf{h}_1 + \beta\mathbf{h}_2) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{h}_1) + \beta\mathcal{A}(\mathbf{h}_2) =$$
$$= \big(\alpha\mathcal{A}^1(\mathbf{h}_1) + \beta\mathcal{A}^1(\mathbf{h}_2), \ldots, \alpha\mathcal{A}^m(\mathbf{h}_1) + \beta\mathcal{A}^m(\mathbf{h}_2)\big),$$

то $\mathcal{A}^1, \ldots, \mathcal{A}^m$ — *линейные операторы*. Из определения 9.2.1 операторной нормы непосредственно вытекает, что $\|\mathcal{A}^i\|_{N^i} \leqslant \|\mathcal{A}\|_{op}$, а следовательно, $\mathcal{A}^i \in N^i$ для всех $i \in \overline{1,m}$, поэтому $\mathcal{L}(H, E) \subset N$ и утверждение полностью доказано. ◀

Лемма 1 (о покомпонентной многократной дифференцируемости). *Пусть $H, E^1, \ldots, E^m$ — нормированные пространства, $f_1\colon H \to E^1, \ldots$ $\ldots, f_m\colon H \to E^m$, $f := (f_1, \ldots, f_m)\colon H \to E := E^1 \times \ldots \times E^m$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$f_1 \in D^k(\mathbf{x}_0), \ldots, f_m \in D^k(\mathbf{x}_0) \iff f \in D^k(\mathbf{x}_0).$$

при этом $d^k f(\mathbf{x}_0) = \big(d^k f_1(\mathbf{x}_0), \ldots, d^k f_m(\mathbf{x}_0)\big)$.

Доказательство. При всех $p \in \mathbb{N}$, $i \in \overline{1,m}$ обозначим $N^i_p := \mathcal{L}(H, N^i_{p-1})$, $L_p := \mathcal{L}(H, L_{p-1})$, где $N^i_0 := E^i$, $N_{p-1} := N^1_{p-1} \times \ldots \times N^m_{p-1}$, $L_0 := N_0$. По определению имеем $d^p f_i(\mathbf{x}_0) \in N^i_p$ для всех $p \in \overline{1,k}$, $i \in \overline{1,m}$. По утверждению 2 также имеем

$$N_p \sim \mathcal{L}(H, N_{p-1}), \tag{4}$$

то есть эти пространства совпадают как линейные и нормы в них эквивалентны. Перейдём к доказательству леммы по индукции. При $k = 1$ по полной аналогии с леммой 9.2.5 о покомпонентной дифференцируемости устанавливается, что

$$f \in D(\mathbf{x}_0) \iff f_1 \in D(\mathbf{x}_0), \dots, f_m \in D(\mathbf{x}_0)$$

и при этом

$$df(\mathbf{x}_0) = \big(df_1(\mathbf{x}_0), \dots, df_m(\mathbf{x}_0)\big), \ N_1 \overset{(4)}{\sim} \mathcal{L}(H, N_0) = L_1. \tag{5}$$

Пусть $k \geqslant 2$ и лемма верна для $k-1$, а также установлено

$$N_{k-1} \sim L_{k-1}. \tag{6}$$

Тогда при доказательстве в обе стороны для всех $\mathbf{x}$ из некоторого шара $O_\delta(\mathbf{x}_0)$ имеем существование и равенство дифференциалов

$$L_{k-1} \ni d^{k-1}f(\mathbf{x}) = \big(d^{k-1}f_1(\mathbf{x}), \dots, d^{k-1}f_m(\mathbf{x})\big) \in N_{k-1}. \tag{7}$$

Используя замечание 9.2.2 о сохранении дифференциальных свойств при переходе к эквивалентным нормам, при доказательстве в обе стороны получим существование и равенство дифференциалов

$$\begin{aligned} L_k \ni d^k f(\mathbf{x}_0) &:= d(d^{k-1}f)(\mathbf{x}_0) \overset{(7) \text{ и З. } 9.2.2}{=} d(d^{k-1}f_1, \dots, d^{k-1}f_m)(\mathbf{x}_0) \overset{(5)}{=} \\ &\overset{(5)}{=} \big(d(d^{k-1}f_1)(\mathbf{x}_0), \dots, d(d^{k-1}f_m)(\mathbf{x}_0)\big) =: \\ &=: \big(d^k f_1(\mathbf{x}_0), \dots, d^k f_m(\mathbf{x}_0)\big) \in \mathcal{L}(H, N_{k-1}). \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что $N_k \overset{(4)}{\sim} \mathcal{L}(H, N_{k-1}) \overset{(6)}{\sim} \mathcal{L}(H, L_{k-1}) =: L_k$. ◀

Определение 2 (классов C^k). Пусть H — *нормированное пространство*, $H \supset \Omega$ — *произвольное* множество, $k \in \mathbb{N}_0$. Обозначим $C^k(\Omega)$ класс всех функций $f \in D^k(\Omega)$ таких, что $d^k f \in C(\Omega)$ (что полностью согласуется с определением 9.2.10 классов $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ для функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в силу замечаний 9.2.11 и 9.2.18, а следовательно также согласуется с определением 9.2.11 классов $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ для функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в силу лемм 1 о покомпонентной многократной дифференцируемости и 9.1.3′ о покомпонентной непрерывности). Также по определению положим $C^\infty(\Omega) := \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$ и отметим, что $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Функции из классов C^k при $k \geqslant 1$ принято называть ***гладкими*** (порядка k), а функции из класса $C^\infty(\Omega)$ — ***бесконечно гладкими***.

Теорема 2 (о композициях функций класса D^k). *Пусть* H, N, E — *нормированные пространства,* $k \in \mathbb{N}_0$, $D^k(\mathbf{x}_0) \ni g\colon H \to N$, $D^k\big(g(\mathbf{x}_0)\big) \ni f\colon N \to E$. *Тогда*

$$D^k(\mathbf{x}_0) \ni f \circ g\colon H \to E.$$

Доказательство. При $k = 0$ утверждение теоремы тривиально, так как функция $f \circ g$ определена в точке $\mathbf{x}_0$. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и теорема верна для $k - 1$. Рассмотрим пространства L_1, L_2, L_3 и функцию $\varphi\colon L_1 \times L_2 \to L_3$, введённые при доказательстве теоремы 1. Для всех $(\Delta\mathcal{A}, \Delta\mathcal{B}) \in L_1 \times L_2$ определим оператор $G \in \mathcal{L}\big(L_1 \times L_2, \mathcal{L}(L_1 \times L_2, L_3)\big)$ равенством $G(\Delta\mathcal{A}, \Delta\mathcal{B})[\alpha, \beta] \coloneqq \Delta\mathcal{B}\alpha + \beta\Delta\mathcal{A}$ при всех $\alpha \in L_1$, $\beta \in L_2$. Используя равенство (2), установленное при доказательстве теоремы 1, по определению проверяется, что для всех $\mathcal{A} \in L_1$ и $\mathcal{B} \in L_2$ выполнено равенство $d^2\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = G = const$, отсюда $d^n\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}$ для всех $n \geqslant 3$ и всех $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_1$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_2$. Таким образом, имеем $\varphi \in C^\infty(L_1 \times L_2)$. По теореме 9.2.5 о дифференцируемости композиции функций имеет место равенство

$$d(f \circ g)(\mathbf{x}) \overset{\text{Т. 9.2.5}}{=} df\big(g(\mathbf{x})\big) \circ dg(\mathbf{x}) = \varphi\Big(dg(\mathbf{x}), df\big(g(\mathbf{x})\big)\Big) \tag{8}$$

для всех $\mathbf{x}$, в которых его *правая часть определена*. Поскольку $f \in D^k\big(g(\mathbf{x}_0)\big)$, то $df \in D^{k-1}\big(g(\mathbf{x}_0)\big)$ и $df \circ g \in D^{k-1}(\mathbf{x}_0)$ по предположению индукции. Также по определению $dg \in D^{k-1}(\mathbf{x}_0)$. По лемме 1 о покомпонентной многократной дифференцируемости имеем $\omega \coloneqq (dg, df \circ g) \in D^{k-1}(\mathbf{x}_0)$, отсюда в силу $\varphi \in C^\infty(L_1 \times L_2)$ и предположения индукции получим $\varphi \circ (dg, df \circ g) = \varphi \circ \omega \in D^{k-1}(\mathbf{x}_0)$, что и означает $f \circ g \in D^k(\mathbf{x}_0)$ в силу равенства (8). ◀

Замечание 2. Лемма 1 остаётся в силе при замене $D^k(x_0)$ на $C^k(\Omega)$.

Действительно, так как для всех $\mathbf{x} \in \Omega$ имеет место равенство

$$L_k \ni d^k\varphi(\mathbf{x}) = \big(d^k\varphi_1(\mathbf{x}), \ldots, d^k\varphi_1(\mathbf{x})\big) \in N_k,$$

достаточно воспользоваться аналогом леммы 9.1.3 о покомпонентной непрерывности, замечанием 9.1.5 о сохранении свойств предела при переходе к эквивалентным нормам, а также установленным по ходу доказательства леммы 1 о покомпонентной многократной дифференцируемости фактом $L_k \sim N_k$. ◀

Теорема 3 (о композициях функций класса C^k (обобщённая)). *Пусть* H, N, E — *нормированные пространства,* $k \in \mathbb{N}_0$, $C^k(\Omega) \ni g\colon H \to \Omega' \subset N$, $C^k(\Omega') \ni f\colon N \to E$. *Тогда*

$$C^k(\Omega) \ni f \circ g\colon H \to E.$$

Доказательство проводится по индукции по той же схеме, что и доказательство теоремы 2, поэтому будем пользоваться теми же обозначениями. При $k = 0$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 9.1.8′ о непрерывности композиции непрерывных функций. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и теорема верна для $k-1$, тогда $dg \in C^{k-1}(\Omega)$, $df \in C^{k-1}(\Omega')$ и $df \circ g \in C^{k-1}(\Omega)$ по предположению индукции, отсюда получим $\omega = (dg, df \circ g) \in C^{k-1}(\Omega)$ в силу замечания 2. Так как $\varphi \in C^\infty(L_1 \times L_2) \subset C^{k-1}(L_1 \times L_2)$, то $\varphi \circ \omega \in C^{k-1}(\Omega)$ по предположению индукции. В силу равенства (8) имеем $d(f \circ g) \in C^{k-1}(\Omega)$, то есть $f \circ g \in$ $\in C^k(\Omega)$. ◀

§ 10.6. Обобщённая теорема Янга

Для функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определим её разность порядка k:

$$\Delta_{\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_k} f(\mathbf{x}) := \Delta_{\mathbf{h}_1} \circ \ldots \circ \Delta_{\mathbf{h}_k} f(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_k \in \mathbb{R}^n$, и отметим, что все операторы ∂_i, $\Delta_{\mathbf{h}}$ коммутируют на своих областях определения. Через $\mathbf{e}_i$ будем обозначать i-й вектор естественного базиса в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1 [Обобщённая теорема Янга]. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \geqslant 2$, $i_1, \ldots$ $\ldots, i_k \in \overline{1,n}$, σ — произвольная перестановка чисел $\{1, \ldots, k\}$. Пусть для всех $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$ существуют $\partial_{i_2 \ldots i_k} f(\mathbf{x})$, $\partial_{i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(k)}} f(\mathbf{x})$ и при этом функции $\partial_{i_2 \ldots i_k} f$, $\partial_{i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(k)}} f$ дифференцируемы в точке $\mathbf{x}_0$. Тогда*

$$\partial_{i_1 \ldots i_k} f(\mathbf{x}_0) = \partial_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(k)}} f(\mathbf{x}_0).$$

Доказательство. Фиксируем $h \in (0, \delta/k)$. Для всех $p \in \overline{1,k}$ на открытом шаре $O_{\frac{k-p}{k}\delta}(\mathbf{x}_0)$ корректно определены функции $\Delta^p f := \Delta_{\mathbf{h}_p} \circ \ldots \circ \Delta_{\mathbf{h}_1} f$, где $\mathbf{h}_m := h\mathbf{e}_{i_m}$, $m \in \overline{1,k}$. При этом в самой точке $\mathbf{x}_0$ корректно определено $\Delta^k f(\mathbf{x}_0)$.

Для любого $p \in \overline{1,k}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и любой функции g такой, что частная производная $\partial_{i_p} g(\mathbf{z})$ существует при всех $\mathbf{z} \in O_{\frac{p}{k}\delta}(\mathbf{x})$, в силу коммутативности соответствующих операторов и теоремы 4.4.6 теоремы Лагранжа имеем

$$\begin{aligned} \Delta^p g(\mathbf{x}) &= \Delta_{\mathbf{h}_p}(\Delta^{p-1} g)(\mathbf{x}) = \\ &= \partial_{i_p}(\Delta^{p-1} g)(\mathbf{x} + \theta_p \mathbf{h}_p) h = \Delta^{p-1}(\partial_{i_p} g)(\mathbf{x} + \theta_p \mathbf{h}_p) h, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\theta_p \in (0,1)$. Применяя (1) последовательно при $p := k, k-1, \ldots, 2$; $g :=$ $:= f, \partial_{i_k} f, \ldots, \partial_{i_2 \ldots i_k} f$; $\mathbf{x} := \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \theta_k h\mathbf{e}_{i_k}, \ldots, \mathbf{x}_0 + \theta_k h\mathbf{e}_{i_k} + \ldots + \theta_2 h\mathbf{e}_{i_2}$, по индукции получим

$$\Delta^k f(\mathbf{x}_0) = \Delta_{\mathbf{h}_1}(\partial_{i_2\,...\,i_k} f)(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z})h^{k-1}, \tag{2}$$

где $\mathbf{z} \coloneqq h\sum\limits_{p=2}^{k}\theta_p\mathbf{e}_{i_p}$ и $\theta_p \in (0,1)$ при $p \in \overline{2,k}$.

Обозначим через A производную функции $\partial_{i_2\,...\,i_k} f$ в точке $\mathbf{x}_0$. При всех $h \in (0, \delta/k)$ рассмотрим функцию $\Phi(h) \coloneqq \Delta^k f(\mathbf{x}_0)$. В силу равенства (2) получим

$$\begin{gathered}
\Phi(h) = \Delta_{\mathbf{h}_1}(\partial_{i_2\,...\,i_k} f)(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z})h^{k-1} = \\
= \big[\partial_{i_2\,...\,i_k} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z} + \mathbf{h}_1) - \partial_{i_2\,...\,i_k} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z})\big]h^{k-1} = \\
= \Big[\partial_{i_2\,...\,i_k} f(\mathbf{x}_0) + A(\mathbf{z} + \mathbf{h}_1) + o(\|\mathbf{z} + \mathbf{h}_1\|) - \\
- \big(\partial_{i_2\,...\,i_k} f(\mathbf{x}_0) + A\mathbf{z} + o(\|\mathbf{z}\|)\big)\Big]h^{k-1} = \\
= \big[hA\mathbf{e}_{i_1} + o(h)\big]h^{k-1} = \big[\partial_{i_1\,...\,i_k} f(\mathbf{x}_0) + o(1)\big]h^k.
\end{gathered}$$

Пользуясь коммутативностью разностных операторов и действуя полностью аналогично вышеописанной процедуре, получим

$$\Phi(h) = \Delta_{\mathbf{h}_{\sigma(k)}} \circ \ldots \circ \Delta_{\mathbf{h}_{\sigma(1)}} f(\mathbf{x}_0) = \big[\partial_{i_{\sigma(1)}\,...\,i_{\sigma(k)}} f(\mathbf{x}_0) + o(1)\big]h^k$$

при всех $h \in (0, \delta/k)$. Умножая тождество

$$\Phi(h) = \big[\partial_{i_1\,...\,i_k} f(\mathbf{x}_0) + o(1)\big]h^k = \big[\partial_{i_{\sigma(1)}\,...\,i_{\sigma(k)}} f(\mathbf{x}_0) + o(1)\big]h^k$$

на $1/h^k$ и переходя к пределу при $h \to 0+$, получим утверждение теоремы. ◄

Замечание 1. Аналогично сказанному в замечании 9.2.21, условие дифференцируемости функций $\partial_{i_2\,...\,i_k} f$, $\partial_{i_{\sigma(2)}\,...\,i_{\sigma(k)}} f$ в точке $\mathbf{x}_0$ в теореме 1 можно ослабить, зафиксировав все переменные, отличные от $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, и перейдя таким образом к функции меньшего числа переменных.

Список литературы

[1] *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. 2-е изд. М.: Лань, 2010. 367 с.

[2] *Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006. 144 с.

[3] *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. 2-е изд. М.: Физматлит, 2015. 480 с.

[4] *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. Том I. М.: МЦНМО, 2011. 620 с.

[5] *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2011. 592 с.

[6] *де ла Валле–Пуссен Ш.-Ж.* Курс анализа бесконечно малых. Том первый. 3-е изд. (франц.). Л.: Государственное технико-теоретическое издательство, 1933. 464 с.

[7] *Донеддю А.* Евклидова планиметрия. М.: Наука, 1978. 271 с.

[8] *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть I. 10-е изд. М.: МЦНМО, 2019. 564 с.

[9] *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть II. 9-е изд. М.: МЦНМО, 2019. 675 с.

[10] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Часть I. 7-е изд. М.: Физматлит, 2005. 646 с.

[11] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Часть II. 5-е изд. М.: Физматлит, 2009. 464 с.

[12] *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Начальный курс. 2-е изд. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. 660 с.

[13] *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Продолжение курса. 1-е изд. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 357 с.

[14] *Клини С.К.* Введение в метаматематику. 2-е изд. М.: URSS, 2009. 528 с.

[15] *Лукашенко Т.П., Скворцов В.А., Солодов А.П.* Обобщённые интегралы. 2-е изд. М.: URSS, 2011. 275 с.

[16] *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Том I. Начала теории. 3-е изд. СПб: Лань, 2009. 496 с.

[17] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Том I. 3-е изд. М.: Наука, 1983. 464 с.

[18] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Том II. 3-е изд. М.: Наука, 1983. 448 с.

[19] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. 4-е изд. М.: Наука, 1974. 331 с.
[20] *Решетняк Ю.Г.* Курс математического анализа. Часть I. Книга 1. Новосибирск: Издательство Института математики, 1999. 454 с.
[21] *Решетняк Ю.Г.* Курс математического анализа. Часть I. Книга 2. Новосибирск: Издательство Института математики, 1999. 512 с.
[22] *Решетняк Ю.Г.* Курс математического анализа. Часть II. Книга 1. Новосибирск: Издательств Института математики, 2000. 440 с.
[23] *Решетняк Ю.Г.* Курс математического анализа. Часть II. Книга 2. Новосибирск: Издательство Института математики, 2001. 444 с.
[24] *Рудин У.* Основы математического анализа. 2-е изд. М.: Мир, 1966. 320 с.
[25] *Тыртышников Е.Е.* Основы алгебры. М.: Физматлит, 2017. 464 с.
[26] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 679 с.
[27] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 863 с.
[28] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3. 8-е изд. М.: Физматлит, 2005. 727 с.
[29] *Френкель А.А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. 3-е изд. М.: URSS, 2010. 552 с.
[30] *Чёрч А.* Введение в математическую логику. 2-е изд. М.: URSS, 2009. 480 с.
[31] *Шоке Г.* Геометрия. М.: Мир, 1970. 239 с.
[32] *Apostol T.* Mathematical Analysis. 5th ed. London: Addison-Wesley, 1981. 492 p.
[33] *Barria C.A., Shamseddine K.* Summary on non-Archimedean valued fields // Contemporary Mathematics. 2018. Vol. 704, pp. 1–36.
[34] *Ciesielski K.* Set Theory for the Working Mathematician. London: Cambridge University Press, 1997. 236 p.
[35] *Deveau M., Teismann H.* 72 + 42: Characterizations of the completeness and Archimedean properties of ordered fields // Real Analysis Exchange. 2013–2014. Vol. 39, № 2, pp. 261–304.
[36] *Dontchev A.L., Rockafellar R.T.* Implicit Functions and Solution Mappings. A View From Variational Analysis. 2nd ed. New York: Springer, 2014. 448 p.
[37] *Fraenkel L.E.* Formulae for high derivatives of composite functions // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1978. Vol. 83, № 2, pp. 159–165.
[38] *Goldrei D.* Classic Set Theory. London: Chapman & Hall, 1996. 287 p.
[39] *Hall J.F., Todorov T.D.* Ordered fields, the purge of infinitesimals from mathematics and the rigorousness of infinitesimal calculus. 2015. arXiv: 1509.03798 [math.LO].
[40] *Herrlich H.* Axiom of Choice. Springer, 2006. 194 p.
[41] *Jänich K.* Topology. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1984. 192 p.

[42] *Kelley J.L.* General Topology. 7th ed. New York: D. Van Nostrand Company Inc., 1964. 298 p.
[43] *Kestelman H.* Change of variable in Riemann integration // The Mathematical Gazette. 1961. Vol. 45, № 351, pp. 17–23.
[44] *Knight W.J.* A Strong inverse function theorem // American Mathematical Monthly. 1988. Vol. 95, № 7, pp. 648–651.
[45] *Kuleshov A.* The various definitions of multiple differentiability of a function $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ // Mathematics. 2020. Vol. 8, № 11:1946.
[46] *Kuleshov A.* A remark on the change of variable theorem for the Riemann integral // Mathematics. 2021. vol. 9, № 16:1899.
[47] *Morgan R.H.* Completeness in an Ordered Field (Unpublished master's thesis). University of Montana, 1968.
[48] *Nijenhuis A.* Strong derivatives and inverse mappings // American Mathematical Monthly. 1974. Vol. 81, № 9, pp. 969–980.
[49] *Pollard D.* A User's Guide to Measure Theoretic Probability. 7th ed. New York: Cambridge University Press, 2010. 351 p.
[50] *Propp J.* Real analysis in reverse // The American Mathematical Monthly. 2013. Vol. 120, № 5, pp. 392–408.
[51] *Sarkhel D.N., Výborný R.* A change of variable theorem for the Riemann integral // Real Analysis Exchange. 1996–1997. Vol. 22, № 1, pp. 390–395.
[52] *Tao T.* An Introduction to Measure Theory. 3rd ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2011. 206 p.
[53] *Tao T.* Analysis I. 3rd ed. Springer, 2016. 350 p.
[54] *Tao T.* Analysis II. 3rd ed. Springer, 2016. 220 p.

Предметный указатель

ε-сеть 260
— внутренняя 260
p-норма 257
Аксиома выбора 22
аксиоматика Пеано 48
— Цермело–Френкеля 21
аргумент комплексного числа 191
— — — главное значение 191
ареакосинус 206
ареакотангенс 207
ареасинус 206
ареатангенс 207
арккосинус 118
арккотангенс 118
арксинус 117
арктангенс 118
асимптота вертикальная 178
— наклонная 178
База локальная 371
— топологии 372
базис линейный (Гамеля) 33
биекция 26
бином Ньютона 72
брус 270
Вес 253
вещественное число 50
внешность множества 367
внутренность множества 366
Главное значение несобственного интеграла 249
гладкая k-мерная поверхность класса C^p 350
гиперконтинуум 46
гомеоморфизм 371
градиент 309
граница множества 367
грань верхняя 55
— нижняя 55
Диаметр разбиения 215
дифференциал 132, 304
— второй 319
— порядка k 320
дифференцируемая k-мерная поверхность 350
дифференцируемость по Фреше 304
длина параметризованной кривой 266
дробь десятичная 49
— правильная 199
Замыкание множества 259, 366
значение функции в точке 24
Измельчение разбиения отрезка 215
изометрический образ множества 285
изометрическое отображение 285
изометрия 285
изоморфизм множеств 35
— топологических пространств 371
инвариантность формы первого дифференциала 137, 313
индикатор 39
интеграл Дарбу верхний 220
— — нижний 220
— неопределённый 183
— Римана 216
интегральная сумма функции 215
интервал 65
инфимум 55
инъективное вложение 37
инъекция 26
Кардинал 35
— счётный 36
касательная плоскость 315
— — к поверхности 350
— прямая 138, 139
касательное k-мерное подпространство 350

квадратичная форма
знакопеременная 347
— — отрицательно определённая 347
— — положительно определённая 347
класс эквивалентности 28
колебание функции в точке 359
— — на множестве 218
компакт 260, 368
композиция функций 25
конгруэнтные множества 285
континуум 36
континуум-гипотеза 45
корень многочлена 195
— — кратности k 195
— — простой 195
косинус 116
— гиперболический 204
котангенс 117
— гиперболический 205
кривая параметризованная 265
— — плоская 156
— простая 265
— спрямляемая 266
критерий измеримости
по Жордану 275, 278, 279
— Коши непрерывности
функции в точке 102, 298
— — существования предела
функции 98, 294, 369
— — — предела
последовательности 91, 291
— — сходимости
несобственного интеграла 243
— Лебега 227
— Сильвестра 348
Лебегова мера нуль 226
лемма Гейне–Бореля 85
— Даламбера 385
— Дарбу основная 222
— Люстерника 351
— о непрерывности нормы 299
— о покомпонентной
дифференцируемости 305
— — многократной
дифференцируемости 391
лемма о покомпонентной
непрерывности 297
— — — равномерной 298
— — сходимости 290
— — фундаментальности 290
— о пределах компонент 293
— Ферма 148
— Цорна 30
линейный оператор 301
— — ограниченный 302
Максимум 55
масштаб 358
матрица билинейной формы 347
— линейного оператора 302
— Якоби 309
мера Жордана 272, 275
— — внешняя 275
— — внутренняя 275
метод Ньютона 252
— парабол 256
— прямоугольников 254
— трапеций 255
— хорд 251
метрика 361
— индуцированная 362
— порождённая нормой 363
минимум 55
мнимая единица 189
многочлен 194, 198
— алгебраический 193
— Тейлора 158, 331
множество выпуклое 166, 260
— вполне ограниченное 260
— — упорядоченное 30
— замкнутое 259, 366
— измеримое по Жордану 275
— индуктивное 22
— лебеговой меры нуль 226
— линейно связное 298
— — упорядоченное 29
— неизмеримое по Жордану 275
— ограниченное 30, 55, 259, 361
— — сверху 30, 55
— — снизу 30, 55
— открытое 259, 364
— пустое 18

множество упорядоченное 29
— частично упорядоченное 29
модуль вещественного числа 61
— комплексного числа 190
мощность множества 35
— — континуальная 36
— — счётная 36
Направление 314
начальный сегмент 30
неравенство Бернулли 71
— Гёльдера 175
— Йенсена 173
— Коши-Буняковского 176
— Минковского 177
— треугольника 64, 190
— Янга 174
несобственный интеграл 1-го рода . 241
— — 2-го рода 242
— — расходящийся 241
— — сходящийся 241
норма 257
— линейного оператора 302
O-большое 119
o-малое 118, 295
область определения
бинарного отношения 28
— — функции 24
образ множества 25
объединение множеств 19
— — дизъюнктное 19
объединение разбиений отрезка . . . 215
объём бруса 270
окрестность точки 364
— — проколотая 364
особая точка 243
особенность 243
остаточный член в формуле
Тейлора 158, 331
— — — — в форме
Лагранжа 159, 332
— — — — в форме Пеано . . 160, 335
— — — — в интегральной
форме 240, 333
отношение бинарное 28
— порядка 29
— строгого порядка 29
отношение эквивалентности 28
отображение 24
отрезок 65
Парадокс Рассела 20
— Ришара–Берри 20
пересечение множеств 19
первая аксиома счётности 371
первообразная 183
подмножество 18
— собственное 18
подпокрытие 84, 260, 368
подпоследовательность 85
подпространство метрическое 362
— топологическое 365
покрытие 84, 260, 367
— открытое 84, 260, 367
поле 49
— упорядоченное 49
— — архимедово 49
полная вариация функции 269
полуинтервал 65
последовательность 25
— бесконечно малая 68
— возрастающая 70
— итерационная 250
— монотонная 70
— неубывающая 70
— невозрастающая 70
— ограниченная по метрике 361
— — по норме 260
— строго монотонная 70
— убывающая 70
— фундаментальная 90
— — по метрике 362
— — по норме 261
предел последовательности 66, 261,
361, 378
— — верхний 86
— — нижний 86
— — частичный 86
— функции односторонний 96
— — по Гейне 96, 293
— — по Коши 95, 293, 368
пример Коши 162
принцип Архимеда 54
— вложенных отрезков 82

принцип двустороннего
ограничения . . . 67, 101, 369
— индукции . . . 23
— полноты . . . 62
признак Абеля . . . 246
— Дирихле . . . 245
— мажорантный . . . 244
произведение декартово . . . 24
— — семейства множеств . . . 27
производная . . . 132, 304
— левая . . . 133
— по вектору . . . 314
— порядка k . . . 141
— правая . . . 133
— частная . . . 307
— — порядка k . . . 316
— — смешанная . . . 316
промежуток . . . 65
— вырожденный . . . 65
— невырожденный . . . 65
прообраз множества . . . 25
пространство банахово . . . 262
— метрическое . . . 361
— — полное . . . 362
— нормированное . . . 257
— — полное . . . 262
— топологическое . . . 364
— — метризуемое . . . 373
— — хаусдорфово . . . 371
прямое произведение
нормированных пространств . . . 265
— — топологических
пространств . . . 378
Радиан . . . 116
разбиение множества . . . 28
— отрезка . . . 215
— — размеченное . . . 215
— — согласованное с масштабом . 358
разность множеств . . . 19
ранг дифференцируемого
отображения . . . 350
расширенная числовая прямая . 58, 377
ряд . . . 75
— гармонический . . . 76
— расходящийся . . . 75
— сходящийся . . . 75
Сектор . . . 285
— криволинейный . . . 287
синус . . . 116
— гиперболический . . . 204
след кривой . . . 156, 265
степень многочлена . . . 194, 198
стереографическая проекция . . . 377
сумма Дарбу верхняя . . . 218
— — нижняя . . . 218
супремум . . . 55
сужение функции . . . 25
сфера . . . 258, 361
сходимость несобственного
интеграла абсолютная . . . 245
— — — условная . . . 245
сюръекция . . . 26
Тангенс . . . 117
— гиперболический . . . 205
теорема Бернулли (Правило
Лопиталя) . . . 151
— Больцано–Коши . . . 103, 298
— Больцано–Вейерштрасса . . . 88, 291
— Бонне . . . 237
— Вейерштрасса вторая . . . 104, 299
— — первая . . . 104, 299
— Дарбу . . . 148
— Кантора . . . 39
— Кантора–Бернштайна . . . 39
— Кантора–Гейне . . . 130, 300
— Коши . . . 149
— Лагранжа . . . 149
— о дифференцируемости
композиции . . . 135, 311
— о длине параметризованной
кривой . . . 267
— о замене переменной
в неопределённом интеграле . . . 186
— — — в несобственном
интеграле . . . 247
— — — в определённом
интеграле . . . 235
— о компактах в $\mathbb{R}^n$ . . . 292
— о композиции функций
класса $\mathbf{C^k}$ . . . 318
— — — — обобщённая . . . 393
— — — класса $\mathbf{D^k}$ . . . 393

теорема о линейности
дифференциала 310
— — предела 295
— о непрерывности
композиции 102, 298
— о неявной функции 341
— — — элементарная 337
— о площади криволинейной
трапеции 284
— — сектора 285
— — — криволинейного 287
— — следа спрямляемой
плоской кривой 281
— о повторных пределах 296
— о пределе композиции 99, 295
— — монотонной функции 109
— о предельном переходе
в неравенстве 67, 100, 368
— о продолжении изометрии 382
— о свойствах степеней
кардинальных чисел 37
— о свойстве градиента 315
— о секвенциальной
компактности 263
— о среднем вторая 237
— — первая 236
— о существовании точных границ
у ограниченных множеств 57
— о сходимости метода Ньютона . 252
— — — хорд 251
— о точках разрыва монотонной
функции 110
— об инвариантности меры Жордана
относительно изометрий 384
— об интегрировании по частям
в неопределённом интеграле . . . 188
— — — в несобственном
интеграле 247
— — — в определённом
интеграле 234
теорема об объёме тела вращения . 288
— — цилиндра 288
— об обратной функции 345
— — — дифференцируемой 153
— — — непрерывной на отрезке . 106
теорема об обратной функции
непрерывной на промежутке . . . 107
— об эквивалентности норм в $\mathbb{R}^n$. 300
— основная алгебры 195
— — анализа часть I 233
— — — анализа часть II 234
— Ролля 148
— Тейлора 159, 160, 240, 332, 333, 335
— Штольца 79
— Шварца–Клеро 327
— — обобщённая Пеано 328
— Янга 329
— — обобщённая 394
точка внешняя 259, 367
— внутренняя 259, 366
— граничная 65, 259, 367
— изолированная 95, 259, 366
— локального максимума 147, 346
— — минимума 147, 346
— неподвижная 250
— несобственная 97, 294
— перегиба графика функции 179
— предельная 95, 259, 366
— разрыва второго рода 109
— — первого рода 109
— — устранимого 109
— условного максимума функции
на множестве 350
— — минимума функции
на множестве 349
— — экстремума функции
на множестве 350
— экстремума 147, 347
топология 364
— индуцированная 365
— порождаемая базой 372
— порождённая метрикой 373
Упорядоченная пара 23
условие достаточное
дифференцируемости 309
— — k-кратной
дифференцируемости 324
— — перегиба 181
— — экстремума . . 164, 165, 348, 353
— необходимое интегрируемости . 217
— — экстремума 347, 352

условие необходимое перегиба 181
усреднение вектора с весом 253
Формула Лагранжа 149, 332
— Лейбница 144
— Муавра 192
— Тейлора 158, 331
функционально независимая система
функций 354
функция 24
— бесконечно малая 98
— биективная 26
— выпуклая 166
— — вниз 166
— — вверх 166
— вогнутая 166
— возрастающая 105
— гладкая 143, 317, 392
— дважды дифференцируемая
в точке 319
— Дирихле 218
— дифференцируемая
на множестве 132, 304
— — в точке 132, 303
— — — слева 133
— — — справа 133
— инъективная 26
— интегрируемая по Риману 216
— Лагранжа 352
— логарифмическая 112
— локально ограниченная 97
— минимально k раз
дифференцируемая
на множестве 325
— монотонная 105
— непрерывная
в точке 101, 296, 297, 370
— — на множестве 102, 297, 370
— неявная 156
— обратная 26
— ограниченная 104, 299
— ограниченной вариации 269
— показательная 111
— рациональная 199, 207
функция равномерно непрерывная
на множестве 128, 297, 363
— k раз дифференцируемая
на множестве 141, 320
— — — в точке 141, 320, 322
— — — — слева 142
— — — — справа 142
— Римана 228
— степенная 112
— строго вогнутая 166
— — выпуклая 166
— — монотонная 105
— убывающая 105
— элементарная 118
— — простейшая 118
— характеристическая 39
— Хевисайда 357
Цепь 29
цилиндр 288
— нормальный 288
Частичная сумма ряда 75
число вещественное 50
— действительное 50
— кардинальное 35
— комплексно сопряжённое 190
— комплексное 188
— натуральное 23
— рациональное 48
— целое 48
Шар замкнутый 258, 361
— открытый 258, 361
Эквивалентность 28
— метрик 362
— множеств 35
— норм 264
— нормированных пространств ... 264
элемент максимальный 30
— минимальный 30
— наибольший 30
— наименьший 30
— последовательности 25
Элементарная фигура 270

Список обозначений

$A \times B$ 24
$A := B$ 17
$A \Subset B$ 18
$A \cap B$ 19
$A \cup B$ 19
$A \overset{def}{\iff} B$ 17
$A \setminus B$ 19
$A \sim B$ 35
$A \sqcup B$ 19
$A \subset B$ 18
A^B 25
$\operatorname{Arg}(z)$ 191
$a \prec b$ 29
$a \preccurlyeq b$ 29
$a \sim b$ 28
a^x 111
$\arccos$ 118
arcctg 118
$\arcsin$ 117
arctg 118
arch 206
arcth 207
$\arg(z)$ 191
arsh 206
arth 207
$BV[a,b]$ 269
$B_\delta(\mathbf{x}_0)$ 258, 361
$C(\Omega)$ 102, 297, 370
$C^\infty(\Omega)$ 143, 317, 392
$C^k(\Omega)$ 143, 317, 392
$\mathbb{C}$ 188
$\mathcal{C}$ 36
Cos 113
$\operatorname{card}(A)$ 35
ch 204
$\operatorname{cl}(\Omega)$ 259
$\cos$ 116
ctg 117
cth 205
$D(\Omega)$ 132, 304
$D^k(\Omega)$ 141, 320
$D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}_0)$ 314
$\widetilde{D}^k(\Omega)$ 325
$\operatorname{Dom}(R)$ 28
$\operatorname{Dom}(f)$ 24
$\deg(P)$ 194, 198
$d^k f$ 320
$d^k f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ 322
$df(\mathbf{x}_0)$ 132, 304
$\partial(\Omega)$ 259
$\partial_k f(\mathbf{x}_0)$, $\dfrac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k}$, $f_{x_k}(\mathbf{x}_0)$ 307
$\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}$, $f_{x_{i_k} \ldots x_{i_1}}$ 316
$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ 270
e 73
e^z 192
$F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ 341
$F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ 341
$f\colon A \to B$ 24
$f\colon A \xrightarrow{\sim} B$ 26
$f'(\mathbf{x}_0)$ 132, 304
$f(X)$ 25
$f(x)$ 24
$f + g$ 102
$f\big|_\Omega$ 25
$f \circ g$ 25
$f^{(k)}$ 141
$f^{-1}[Y]$ 25

$f''(\mathbf{x}_0)$ ... 347
fg ... 102
$\dfrac{f}{g}$ ... 102
$\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)$ ... 309
$H_1 \sim H_2$ ... 264
$I^*, \overline{I}$ ... 220
$I_*, \underline{I}$ ... 220
$\mathrm{Im}\, z$ ... 188
i ... 189
$\inf \Omega$ ... 55
$\inf\limits_{x\in I} f(x)$ ... 55
$\mathrm{int}(I)$ ... 65
$\mathrm{int}(\Omega)$ ... 259
$J(\mathbb{R}^n)$ ... 275
$\mathcal{L}(H, N)$ ... 302
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ... 66, 261, 361, 378
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ... 95, 293, 368
$\overline{\lim}\, x_n$ ... 86
$\underline{\lim}\, x_n$ ... 86
$\log_a$ ... 112
$M_1 \sim M_2$ ... 362
$\overline{m, n}$ ... 49
$\max \Omega$ ... 30, 55
$\min \Omega$ ... 30, 55
$\mathbb{N}$ ... 23
$\mathbb{N}_0$ ... 22
$n{+}{+}$ ... 23
$O_\delta(\mathbf{x}_0)$ ... 66, 258, 361
$\mathring{O}_\delta(\mathbf{x}_0)$ ... 66, 258, 361
$\underline{O}$ ... 119
$\overline{o}$ ... 118, 295
$P_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ ... 158, 331
$\mathcal{P}(A)$ ... 39
$\mathbb{Q}$ ... 48
$R[a, b]$ ... 216
$\mathbb{R}$ ... 50
$\mathbb{R}^+$ ... 53
$\overline{\mathbb{R}}$ ... 375
$\overline{\mathbb{R}^2}$ ... 376
$\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ ... 58, 377
$\widehat{\mathbb{R}}$ ... 49
$\widetilde{\mathbb{R}}$ ... 378
$\mathcal{R}[x]$ ... 193
$\mathrm{Re}\, z$ ... 188
$r_k(f, \mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ ... 158, 331
$\mathrm{rank} F(\mathbf{x}_0)$ ... 350
$S^*(P), \overline{S}(P), S(P)$ ... 218
$S_\delta(\mathbf{x}_0)$ ... 258, 361
$\mathrm{Seg}(C, x_0)$ ... 30
Sin ... 113
Span ... 352
$\mathrm{Span}^\perp$ ... 352
$s_*(P), \underline{S}(P), s(P)$ ... 218
sh ... 204
$\sin$ ... 116
sgn ... 102
$\sup \Omega$ ... 55
$\sup\limits_{x\in I} f(x)$ ... 55
tg ... 117
th ... 205
$V_a^b(f)$ ... 269
$x \mapsto y$ ... 25
$x\, R\, y$ ... 28
$x \in \Omega$ ... 17
x^α ... 112
(x, y) ... 23
$y_x^{(n)}$ ... 156
ZF ... 21
ZFC ... 21
$\mathbb{Z}$ ... 48
$\overline{z}$ ... 190
$\aleph_0$ ... 36
χ_Ω ... 39
$\mu(E),\ E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ ... 272
$\mu(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ... 275
$\mu^*(\Omega)$ ... 275
$\mu_*(\Omega)$ ... 275
$\mu^L(\Omega)$ ... 226
π ... 115
$\rho \sim \widetilde{\rho}$ ... 362
$\Omega_1 \overset{\mathrm{Top}}{\cong} \Omega_2$ ... 371
$\omega(f, \Omega)$ ... 218

$\#A$ 35
$\bigcap \Omega$ 19
$\bigcup \Omega$ 19
$\bigcup\limits_{\alpha\in A} \Omega_\alpha$ 19
$\bigsqcup \Omega$ 19
$\bigcap\limits_{\alpha\in A} \Omega_\alpha$ 19
$\bigsqcup\limits_{\alpha\in A} \Omega_\alpha$ 19
$\prod\limits_{\alpha\in A} \Omega_\alpha$ 27
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 75
$\|\cdot\| \sim \widetilde{\|\cdot\|}$ 264
$\|\cdot\|_{op}$ 302
$\|\cdot\|_{p}$ 257, 389
$\|\cdot\|_{prod}$ 389
$2^{\mathcal{C}}$ 46

˜°˛ бное издание

Серия «Классический университетский уче˝˙˘»

Кулешов Александр Андреевич

АНАЛИЗ I

КРАТКИЙ КУРС

Учебник

Художественное оформление *К. В. Саутенкˆ*
Корректор *А. А. Симон*

Оригинал-макет подготовлен *К. Е. Панкратьевым*

Макет утвержден 11.04.2024. Формат 70×100/16. Усл. печ. л. 33,75. Изд. № 12801.

МГУ

Издательство Московского университета

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com
https://msupress.com. Отдел реализации:
тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com