Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова

А. И. Аристов

# Нелинейные дифференциальные уравнения

Лекции и задачи

Издательство Московского университета

Библиотека
факультета ВМК
МГУ

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова

А. И. Аристов

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

Учебное пособие

Издательство Московского университета • 2023

УДК 519.6(075.8+076.1)
ББК 22.19я73
А81

**Посвящается памяти**
**Ильи Андреевича Шишмарёва**

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета*
*факультета вычислительной математики и кибернетики*
*МГУ имени М. В. Ломоносова*

Рецензенты:
*А. В. Ильин* — д-р. физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН,
профессор кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова
*А. В. Разгулин* — д-р. физ.-мат. наук,
профессор кафедры математической физики
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова

**Аристов, А. И.**
А81 Нелинейные дифференциальные уравнения: лекции и задачи: учебное пособие. — Москва : Издательство Московского университета, 2023. — 233, [1] с. — Электронное издание сетевого распространения. — (Библиотека факультета ВМК МГУ).

ISBN 978-5-19-011917-6 (e-book)

Книга отражает содержание курса «Нелинейные дифференциальные уравнения». В издании выводится ряд нелинейных уравнений в частных производных, моделирующих разнообразные процессы. Разбираются эффективные методы исследования уравнений. Предложены задачи с решениями, задачи для самостоятельного решения и обзор литературы.

Пособие предназначено для студентов магистратуры по специальности 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова, а также будет полезно студентам и аспирантам физико-математических специальностей.

**УДК 519.6(075.8+076.1)**
**ББК 22.9я73**

ISBN 978-5-19-011917-6
(e-book)

# Оглавление

# Введение

Для описания многих явлений в физике, технике, экономике, биологии и других науках весьма удобны дифференциальные уравнения, при этом значительная их часть является нелинейными уравнениями. Несмотря на развитие эффективных численных методов, большую роль играют аналитические методы исследования.

Почти для всех встречающихся на практике уравнений в частных производных (и значительной части обыкновенных) невозможно построить общее решение в виде понятной формулы (явной, неявной или квадратурной). Поэтому можно назвать следующие два крупных направления, в которых активно ведутся исследования.

- Изучение качественных свойств: существование и единственность решения задачи (задачи Коши, задачи Дирихле, начально-краевой и других), поставленной для данного уравнения, разрушение (существование решения на ограниченном промежутке времени, но не на всём луче $t \geqslant 0$), асимптотическое поведение решения. Разрушение решения может как иметь непосредственную физическую интерпретацию (например, пробой полупроводника), так и показывать границы применимости модели.

- Построение точных решений, то есть сужение общего решения до множества, которое можно опи-

> сать аналитически. Точные решения нужны, во-первых, для того чтобы объяснить некоторые физические явления и оценить роль параметров задачи. Во-вторых, они могут быть полезны для понимания качественных свойств решений. В-третьих, они помогают проверять и совершенствовать численные методы.

Данная книга отражает содержание курса «Нелинейные дифференциальные уравнения»[1], читаемого автором для студентов магистратуры факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова. В курсе дан обзор аналитических методов исследования нелинейных дифференциальных уравнений, кроме того, указан вывод некоторых нелинейных уравнений.

Первые пять глав посвящены выводу нелинейных дифференциальных уравнений. Обсуждаются основные подходы к построению математических моделей. Наряду с выводом классических уравнений (Кортевега–де Фриза, Шрёдингера и других) рассматриваются уравнения соболевского типа и уравнения в частных производных в экономике.

Шестая и седьмая главы показывают применение точных решений к изучению физических процессов, описываемых уравнениями.

Восьмая, девятая и десятая главы посвящены методам неявной линеаризации уравнений и тесно связанной с этими методами теории солитонов.

В одиннадцатой главе методы функционального анализа применяются к исследованию однозначной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного

---

[1] Имеются в виду в основном уравнения в частных производных, хотя будет уделено внимание и обыкновенным дифференциальным уравнениям.

уравнения глобально и локально по времени и к выводу оценок времени существования решения (в случае локальной разрешимости).

Двенадцатая глава показывает исследование асимптотического поведения решения задачи Коши для нелинейного уравнения при стремлении времени к бесконечности.

Тринадцатая, четырнадцатая и пятнадцатая главы посвящены применению теории групп к исследованию дифференциальных уравнений. Для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка обсуждаются построение интегрирующего множителя с помощью групповой теории, интегрирование уравнений с помощью канонических переменных и с помощью инвариантных решений. Для уравнений в частных производных обсуждаются построение инвариантных решений и нахождение по одному частному решению семейства решений с произвольным параметром.

В шестнадцатой главе кратко обсуждается ещё несколько подходов к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений.

Помимо теоретических сведений, в книге даны задачи с решениями и задачи с ответами и указаниями для самостоятельного решения, сделан обзор литературы.

Создателем курса «Нелинейные дифференциальные уравнения» для факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова и первым лектором по нему был Илья Андреевич Шишмарёв — выдающийся математик (впоследствии — член-корреспондент Российской академии наук), специалист по нелинейным явлениям. Ему принадлежат важные результаты в области качественной теории уравнений в частных производных. Его памяти и посвящается эта книга. Автор постарался сделать курс более современным. Были добавлены недавние достижения, более подробные пояснения к трудным местам и практические задания.

Автор выражает благодарность М.В. Николаеву за помощь в подготовке текста пособия.

# Глава I. Избранные модели

Но для бездн, где летят метеоры,
Ни большого, ни малого нет,
И равно беспредельны просторы
Для микробов, людей и планет.

*Н.А. Заболоцкий*

В этой главе (и нескольких следующих) рассмотрим математические модели, сводящиеся к нелинейным дифференциальным уравнениям.

Следует отметить, что существует два основных подхода к построению математических моделей:

- построение на основе фундаментальных законов или законов сохранения (то есть за основу для рассуждений берется равенство),
- построение на основе вариационного принципа (то есть за основу берется минимизация или максимизация некоторого функционала).

## § 1. Нелинейная теплопроводность

Рассмотрим распространение тепла в стержне. В простейшем случае, как известно из курса уравнений математической физики, этот процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u$ — температура стержня в точке $x$ в момент времени $t$, $a \equiv \text{const}$ — характеристика стержня. В общем случае уравнение имеет более сложный вид и может учитывать нелинейные эффекты.

Напомним вывод этого уравнения. По закону Фурье, $dQ = qS\,dt$, то есть за промежуток времени $(t_1;\ t_2)$ через сечение стержня $S$ проходит количество тепла $dQ$, при этом $q = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}$. В простейшем случае коэффициент теплопроводности $k$ постоянен. Таким образом,

$$Q = -S\int\limits_{t_1}^{t_2} k\frac{\partial u}{\partial x}\,dt.$$

С другой стороны, количество тепла, сообщаемого телу для повышения температуры на $\Delta u$, равно

$$Q = c\rho V\Delta u,$$

где $c$ — удельная теплоёмкость, $\rho$ — плотность стержня, $V$ — объём нагреваемой части. Возможен случай, когда на разных участках $u$ меняется по-разному. Тогда

$$Q = \int\limits_{x_1}^{x_2} c\rho S\Delta u dx.$$

Кроме того, в самом стержне может возникать или поглощаться тепло:

$$dQ = SF(x,t)\,dx\,dt,$$

где $F(\cdot)$ — плотность источников или стоков тепла в точке $x$ в момент времени $t$. В интегральной форме:

$$Q = S\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,t)\,dx\,dt.$$

Запишем баланс тепла на промежутке $(x_1;\ x_2)$ за время $(t_1;\ t_2)$:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}^{x=x_2}\right)\,dt+\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{t_1}^{t_2}F(x,t)\,dt\,dx=$$
$$=\int\limits_{x_1}^{x_2}c\rho\big(u(x,t_2)-u(x,t_1)\big)\,dx.$$

С помощью теоремы о среднем можно привести это соотношение к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t)=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Заметим, что, во-первых, для однородного стержня можно привести уравнение к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),$$

с очевидными переобозначениями, а во-вторых, при больших изменениях $u$ величины $k$ и $c$, вообще говоря, не являются постоянными, и уравнение становится более сложным:

$$c(u;x)\rho(u;x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x;u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t).$$

Возможна и зависимость (вообще говоря, нелинейная) $F$ от $u$.

Об исследовании нелинейных уравнений теплопроводности подробнее будем говорить в главе VI, а здесь скажем несколько слов о линейном случае.

Одно из первых применений теории теплопроводности — распространение температурных волн в почве с учётом периодичности (суточной или годовой) колебаний на поверхности. Рассмотрим задачу об отыскании ограниченного решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ (x \geqslant 0, \ t > -\infty)$$

с условием

$$u(0,t) = A_0 \cos \omega t.$$

Можно показать, что её решение имеет вид

$$u(x,t) = A_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} \cos \left( \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \cdot x - \omega t \right).$$

Отсюда можно сделать следующие выводы.

- *Первый закон Фурье*: амплитуда колебаний экспоненциально убывает с глубиной, а именно, $A(x) = A_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}$.

- *Второй закон Фурье*: температурные колебания в почве происходят со сдвигом фазы, время отставания максимума или минимума равно $x/\sqrt{2\omega a^2}$.

- Глубина проникновения тепла в почву зависит от периода колебаний на поверхности:
$$\frac{A(x)}{A_0} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \cdot x}. \tag{1.1}$$

- *Третий закон Фурье*: для колебаний с периодами $T_{1,2}$ глубины, на которых происходит одинаковое относительное изменение температуры, связаны соотношением
$$\frac{x_2}{x_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

  Например, сравним суточные и годовые кодебания:
$$\frac{T_2}{T_1} = 365 \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \sqrt{365} \approx 19,1.$$

**Замечание.** Из (1.1) можно выразить коэффициент теплопроводности

$$a^2 = \frac{\omega x^2}{2\ln^2\left(A(x)/A_0\right)}$$

и затем вычислить по результатам наблюдений.

## § 2. Нелинейные параболические уравнения

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u).$$

Здесь функция $F(\cdot)$ описывает объёмные процессы генерации ($F > 0$) или поглощения ($F < 0$). Укажем несколько важных частных случаев:

1. $F(u) = ku(1-u)$, где $k = \mathrm{const} > 0$: уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП), описывающее вытеснение одного биологического вида другим на некоторой территории.

2. $F(u) > 0$ при $0 < u < 1$, $F(0) = F(1) = 0$, $F'(0) > 0 > F'(1)$ (например, $F(u) = \sin \pi u$): уравнение типа КПП.

3. $F(u) > 0$ при $0 < u < 1$, $F(0) = F(1) = 0$, $F'(1) < 0$, $F'(0) = 0$ (например, $F(u) = u^2(1-u)$): уравнение Зельдовича, описывающее распространение пламени.

4. $F(0) = F(\alpha) = F(1) = 0$, где $\alpha = \mathrm{const} \in (0;\ 1)$, $F'(0) < 0$, $F'(\alpha) > 0$, $F'(1) < 0$ (например, $F(u) = -\sin 2\pi u$): уравнение Семёнова, моделирующее автокаталитические цепные реакции (рис. 1.1).

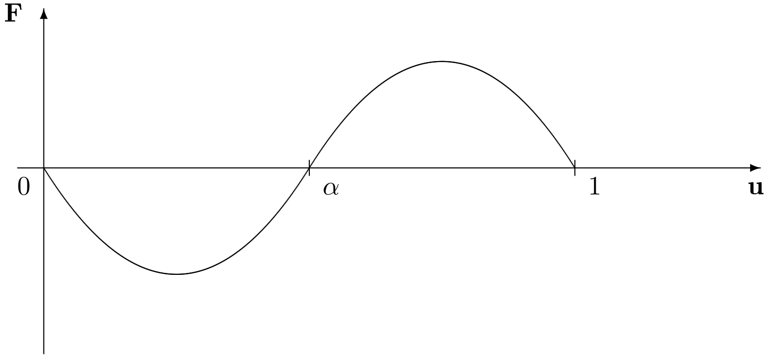


Рис. 1.1: Пример нелинейности в уравнении Семёнова.

Рассмотрим подробнее уравнение КПП. Простейшая модель Мальтуса, описывающая численность популяции вида $(N)$:

$$\frac{dN}{dt} = bN, \ b = \text{const} > 0,$$

откуда $N = Ce^{bt}$. Однако, среда может обеспечить численность $N \leqslant N_m = \text{const}$, и существует механизм регуляции. Его можно учесть следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = bN\left(1 - \frac{N}{N_m}\right).$$

Перейдём к безразмерной переменной $u = N/N_m$:

$$\frac{du}{dt} = bu(1-u).$$

Кроме того, учитывая возможность миграции особей, получим уравнение КПП:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu(1-u).$$

## § 3. Уравнение Бюргерса

Рассмотрим процесс распространения плоских волн. Запишем закон сохранения в универсальной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

где $q = q\,(u; \partial u/\partial x)$ — плотность потока, $u$ — некоторая характеристика среды в точке $x$ в момент времени $t$ (например, плотность массы, импульса, энергии). В простейшем случае $q = au$, $a \equiv \mathrm{const}$, и общее решение уравнения имеет вид $u = f(x - at)$, где $f(\cdot)$ — произвольная функция одного аргумента.

Пусть $q = au + bu^2/2$, где $a$, $b = \mathrm{const}$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + bu\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Переобозначив $x - at$ и $bt$ соответственно за $x$ и $t$, получим кравнение Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Оно имеет решение в виде неявной формулы: $u = f(x-ut)$ ($f(\cdot)$ — произвольная).

Можно учесть в механизме переноса не только конвективную, но и диффузионную составляющую: пусть $q = au + bu^2/2 - c\partial u/\partial x$. В этом случае получим уравнение Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $\nu \equiv \mathrm{const}$. Оно может моделировать ударную волну с учётом вязкости среды (ей соответствует выражение $\nu\, \partial^2 u/\partial x^2$).

**Замечание.** Уравнение Бюргерса имеет следующее замечательное свойство. Его можно с помощью замены

$u = -\dfrac{2\nu}{\varphi} \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ свести к линейному уравнению:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

## § 4. Колебания струны (вывод уравнения из вариационного принципа)

Выведем известное из курса уравнений математической физики уравнение малых колебаний струны на основе вариационного принципа. Пусть $u = u(x, t)$ — перпендикулярное смещение точки $x$ от положения равновесия в момент времени $t$, $\rho = \rho(x)$ — линейная плотность. Тогда масса малого элемента струны, соответствующего промежутку $(x;\ x + dx)$, равна $\rho(x)dx$, а плотность кинетической энергии равна

$$T = \frac{\rho(x)}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2.$$

Потенциальная энергия пропорциональна увеличению длины (коэффициент — натяжение $\mu > 0$). Так как длина части деформированной струны, соответствующей промежутку $(x;\ x + dx)$, равна

$$dl = \sqrt{dx^2 + (u'_x dx)^2} = \sqrt{1 + (u'_x)^2} dx \approx \left(1 + \frac{(u'_x)^2}{2}\right) dx,$$

то увеличение длины при малых $dx$ приближённо равно $(u'_x)^2 dx/2$, и плотность потенциальной энергии выражается формулой

$$U = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Введём интеграл действия: $S = \iint L\, dxdt$, где $L = T - U$ — лагранжиан, который в данном случае имеет вид

$$L = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

а интегрирование ведётся по декартову произведению множеств значений, принимаемых переменными $x$ и $t$. Воспользуемся известным из механики принципом наименьшего действия: движение системы таково, что величина $S$ достигает экстремума. Составим соответствующее уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u'_t}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial u'_x}\right) = 0.$$

Здесь[2]

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial u'_t} = \rho u'_t,\ \frac{\partial L}{\partial u'_x} = -\mu u'_x,$$

следовательно, уравнение принимает вид

$$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $k(x) = \sqrt{\mu/\rho(x)}$.

**Замечание.** Аналогично можно получить уравнение продольных колебаний упругого стержня

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

где $E(x)$ — модуль Юнга.

## § 5. Колебания тонкого стержня

Колебания струны вызваны сопротивлением удлинению, тогда как тонкий стержень колеблется, сопротивляясь

[2]При выполнении дифференцирования в подобных выражениях с частными производными считаем, что $u'_t$ (или $u'_x$) — единый символ: например, $\frac{\partial}{\partial u'_t}\left((u'_t)^2\right) = 2u'_t$.

изгибу. Выведем соответствующее уравнение на основе вариационного принципа.

При изгибе стержень приобретает потенциальную энергию, пропорциональную квадрату кривизны $K$, где

$$K^2 = \frac{\left(u''_{x^2}\right)^2}{\left(1 + {u'_x}^2\right)^3} \approx \left(u''_{x^2}\right)^2 .^3$$

Значит, плотность потенциальной энергии

$$U = \frac{\mu}{2} \left(u''_{x^2}\right)^2 ,$$

тогда как плотность кинетической энергии

$$T = \frac{\rho}{2} {u'_t}^2 .$$

Следовательно, лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{\rho}{2} {u'_t}^2 - \frac{\mu}{2} \left(u''_{x^2}\right)^2 .$$

Здесь уравнение Эйлера-Лагранжа принимает вид

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u'_t}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial u'_x}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial u''_{t^2}}\right) +$$
$$+ \frac{d^2}{dtdx}\left(\frac{\partial L}{\partial u''_{xt}}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial L}{\partial u''_{x^2}}\right) = 0,$$

а именно,

$$-\rho u''_{t^2} - \mu u^{IV}_{x^4} = 0 \Leftrightarrow u''_{t^2} + k^2 u^{IV}_{x^4} = 0,$$

где $k(x) = \sqrt{\mu/\rho(x)}$.

## § 6. Уравнение синус–Гордона[4]

Уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z$$

[3]Как в книге [39], «степень» в нижнем индексе означает порядок соответствующей производной: например, $u''_{x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

[4]Читатели, не знакомые с дифференциальной геометрией, могут пропустить этот параграф.

называется уравнением синус–Гордона. Выведем его на основе понятий дифференциальной геометрии.

Пусть на поверхности Φ выбрана чебышёвская сеть, то есть сеть из линий, имеющая следующее свойство: в каждом сетевом четырёхугольнике противоположные стороны равны. Например, нити куска ткани, натянутой на поверхность, образуют чебышёвскую сеть. Примем по одной линии первого и второго семейства сети соответственно за базовую линию $x$ $(y = 0)$, и за базовую линию $y$ $(x = 0)$. За координаты $x$ и $y$ точки на поверхности выберем длину отрезка базовой линии $x$ или $y$ соответственно, отсчитываемую от начальной точки $(0; 0)$ с учётом знака. Угол между координатными линиями $x$ и $y$ в точке $(x; y)$ обозначим через $z(x; y)$.

Пусть $\overline{r}(x; y)$ — радиус-вектор поверхности Φ, то есть в качестве параметров поверхности выбраны координаты $x$ и $y$. Таким образом,

$$(\overline{r}'_x; \overline{r}'_x) = 1,\ (\overline{r}'_y; \overline{r}'_y) = 1,\ (\overline{r}'_x; \overline{r}'_y) = \cos z(x; y),$$

и первая квадратичная форма Φ имеет вид

$$I = ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2 = dx^2 + 2\cos zdxdy + dy^2.$$

Верно и обратное: если первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$I = dx^2 + 2\cos zdxdy + dy^2,$$

то сеть координатных линий $x$ и $y$ на ней является чебышёвской.

Гауссову кривизну поверхности можно найти по формуле

$$K = -\frac{1}{4W^2}\begin{vmatrix} E & E'_u & E'_v \\ F & F'_u & F'_v \\ G & G'_u & G'_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{W}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{E'_v - F'_u}{\sqrt{W}} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{F'_v - G'_u}{\sqrt{W}}\right),$$

где $W = EG - F^2$ [28, с. 110]. Здесь $u = x$, $v = y$, $E = G = 1$, $F = \cos z$. Упростив это выражение для $K$, получим:

$$K = -\frac{z''_{xy}}{\sin z},$$

откуда

$$z''_{xy} + K \sin z = 0.$$

При $K = -1$ это равенство переходит в уравнение синус-Гордона. Таким образом, уравнение синус–Гордона описывает углы между координатными линиями чебышёвской сети на поверхности, имеющей гауссову кривизну $K = -1$.

Можно показать, что задача

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x \partial y} = \sin z; \\ z(x;0) = \phi(x); \\ z(0;y) = \psi(y); \\ \phi(0) = \psi(0) \end{cases}$$

имеет единственное решение в классе функций, имеющих $r$ непрерывных производных на всей плоскости, при условии, что функции $\phi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ находятся в классе $C^r(\mathbf{R})$ [28, с. 335–336].

# Глава II. Уравнение Кортевега–де Фриза

Дом стоял когда-то на окраине,
А теперь, похоже, в центре города.
*А.Я. Розенбаум*

Одно из самых знаменитых нелинейных уравнений в частных производных — уравнение Кортевега–де Фриза[5] (КдФ) — имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

В 1834 году Дж.С. Рассел обратил внимание на явление, не исследованное наукой того времени — волну в канале, вызванную остановившейся баржей. Эта волна была уединённой, кроме того, она имела необычную форму: в ней было только поднятие поверхности, тогда как в привычных волнах поверхность находится попеременно выше и ниже уровня невозмущённой воды. В 1870-е годы Ж.В. Буссинеск и Дж.У. Рэлей получили аналитическое описание такой волны. Для более полного понимания природы явления в 1895 году Д.И. Кортевег и Г. де Фриз вывели соответствующее уравнение в частных производных.

Однако, в XIX веке научная общественность не придала большого значения этим результатам. Лишь в се-

[5] Обычно в русскоязычной литературе оно называется так, но встречается и написание «Кортевега–де Вриза».

редине XX века было установлено, что уравнение Кортевега–де Фриза описывает разнообразные физические явления и имеет ряд замечательных свойств. Появилась теория *солитонов* — уединённых волн, сохраняющих скорость и форму при движении и при столкновении с другими уединёнными волнами.[6]

Рассмотрим в этой главе несколько моделей, сводящихся к уравнению Кортевега–де Фриза.

## § 1. Гидродинамическая модель

Исследуем процесс распространения малых возмущений на поверхности жидкости. Пусть плотность жидкости постоянна, тогда условие непрерывности имеет вид

$$\operatorname{div} \overline{u} = 0, \tag{2.1}$$

где $\overline{u}$ — векторное поле скоростей движения жидкости. Введём потенциал этого поля $\varphi$ в соответствии с правилом $\overline{u} = \nabla\varphi$. Тогда (2.1) можно преобразовать к уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \tag{2.2}$$

В случае, когда $\varphi$ не зависит от времени, для этого уравнения можно поставить задачу Дирихле и из неё определить единственное решение.

Пусть $\varphi = \varphi(x; y; z; t)$, а граница среды подвижна. В этом случае нужны более сложные условия, дополняющие уравнение Лапласа.

Уравнение движения жидкости в поле силы тяжести имеет вид

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t} + (\overline{u}; \nabla)\,\overline{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = -g\overline{j},^{7} \tag{2.3}$$

[6] Более подробную историю вопроса можно найти в [19, гл. 1].

[7] Формальное скалярное произведение $(\overline{u}; \nabla)$ можно с помощью координат вектора $\overline{u}$

где $p$ — давление, $g$ — ускорение свободного падения, $\overline{j}$ — единичный вектор по направлению силы тяжести, $\rho$ — плотность жидкости.

Обычно рассматривают жидкость, которая первоначально покоилась или была в однородном потоке, а следовательно, $\operatorname{rot}\overline{u}|_{t=0} = 0$. Известно, что если $\operatorname{rot}\overline{u}|_{t=0} = 0$, то и в любой момент времени

$$\operatorname{rot}\overline{u} = 0. \tag{2.4}$$

Из векторного анализа известно, что

$$[\overline{u}; \operatorname{rot}\overline{u}] + (\overline{u}; \nabla)\,\overline{u} = \frac{1}{2}\nabla\,(\overline{u}; \overline{u})\,.$$

Учитывая это равенство и (2.4), запишем (2.3) в следующем виде:

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\,(\overline{u}; \overline{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = -g\overline{j}.$$

Перейдём к переменной $\varphi$ и запишем равенство покоординатно:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,(\nabla\varphi; \nabla\varphi) + \frac{p}{\rho}\right) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,(\nabla\varphi; \nabla\varphi) + \frac{p}{\rho}\right) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,(\nabla\varphi; \nabla\varphi) + \frac{p}{\rho}\right) = -g. \end{cases}$$

Проинтегрируем последнее из этих равенств по $z$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,(\nabla\varphi; \nabla\varphi) + \frac{p - p_0}{\rho} + gz = 0 \tag{2.5}$$

(ось $z$ направлена вверх, произвольная функция от $t$ включена в $\varphi$, $p_0$ — атмосферное давление у поверхности).

Введём уравнение поверхности жидкости:

$$f(x; y; z; t) = 0.$$

подробнее записать так: $u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z}$.

Введём отдельные компоненты скорости: $\overline{u} = (u; v; w)$.

С одной стороны, нормальная компонента скорости *поверхности* равна

$$-\frac{f'_t}{\sqrt{(\nabla f;\ \nabla f)}}.$$

С другой стороны, нормальная компонента скорости *жидкости на поверхности* равна

$$\frac{(\overline{u}; \nabla f)}{\sqrt{(\nabla f;\ \nabla f)}}.$$

Эти величины должны быть равны, следовательно,

$$f'_t + (\overline{u}; \nabla f) = 0. \tag{2.6}$$

Зададим более конкретное выражение для функции $f(\cdot)$:

$$f(x; y; z; t) = h + \eta(x; y; t) - z,$$

где $h$ — глубина, $\eta(\cdot)$ — отклонение от положения равновесия. Тогда (2.6) можно записать в виде

$$\eta'_t + u\eta'_x + v\eta'_y = w.$$

Будем считать процесс плоским, то есть $\eta'_y = 0$. Придём к соотношению

$$\eta'_t + u\eta'_x = w.$$

Введём потенциал на поверхности $\psi$ по правилу

$$(u; w) = (\psi'_x; \psi'_z).$$

Тогда

$$\eta'_t + \eta'_x\psi'_x = \psi'_z. \tag{2.7}$$

Итак, граничное условие (2.7) означает, что нормальная компонента скорости на поверхности равна нормальной компоненте скорости самой поверхности.

Кроме того, заметим, что условие на поверхности без учёта сил поверхностного натяжения сводится к равенству давлений в жидкости и в атмосфере у поверхности. Поэтому из (2.5) вытекает, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{(\nabla\psi;\nabla\psi)}{2} + gz_1 = 0,$$

где $z_1$ — координата поверхности жидкости. Продифференцируем это равенство по $x$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \tag{2.8}$$

Пусть дно водоёма твёрдое и горизонтальное, тогда

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0. \tag{2.9}$$

Собирая полученное, то есть соотношения (2.2), (2.7), (2.8), (2.9), придём к нестационарной задаче, описывающей плоские волны[8]:

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0; \\ \eta'_t + \eta'_x\psi'_x = \psi'_z; \\ u'_t + uu'_x + ww'_x + g\eta'_x = 0; \\ \psi'_z|_{z=0} = 0. \end{cases}$$

Введём характерные размеры: пусть $a$ — амплитуда волны, $h$ — глубина водоёма, $l$ — длина волны. Предположим, что $a \ll h \ll l$, а значит, $\varepsilon \equiv a/h \ll 1$, $\delta \equiv h/l \ll 1$ (рис. 2.1).

Так как $\delta \ll 1$, то решение уравнения

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$$

можно искать в виде

$$\psi(x;z;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x;t)z^n, \ 0 \leqslant z \leqslant z_1.$$

[8]Напомним, что мы рассматриваем плоский процесс, поэтому перешли от функции $\varphi(x;y;z;t)$ к функции $\psi(x;z;t)$. А функции $u$ и $w$ являются производными $\psi$. Таким образом, задача представляет собой систему для двух скалярных функций — $\psi(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$.

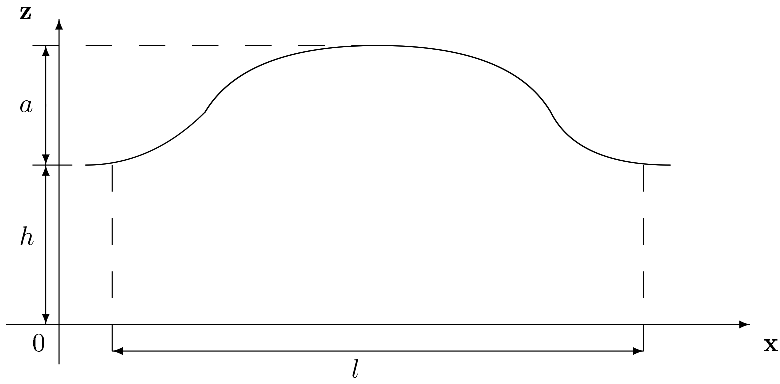


Рис. 2.1: Характерные размеры волны.

Подставив это выражение в уравнение и сгруппировав члены с одинаковыми степенями $z$, получим равенство степенного ряда нулю, из которого вытекает, что каждый коэффициент равен нулю, то есть

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + (n+2)(n+1)\psi_{n+2} = 0. \tag{2.10}$$

Из (2.9) следует, что $\psi_1 = 0$, а с учётом (2.10) — и все нечётные члены равны нулю. Кроме того, из (2.10) видно, что все чётные члены выражаются через $\psi_0$. Значит,

$$\psi(x;z;t) = \psi_0(x;t) - \frac{z^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \frac{z^4}{24} \cdot \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial x^4} \dots$$

Следовательно,

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial x} = F - \frac{z^2}{2} F''_{x^2} \dots ; \\ w = \frac{\partial \psi}{\partial z} = -zF'_x + \frac{z^3}{6} F'''_{x^3} \dots , \end{cases} \tag{2.11}$$

где $F = \frac{\partial \psi_0}{\partial x}$.

Введём безразмерные переменные и параметры:

$$x = lx',\ t = \frac{l}{c_0}t',\ c_0 = \sqrt{gh},\ \eta = a\eta',\ u = \varepsilon c_0 u',$$
$$w = \varepsilon\delta c_0 w',\ F = \varepsilon c_0 F',\ z = h(1 + \varepsilon\eta').$$

Подставим эти выражения в (2.11), упростим и запишем с новыми переменными без штрихов:

$$\begin{cases} u = F - \frac{\delta^2}{2} F''_{x^2}; \\ w = -(1+\varepsilon\eta) F'_x + \frac{\delta^2}{6} F'''_{x^3} \end{cases}$$

(с точностью до $O(\varepsilon, \delta^2)$).

Граничные условия примут вид:

$$\begin{cases} w = \eta'_t + \varepsilon \eta'_x u; \\ u'_t + \varepsilon u u'_x + \eta_x = 0. \end{cases}$$

С учётом (2.11) получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial\eta}{\partial t} + \varepsilon F \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} + \varepsilon\eta\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\delta^2}{6} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} + \varepsilon F \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\delta^2}{2} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial t} = 0 \end{cases} \qquad (2.12)$$

(с точностью до $O(\varepsilon, \delta^2)$).

Рассмотрим сначала нулевое приближение: пусть $\varepsilon = \delta = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} = 0, \end{cases} \qquad (2.13)$$

откуда следуют волновые уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \end{cases}$$

Заметим, что системе (2.13) удовлетворяют $F(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$, связанные условием $F = \eta$. Возьмём за основу это нулевое приближение и сделаем более точные вычисления. А именно, воспользуемся методом возмущений: пусть $F = \eta + \varepsilon F^{(1)} + \delta^2 F^{(2)}$. Применим это представление в системе (2.12) и запишем её с точностью до членов первого порядка по $\varepsilon$ и $\delta^2$ включительно:

$$\begin{cases} \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} + \delta^2\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} + 2\varepsilon\eta\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\delta^2}{6} \cdot \frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0; \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \delta^2\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \varepsilon\eta\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\delta^2}{2} \cdot \frac{\partial^3\eta}{\partial x^2 \partial t} = 0. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$\varepsilon\left[\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}+\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}\right]+$$
$$+\delta^2\left[\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}-\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}-\frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial t}\right]=0.$$

Так как параметры $\varepsilon$ и $\delta^2$ независимы, то из этого равенства следует, что оба выражения в квадратных скобках равны нулю:

$$\begin{cases}\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}+\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}=0;\\ \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}-\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}-\frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\partial t}=0.\end{cases}\tag{2.15}$$

Из (2.13) следует, что

$$\begin{cases}\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}=-\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x};\\ \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}=-\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}.\end{cases}$$

С учётом этих равенств можно показать, что (2.15) удовлетворяют функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{cases}F^{(1)}=-\frac{\eta^2}{4};\\ F^{(2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}.\end{cases}$$

Подставим эти выражения в первое из равенств (2.14):

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{3}{2}\varepsilon\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\delta^2}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0.$$

Введём переменную $\tau=x+t$, затем масштабируем $\tau$ и $\eta$ по правилам

$$\tau=\frac{6}{\delta^2}s;\ \eta=\frac{2\delta^2}{3\varepsilon}u.$$

Придём к уравнению Кортевега–де Фриза:

$$\frac{\partial u}{\partial s}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u^3}{\partial x^3}=0.$$

## § 2. Возмущения в цепочке одинаковых масс

В 1952 году Э. Ферми, Д. Паста и С. Улам исследовали численно модельную задачу описания колебательного процесса в цепочке из 64 одинаковых грузов, соединённых пружинами, при некотором начальном возмущении (рис. 2.2). Позже процесс был описан аналитически. Приведём здесь вывод уравнения Кортевега–де Фриза на основе этой модели.

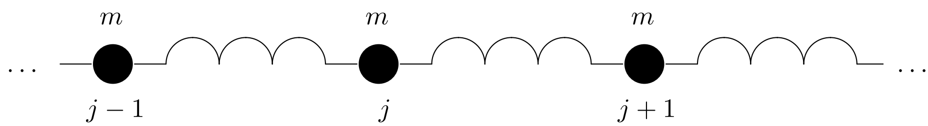


Рис. 2.2: Экспериментальная система из грузов и пружин.

Запишем II закон Ньютона для груза под номером $j$, на который действуют две силы, соответствующие пружинам, расположенным слева и справа:

$$m\frac{d^2y_j}{dt^2} = F_{j;j+1} - F_{j-1;j}, \tag{2.16}$$

где $y_j$ — координата груза, $m$ — его масса, а в правой части стоит равнодействующая сил, действующих со стороны соседних масс. Напомним, что закон Гука является не фундаментальным законом, а приближением простого вида, которое применимо при малых удлинениях пружины. Здесь же будем считать, что названные силы зависят от удлинения пружины нелинейно:

$$F_{j-1;j} = k\Delta l + \alpha\Delta l^2 + \beta\Delta l^3,$$

где $\Delta l = y_j - y_{j-1}$, $k, \alpha, \beta = \mathrm{const}$. Представим $y_{j\pm1}$

через $y_j$ с помощью формулы Тейлора:

$$y_{j\pm1} = y_j \pm h\frac{\partial y_j}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 y_j}{\partial x^2} \pm \frac{h^3}{6}\cdot\frac{\partial^3 y_j}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24}\cdot\frac{\partial^4 y_j}{\partial x^4} + O\left(h^5\right),$$

где $h$ — расстояние между соседними грузами. Тогда (2.16) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{kh^2}{m}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{kh^4}{12m}\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{2\alpha h^3}{m}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \\ + \frac{3\beta h^4}{m}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Сделав очевидные переобозначения, запишем уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \varepsilon\delta c^2\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \alpha\varepsilon c^2\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \gamma\varepsilon\delta c^2\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{2.17}$$

В частности, при $\gamma = 0$ (то есть $\beta = 0$) получим уравнение Буссинеска, впервые полученное в 1872 г. для описания волн на воде.

Возмущения, описываемые этим уравнением, на начальной стадии удовлетворяют линейному уравнению $y''_{t^2} = c^2 y''_{x^2}$ (с точностью до малых слагаемых). Значит, начальное возмущение распадается на две противоположно направленные волны. Рассмотрим одну из них: $y = f(z;\tau) + \varepsilon y_1(x;t)$, где $z = x - ct$, $\tau = \varepsilon t$, а $f(\cdot)$ соответствует профилю волны на больших расстояниях при $\tau \sim 1/\varepsilon$. Перепишем (2.17) в виде

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 2c\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\tau} + \delta c^2\cdot\frac{\partial^4 f}{\partial z^4} + \alpha c^2\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \\ + \gamma\delta c^2\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Для того чтобы функция $y_1(\cdot)$ асимптотически не возрастала, потребуем, чтобы правая часть этого равенства была равна нулю. Запишем это условие, положив

$\sigma = c\tau/2$, $u = \partial f/\partial z$, в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma \delta u^2 \frac{\partial u}{\partial z} + \delta \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0.$$

В частности, при $\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ получаем уравнение Кортевега–де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial z} + \delta \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0,$$

а при $\alpha = 0$, $\gamma \neq 0$ получаем модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \gamma \delta u^2 \frac{\partial u}{\partial z} + \delta \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0.$$

Такой вывод уравнения Кортевега–де Фриза был сделан М.Д. Крускалом и Н.Дж. Забуски после численного решения (2.16) с периодическими граничными условиями. (Было установлено, что при $h \to 0$ и неограниченном росте количества масс уравнение переходит в уравнение Кортевега–де Фриза.)

Отметим, что в середине XX века уравнение Кортевега–де Фриза появилось и при описании ионно-звуковых волн в плазме. Таким образом, оно широко распространено, и его решение — уединённая волна — может описывать множество явлений.

# Глава III. Нелинейное уравнение Шрёдингера

Вот так и ведётся на нашем веку:
на каждый прилив — по отливу…

*Б.Ш. Окуджава*

## § 1. О скоростях волн

Когда речь идёт о движении частицы, смысл понятия скорости очевиден. Однако, при движении волны перемещение частиц может происходить по законам, отличным от движения самой волны (пример — волны на поверхности воды), или даже не происходить. Поэтому возникает вопрос об определении скорости волны. Часто под скоростью волны подразумевается скорость перемещения её максимума (или минимума).

Рассмотрим волновое уравнение:

$$u''_{t^2} = c^2 u''_{x^2}. \tag{3.1}$$

Введём вспомогательную функцию $v(x;t)$, удовлетворяющую условию $v'_t = cu'_x$. Тогда $cv''_{tx} = c^2 u''_{x^2} \Rightarrow u''_{t^2} = cv''_{tx}$. Проинтегрировав и взяв нулевую постоянную интегрирования, получим: $u'_t = cv'_x$. Складывая и вычитая правые и левые части равенств $v'_t = cu'_x$ и $u'_t = cv'_x$, получим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial g}{\partial t} + c\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

где $f = (u + v)/2$, $g = (u - v)/2$. Тогда решение задачи Коши для исходного уравнения представимо в виде $u = f + g$, где $f$ и $g$ легко определить с помощью начальных условий: они будут соответствовать волнам, идущим в одну и в другую сторону. Отметим, что ранее именно возможность сведения волнового уравнения к такой равносильной системе использовалась при выводе одноволновых приближений, описываемых уравнением Кортевега–де Фриза.

Рассмотрим следующую задачу Коши для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u''_{t^2} = c^2 u''_{x^2}; \\ u\big|_{t=0} = a\cos kx; \\ u'_t\big|_{t=0} = a\omega \sin kx, \end{cases}$$

где $a, k, \omega = \mathrm{const}$. Несложно убедиться, что решением этой задачи будет функция $u(x;t) = a\cos(kx - \omega t)$, соответствующая монохроматической волне, движущейся вправо со скоростью $c = x/t = \omega/k$. Величина $\omega/k$ называется фазовой скоростью, так как характеризует скорость перемещения максимума. Однако, монохроматические волны встречаются редко — обычно изучаются пакеты волн. Как в таком случае определить скорость волн?

Рассмотрим следующий пример. Пусть $u_1(x;t) = a\cos(kx-\omega t)$, $u_2(x;t) = a\cos((k+\Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t)$. Эти функции удовлетворяют (3.1), а так как оно линейно, то удовлетворяет ему и

$$u = u_1 + u_2 =$$
$$= 2a\cos\frac{\Delta kx - \Delta\omega t}{2}\cdot\cos\left(\left(k+\frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right)$$

(рис. 3.1). Здесь суммарная амплитуда равна

$$A(x;t) = 2a\cos\frac{\Delta kx - \Delta\omega t}{2}.$$

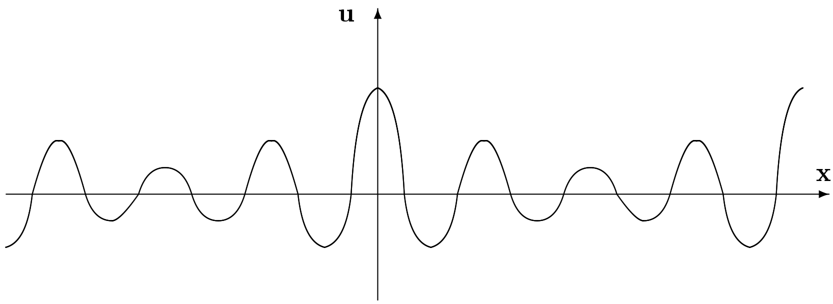


Рис. 3.1: Сумма двух волн: $u = u_1 + u_2$.

В этом случае скорость распространения пакета волн можно понимать как скорость распространения максимума суммарной амплитуды:

$$v_g = \frac{x}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Когда же речь идёт о пакете волн, то групповую скорость можно ввести как

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}.$$

Заметим, что (3.1) удовлетворяет

$$u = ae^{i(kx+\omega t)}. \tag{3.2}$$

Взаимосвязь между $\omega$ и $k$ называется дисперсионным соотношением, её задание позволяет восстановить уравнение (3.1). Подставив (3.2) в уравнение (3.1), найдём, что $\omega = \pm ck$. Значит, для волн, описываемых (3.1), фазовая скорость будет $v_p = \omega/k = \pm c$, а групповая — $v_g = d\omega/dk = \pm c$, то есть они равны. Здесь нет дисперсии (зависимости скорости волны от её длины).

Пусть теперь $\omega, k \in \mathbf{R}$, причём $\frac{d^2\omega}{dk^2} \neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$u'_t + u'''_{x^3} = 0.$$

Подставив (3.2) в это уравнение, получим $\omega = k^3$. Следовательно, $v_p = \omega/k = k^2$, тогда как $v_g = d\omega/dk = 3k^2$. Здесь $v_p \neq v_g$, и если в начальный момент волновой пакет был локализован, то с течением времени он будет расплываться (диспергировать). Поэтому слагаемое $u'''_{x^3}$ в уравнении Кортевега–де Фриза называется дисперсионным. Заметим, однако, что уравнение Кортевега–де Фриза имеет решение в виде уединённой волны, движущейся без изменения формы[9]. Здесь нелинейное слагаемое $uu'_x$ «уравновешивает» влияние дисперсии.

## § 2. Уравнение Шрёдингера для огибающей волнового пакета

Обычно волны на воде распространяются группами. В 1967 г. Т. Бенджамен и Дж. Фейер показали, что простая периодическая волна на глубокой воде неустойчива, и волны на воде разбиваются на группы. В 1968 г. В.Е. Захаров вывел уравнение, описывающее группы волн на воде.

Распространение пакета волн в разных средах может описываться разными уравнениями. Предположим, что оно описывется модифицированным уравнением Кортевега–

[9] Обсудим такое решение в главе VIII.

де Фриза:
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0. \qquad (3.3)$$
Здесь $x$ и $t$ — пространственная и временная переменные несущей волны. Введём, кроме того, «медленные» переменные, соответствующие огибающей волнового пакета:

$$X_0=x;\ X_1=\varepsilon x;\ T_0=t;\ T_1=\varepsilon t;\ T_2=\varepsilon^2 t,$$

где $\varepsilon$ — малый параметр, определяемый характеристиками огибающей пакета.

Пусть основное состояние системы описывается линейной гармоникой с малой амплитудой (но не пренебрежимо малой из-за нелинейности). Решение (3.3) будем искать в виде

$$u=\varepsilon(u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\ldots) \qquad (3.4)$$

(под многоточием подразумеваются слагаемые большего порядка малости). Заметим, что
$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2};$$
$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial X_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial X_1}.$$
Подставим (3.4) в (3.3), сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями $\varepsilon$ и праравняем к нулю коэффициент при каждой степени $\varepsilon$. Таким образом,
$$\begin{cases}\frac{\partial u_0}{\partial T_0}+\frac{\partial^3 u_0}{\partial X_0^3}=0;\\ \frac{\partial u_1}{\partial T_0}+\frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^3}+\frac{\partial u_0}{\partial T_1}+3\frac{\partial^3 u_0}{\partial X_1\partial X_0^2}=0;\\ \frac{\partial u_2}{\partial T_0}+\frac{\partial u_1}{\partial T_1}+\frac{\partial u_0}{\partial T_2}+\frac{\partial^3 u_2}{\partial X_0^3}+u_0^2\frac{\partial u_0}{\partial X_0}+3\frac{\partial^3 u_0}{\partial X_0\partial X_1^2}+3\frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^2\partial X_1}=0.\end{cases}$$
Решением первого уравнения будет $u_0=a(X_1;T_1;T_2)e^{i\theta}+\overline{a}(X_1;T_1;T_2)e^{-i\theta}$, где $\theta=kX_0+\omega T_0$, $\omega=k^3$. Учитывая это выражение, запишем второе уравнение в виде
$$\frac{\partial u_1}{\partial T_0}+\frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^3}=\left(\frac{\partial a}{\partial T_1}-3k^2\frac{\partial a}{\partial X_1}\right)e^{i\theta}-\left(\frac{\partial \overline{a}}{\partial T_1}-3k^2\frac{\partial \overline{a}}{\partial X_1}\right)e^{-i\theta}$$

(черта обозначает комплексное сопряжение). Так как $v_g = d\omega/dk = 3k^2$, а амплитуда распространяется с групповой скоростью, то из этого равенства следует, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial T_0} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial X_0^3} = 0.$$

Пусть для простоты $u_1 = 0$. Рассмотрим теперь третье уравнение системы. Подставив в него полученные $u_{0;1}$, запишем его в виде

$$\frac{\partial u_2}{\partial T_0} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial X_0^3} = -\left(\frac{\partial a}{\partial T_2}e^{i\theta} + \frac{\partial \overline{a}}{\partial T_2}e^{-i\theta}\right) -$$
$$-ik\left(ae^{i\theta} - \overline{a}e^{-i\theta}\right)\left(ae^{i\theta} + \overline{a}e^{-i\theta}\right)^2 - 3ik\left(\frac{\partial^2 a}{\partial X_1^2}e^{i\theta} - \frac{\partial^2 \overline{a}}{\partial X_1^2}e^{-i\theta}\right),$$

откуда

$$\frac{\partial u_2}{\partial T_0} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial X_0^3} = -ika^3e^{3i\theta} + ik\overline{a}^3e^{-3i\theta} -$$
$$-\left(\frac{\partial a}{\partial T_2} + 3ik\frac{\partial^2 a}{\partial X_1^2} + ika^2\overline{a}\right)e^{i\theta} + \left(\frac{\partial \overline{a}}{\partial T_2} - 3ik\frac{\partial^2 \overline{a}}{\partial X_1^2} - ik\overline{a}^2 a\right)e^{-i\theta}.$$

Для того чтобы этому уравнению удовлетворяло $u_2 = -ika^3e^{3i\theta} + ik\overline{a}^3e^{-3i\theta}$, потребуем, чтобы выражения в скобках были равны нулю. Таким образом, функция $a(\cdot)$ должна удовлетворять нелинейному уравнению Шрёдингера[10]

$$i\frac{\partial a}{\partial T_2} = 3k\frac{\partial^2 a}{\partial X_1^2} + ka|a|^2.$$

Отметим, что уравнение Шрёдингера для огибающей волнового пакета можно получить и при рассмотрении распространяющейся группы волн, описываемой некоторыми другими уравнениями. Впервые же оно было предложено Э. Шрёдингером для анализа квантовых систем, а именно, для описания взаимодействия частиц внутри атома. Кроме того, оно применяется в нелинейной оптике.

[10] Противоречия не возникает: равенство нулю и первого, и второго выражения в скобках можно свести к уравнению Шрёдингера.

# Глава IV. Модели, сводящиеся к уравнениям соболевского типа

Пели песню старым мы князьям,
Молодых настало время славить нам…

*Слово о полку Игореве*
*(в переложении Н.А. Заболоцкого)*

Уравнения соболевского типа (не разрешённые относительно старшей производной по времени и не удовлетворяющие условиям теоремы Коши – Ковалевской) могут использоваться для моделирования явлений гидродинамики и физики полупроводников. По-видимому, первое исследование такого уравнения было опубликовано С.Л. Соболевым в 1954 году [37]. Оно было посвящено уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)+\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0,$$

описывающему малые колебания во вращающейся жидкости. Затем были выведены и исследованы многие другие неклассические уравнения высоких порядков. Обсудим здесь вывод нескольких таких уравнений.

## § 1. Уравнение, описывающее состояние полупроводника

Рассмотрим вывод нескольких уравнений на основе физики полупроводников.

Как известно, заряды разделяются на

- свободные (могут перемещаться на макроскопические расстояния),
- связанные (не могут перемещаться на макроскопические расстояния).

А среды подразделяются на

- проводники (все заряды свободные),
- диэлектрики (все заряды связанные),
- полупроводники (присутствуют и свободные, и связанные заряды).

Рассмотрим систему уравнений квазистационарного электрического поля:

$$\operatorname{div} \overline{D} = -4\pi n; \tag{4.1}$$

$$\operatorname{rot} \overline{E} = 0; \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \overline{J} + Q, \tag{4.3}$$

где $\overline{D}$ — вектор индукции поля, $\overline{E}$ — вектор напряжённости поля, $\overline{J}$ — вектор плотности тока свободных зарядов, $n$ — концентрация свободных зарядов, $Q$ — распределение источников или стоков свободных зарядов.

Известно, что для полупроводниковой среды выполняются равенства

$$\overline{D} = \overline{E} + 4\pi \overline{P}; \tag{4.4}$$

$$\rho = 4\pi \operatorname{div} \overline{P}, \tag{4.5}$$

где $\overline{P}$ — вектор поляризуемости среды, $\rho$ — плотность связанных зарядов. Кроме того, введём потенциал электрического поля, то есть такую скалярную величину $\varphi$, что $\overline{E} = -\nabla\varphi$.

Для построения моделей предположим, что выполняются следующие три условия.

1. Во-первых, задана зависимость $\overline{P}$ от $\overline{E}$ или $\rho$ от $\varphi$.
2. Во-вторых, задана зависимость $\overline{J}$ от $\overline{E}$, которая может быть:
   - алгебраической, например, $\overline{J} = \sigma(|\overline{E}|)\overline{E}$, где $\sigma(\cdot)$ — коэффициент проводимости среды,
   - операторной, например, $\overline{J}(x;t) = \int_0^t \sigma(t-s)\overline{E}(x;s)ds$, $\sigma(\cdot) \in C[0;\ \infty)$.
3. В-третьих, задана зависимость $Q$ от $\varphi$, например, $Q = |\varphi|^q\varphi$.

Как связаны $\overline{D}$ и $\overline{E}$? Они входят в (4.4), при этом для дальнейшего анализа нужна связь между $\overline{E}$ и $\overline{P}$:

$$\overline{P} = \tilde{\varkappa}\overline{E},, \tag{4.6}$$

где $\tilde{\varkappa}$ — оператор, а именно, $\tilde{\varkappa}f = \int_{\mathbf{R}^3} \varkappa(x-y)f(y)dy$. Рассмотрим (4.6) в $\mathbf{R}^3$ и применим преобразование Фурье:

$$\hat{P}(\overline{k}) = \varkappa(\overline{k})\hat{E}(\overline{k}),$$

где $\overline{k} = (k_1;k_2;k_3)$ — волновой вектор. Пусть $\varkappa(\cdot) \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$. Тогда можно разложить эту функцию в ряд Тейлора:

$$\varkappa(\overline{k}) = \sum_{1\leqslant\alpha_l\leqslant n_l;\ l=\overline{1;3}} c_{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3}k_1^{\alpha_1}k_2^{\alpha_2}k_3^{\alpha_3} + o\left(k_1^{n_1}k_2^{n_2}k_3^{n_3}\right).$$

Обозначим сумму в правой части через $\varkappa_0(\overline{k})$, а о-малым пренебрежём. Тогда

$$\hat{P}(\overline{k}) \approx \varkappa_0(\overline{k})\hat{E}(\overline{k}).$$

Формально применим обратное преобразование Фурье:

$$\overline{P}(x) = \\ = \sum_{1\leqslant \alpha_l \leqslant n_l;\ l=\overline{1;3}} c_{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3} \left(i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \left(i\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{\alpha_3} \overline{E}(x). \tag{4.7}$$

Таким образом, получена модельная связь между $\overline{P}$ и $\overline{E}$. Часто используется $\varkappa_0(\overline{k}) = A|\overline{k}|^2$, $A > 0$, чему соответствует $\overline{P} = -A\Delta\overline{E}$.

Отметим, что формула (4.7) выведена для всего пространства $\mathbf{R}^3$, но формально она применима к любой области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Поэтому применительно к $\Omega$ (а не только $\mathbf{R}^3$) тоже говорят о пространственной дисперсии.

Ещё одним фактором, влияющим на полупроводниковую среду, может быть внешнее электрическое поле $\overline{E}_0 = \mathrm{const}$. Оно вызывает ток свободных зарядов $\overline{J}_0 = \sigma_0 n_0(\varphi)\overline{E}_0$, где $n_0(\varphi)$ — «квазистационарное» распределение плотности свободных зарядов. Возьмём модельное соотношение $n_0(\varphi) = a_1\varphi + a_2\varphi^2$, $a_{1;2} \in \mathbf{R}$. Тогда, применяя суперпозицию, запишем (4.3) в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\overline{J} + \overline{J}_0\right) + Q$$

(разные факторы, относящиеся к $\overline{J}$ и $\overline{P}$, учитываются с помощью суперпозиции: $\overline{J} = \sum \overline{J}_k$, $\overline{P} = \sum \overline{P}_k$).

Перейдём к выводу уравнений.

Рассмотрим кристаллический полупроводник, занимающий ограниченную область $\Omega$ с достаточно гладкой границей: $\partial\Omega \in C^{(2;\delta)}$, $\delta \in (0;1]$. Сделаем следующие предположения.

- Пусть $\rho/(4\pi) = P_1|\varphi|^{q_1}\varphi + P_2\varphi$, $q_1 = \mathrm{const} > 0$, $P_{1;2} = \mathrm{const} \geqslant 0$, причём хотя бы один из коэффициентов $P_{1;2}$ не равен нулю. С учётом (4.5) это значит, что $\operatorname{div}\overline{P} = P_1|\varphi|^{q_1}\varphi + P_2\varphi$.

- Пусть базис координат $(e_1; e_2; e_3)$ выбран так, что вектор внешнего поля направлен по первой оси координат: $\overline{E}_0 = E_0 \overline{e}_1$.
- Пусть в плотность тока свободных зарядов вносят вклад как операторная составляющая $\overline{J}_1 = \sigma_1 \int_0^t h(t-s)\overline{E}(x; s)ds$, так и алгебраическая: $\overline{J}_2 = \sigma_2 \overline{E}$.
- Пусть источники зарядов имеют вид $Q(\varphi) = Q_0|\varphi|^{q_2}\varphi$, $q_2 = \mathrm{const} \geqslant 0$, $Q_0 = \mathrm{const} > 0$.

Таким образом, имеет место система

$$\operatorname{div} \overline{D} = -4\pi n; \tag{4.8}$$

$$\overline{D} = \overline{E} + 4\pi \overline{P}; \tag{4.9}$$

$$\overline{E} = -\nabla\varphi; \tag{4.10}$$

$$\operatorname{div} \overline{P} = P_1|\varphi|^{q_1}\varphi + P_2\varphi; \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\overline{J}_0 + \overline{J}_1 + \overline{J}_2\right) + Q_0|\varphi|^{q_2}\varphi, \tag{4.12}$$

где $\overline{J}_0 = \sigma_0 n_0(\varphi)\overline{E}_0$, $\overline{J}_1 = \sigma_1 \int_0^t h(t-s)\overline{E}(x; s)ds$, $\overline{J}_2 = \sigma_2 \overline{E}$, $n_0(\varphi) = a_1\varphi + a_2\varphi^2$.

Подставим (4.10) в (4.9): $\overline{D} = -\nabla\varphi + 4\pi\overline{P}$. Тогда (4.8) можно будет записать в виде

$$-\Delta\varphi + 4\pi \operatorname{div} \overline{P} = -4\pi n.$$

Учтём теперь (4.11):

$$-\Delta\varphi + 4\pi(P_1|\varphi|^{q_1}\varphi + P_2\varphi) = -4\pi n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{1}{4\pi}\Delta\varphi - P_1|\varphi|^{q_1}\varphi - P_2\varphi.$$

Подставим это выражение в (4.12):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi}\Delta\varphi - P_1|\varphi|^{q_1}\varphi - P_2\varphi\right) = \sum_{k=0}^{2} \operatorname{div} \overline{J}_k + Q_0|\varphi|^{q_2}\varphi.$$

Преобразуем слагаемые, содержащие знак дивергенции.

- Во-первых,

$$\operatorname{div}\overline{J}_0 = \operatorname{div}\big(\sigma_0 n_0(\varphi)\overline{E}_0\big) = \sigma_0 \operatorname{div}\big((a_1\varphi + a_2\varphi^2)E_0\overline{e}_1\big) =$$
$$= \sigma_0\frac{\partial}{\partial x}\big((a_1\varphi + a_2\varphi^2)E_0\big) = \sigma_0 E_0 a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2\sigma_0 E_0 a_2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x};$$

- во-вторых,

$$\operatorname{div}\overline{J}_1 = \operatorname{div}\left(\sigma_1\int\limits_0^t h(t-s)\overline{E}(x;s)ds\right) =$$
$$= -\sigma_1\operatorname{div}\left(\int\limits_0^t h(t-s)\nabla\varphi ds\right) =$$
$$= -\sigma_1\left(\int\limits_0^t h(t-s)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}ds + \int\limits_0^t h(t-s)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}ds + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^t h(t-s)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}ds\right) =$$
$$= -\sigma_1\int\limits_0^t h(t-s)\Delta\varphi ds;$$

- в-третьих,

$$\operatorname{div}\overline{J}_2 = \operatorname{div}(\sigma_2\overline{E}) = -\sigma_2\operatorname{div}\nabla\varphi = -\sigma_2\Delta\varphi.$$

Положим теперь $\varphi = ku$, $\overline{x} = l\overline{x}_1$ и затем заменим вектор $\overline{x}_1$ снова на $\overline{x}$, где коэффициенты $k$ и $l$ определяются следующим образом:

- если $P_1 \neq 0$ и $P_2 \neq 0$, то $k = (P_2/P_1)^{1/q_1}$, $l = 1/\sqrt{4\pi P_2}$,
- если $P_1 = 0$ и $P_2 \neq 0$, то $k = 1$, $l = 1/\sqrt{4\pi P_2}$,
- если $P_1 \neq 0$ и $P_2 = 0$, то $k = (4\pi P_1)^{-1/q_1}$, $l = 1$.

Тогда часть уравнения, содержащая дифференцирование по времени, примет вид

$$\frac{k}{l^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta u - \nu_1 |u|^{q_1} u - \nu_2 u \right),$$

где коэффициенты $\nu_{1;2}$ могут быть равны только нулю или единице, причём они не равны нулю одновременно. Умножив левую и правую части уравнений на $l^2/k$ и сделав очевидные переобозначения постоянных, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta u - \nu_1 |u|^{q_1} u - \nu_2 u \right) - a \frac{\partial u}{\partial x} - bu \frac{\partial u}{\partial x} + c \Delta u +$$
$$+ \int\limits_0^t h(t-s) \Delta u ds + \mu |u|^{q_2} u = 0.$$

Можно учитывать не все указанные эффекты — тогда уравнение получится более простым.

Для таких уравнений изучаются:

- Задачи Коши, где $x \in \mathbf{R}^3$, заданы значения $u$ при $t = 0$.
- Начально-краевые задачи, где $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^3$, заданы $u|_{t=0}$ и $u|_{\partial\Omega}$. Часто встречается условие $u|_{\partial\Omega} = 0$, означающее, что граница полупроводниковой среды является заземлённой и идеально проводящей.

## § 2. Другие неклассические уравнения

Назовём и несколько других моделей, сводящихся к нелинейным уравнениям со смешанными производными высоких порядков.

Во-первых, рассмотрим нелокальное диссипативное уравнение типа Розенау–Бюгрерса с источником. Пусть, как и раньше, $\overline{J}$ — вектор плотности тока свободных зарядов, $\overline{P}$ — вектор поляризуемости среды. Учтём следующие факторы. Во-первых, пусть $\overline{P} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2$, где $\overline{P}_1 = -a_1\Delta\overline{E}$, $a_1 > 0$ (сильная пространственная дисперсия), $\overline{P}_2 = a_2|\overline{E}|^{p_1-2}\overline{E}$, $p_1 \geqslant 2$, $a_2 > 0$ (так называемая керровская нелинейность). Во-вторых, пусть $\overline{J} = \overline{J}_1 + \overline{J}_2$, где $\overline{J}_1 = \sigma_0(1 - |\overline{E}|^{p_2-2})\overline{E}$, $\sigma_0 > 0$, $p_2 > 2$, $\overline{J}_2 = \int_0^t h(t-s)\overline{E}(x;s)ds$. Значит, имеет место система

$$\begin{cases} \operatorname{div}\overline{D} = -4\pi n; \\ \overline{D} = \overline{E} + 4\pi\overline{P}; \\ \frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\overline{J}; \\ \overline{P} = -a_1\Delta\overline{E} + a_2|\overline{E}|^{p_1-2}\overline{E}; \\ \overline{J} = \sigma_0(1 - |\overline{E}|^{p_2-2})\overline{E} + \int_0^t h(t-s)\overline{E}(x;s)ds. \end{cases} \tag{4.13}$$

Рассуждая по аналогии с предыдущим параграфом, придём к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\Delta^2 u + \Delta u + \Delta_{p_1} u\right) + \Delta u + \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u ds - \Delta_{p_2} u = 0, \tag{4.14}$$

где $\Delta_p$ — псевдолапласиан, то есть оператор, задаваемый по правилу $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, $p \geqslant 2$.

Во-вторых, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \alpha\Delta u + \beta u^3 = 0$$

может описывать давление жидкости в пористой среде.

В-третьих, нелинейно-нелокальная система уравнений Осколкова с источником

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\overline{u} - \overline{u}) + \Delta\overline{u} + \int\limits_0^t h(t-s)\Delta\overline{u}ds + (\overline{u};\nabla)\overline{u} + \\ +|\overline{u}|^2\overline{u} = \nabla p; \\ \operatorname{div}\overline{u} = 0. \end{cases}$$

может описывать поведение жидкости: здесь $\overline{u}$ — вектор скорости жидкости, зависящий от координат и времени, $p$ — давление. Заметим, что она может быть переписана как система из четырёх уравнений для четырёх скалярных функций (трёх составляющих $\overline{u}$ и $p$).

В-четвёртых, известны следующие уравнения взрывной неустойчивости в автоколебательных системах:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(u - u^2\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

# Глава V. Уравнения в частных производных в экономике

При планировании производства товаров важно учитывать спрос на них, кроме того, желательно стимулировать спрос. Уровень потребления зависит от платёжеспособности населения, стоимости товара и его важности. Большие масштабы потребления товаров (особенно, продуктов питания) позволяют использовать непрерывные модели, основанные на уравнениях в частных производных.

Пусть потребитель приобретает $n$ видов товаров в количествах $x_1, \ldots, x_n$ по ценам соответственно $p_1, \ldots, p_n$. В единицу времени он затрачивает $z$ денег. Значит, имеет место бюджетное ограничение:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k x_k = z.$$

В дальнейшем будем рассматривать случай двух товаров: $n = 2$.

Для покупки определённого количества каждого товара потребитель оценивает их значимость. Существуют кардиналистский (количественный) и ординалистский (порядковый) подходы.

При кардиналистском подходе на множестве всех возможных комбинаций количеств продуктов задана функция полезности — количественная характеристика желательности приобретения каждого набора товаров. Рассмотрим функцию полезности $U(x_1; x_2)$, зависящую от количеств первого и второго товара. Она должна удовлетворять следующим аксиомам:

- с увеличением количества одного товара при постоянном количестве другого она возрастает: $MU_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} > 0$, $MU_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} > 0$ (эти производные называются предельными полезностями единицы первого или второго товара соответственно[11] и показывают, насколько существенно меняется полезность набора при малом изменении количества одного товара),

- с увеличением количества одного товара при постоянном количестве другого соответствующая предельная полезность убывает: $\frac{\partial MU_1}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} < 0$, $\frac{\partial MU_2}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} < 0$,

- линии безразличия (то есть множества точек плоскости $(x_1; x_2)$, на которых $U = \text{const}$) выпуклы вниз.

Отметим, что функция полезности задаётся с точностью до возрастающего преобразования: если $U(x_1; x_2)$ — функция полезности, $f(\cdot)$ — возрастающая функция одного аргумента, то $f(U(x_1; x_2))$ — тоже функция полезности. Иногда в литературе накладывают условия на её поведение в нуле и на бесконечности.

Например, в случае двух товаров часто рассматривается функция Кобба–Дугласа: $U = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, $\alpha_{1;2} = \text{const}$.

[11] Традиционно в экономической теории часто используются многобуквенные обозначения. В частности, $MU$ — единый символ, а не произведение двух величин.

При ординалистском подходе на множестве всех возможных комбинаций количеств продуктов задано отношение порядка: про любые два набора продуктов можно сказать, что один из них лучше другого, хуже или равноценен. Ординалистский подход можно назвать более общим: в [42, с. 57–58] обсуждается множество с отношением порядка, на котором нельзя построить функцию полезности. Однако, для моделировании с помощью дифференциальных уравнений удобнее кардиналистский подход.

## § 1. Вывод уравнения Слуцкого

Рассмотрим поведение потребителя, который в течение дня собирается купить два товара[12] в количествах $x_1$ и $x_2$ по ценам $p$ и $q$ соответственно, имея ограничение в $z$ рублей. Пусть при выборе он руководствуется функцией полезности $U = U(x_1; x_2)$. Таким образом, следует решить задачу оптимизации (рис. 5.1):

$$\begin{cases} U = U(x_1; x_2) \to \max\limits_{x_1; x_2}; \\ px_1 + qx_2 = z; \\ x_{1;2} \geqslant 0. \end{cases}$$

В силу свойств функции $U(\cdot)$, эта задача должна иметь единственное решение. Введём функцию Лагранжа: $L(x_1; x_2; \lambda) = U(x_1; x_2) - \lambda(px_1 + qx_2 - z)$. Оптимальный вектор $(x_1; x_2; \lambda)$ определеяется из условий

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0,$$

то есть

$$\begin{cases} px_1 + qx_2 = z; \\ \frac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda p = 0; \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda q = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

[12]Аналогично можно рассмотреть произвольное количество товаров.

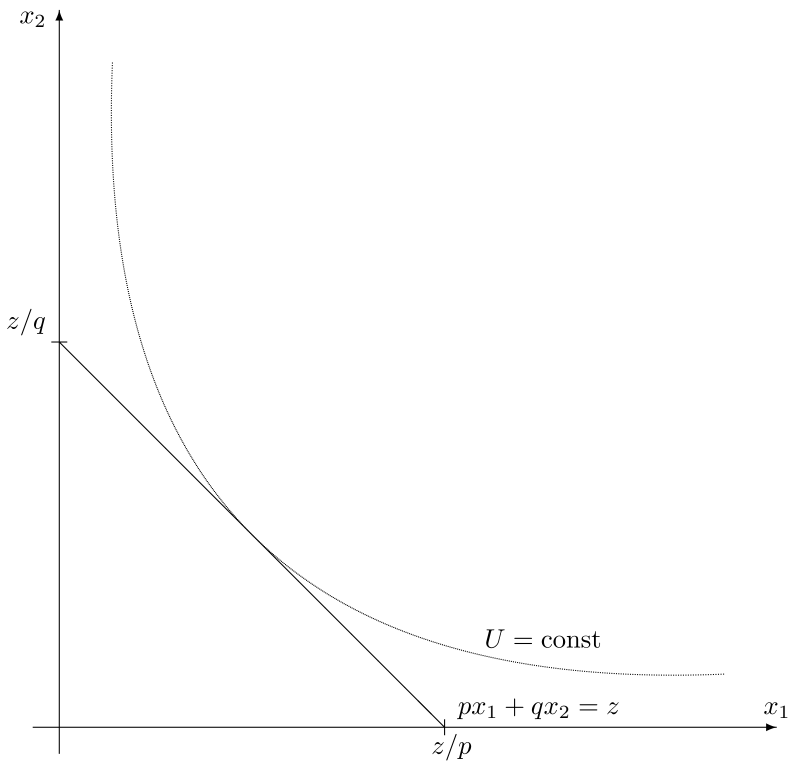


Рис. 5.1: Оптимальный выбор при бюджетном ограничении.

Решения этой задачи, задающие оптимальные значения $x_{1;2}$ в соответствии со значениями $p$, $q$ и $z$, назовём функциями спроса: $x_{1;2} = f_{1;2}(p; q; z)$.

Теперь будем считать, что цена одного товара $p$ и доход потребителя $z$ являются переменными величинами. Исследуем вопрос, как их изменение влияет на оптимальный выбор. Изменение спроса на первый товар ($x_1$) складывается из эффекта дохода и эффекта замещения. Эффект дохода состоит в том, что изменение цены одного товара меняет реальный доход потребителя, а значит, его покупательную способность. Эффект замещения состоит в том, что изменение цены одного товара, вообще говоря, меняет относительные цены всех товаров, вследствие чего потребитель меняет свой выбор в пользу относительно подешевевшего товара.

Выведем уравнения Слуцкого, разграничивающие названные эффекты.

Запишем полные дифференциалы для функций спроса

$$\begin{cases} dx_1 = \frac{\partial f_1}{\partial p}dp + \frac{\partial f_1}{\partial q}dq + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz, \\ dx_2 = \frac{\partial f_2}{\partial p}dp + \frac{\partial f_2}{\partial q}dq + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz \end{cases} \tag{5.2}$$

и полный дифференциал дохода:

$$dz = x_1 dp + p dx_1 + x_2 dq + q dx_2.$$

Как было сказано, меняется только цена одного товара ($p$), значит, $dq = 0$. Кроме того, вдоль линии безразличия $pdx_1 + qdx_2 = 0$, так как $dU = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = 0$, а из оптимизационной задачи (5.1) видно, что $\frac{\partial U}{\partial x_1} = \lambda p$, $\frac{\partial U}{\partial x_2} = \lambda q$. Следовательно, $dz = x_1 dp$. Это равенство показывает компенсационное изменение дохода, то есть такое, которое позволяет потребителю при изменении цены оставаться на прежней линии безразличия (получать ту же суммарную полезность). Поэтому формулы (5.2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} dx_1 = \frac{\partial f_1}{\partial p}dp + x_1\frac{\partial f_1}{\partial z}dp, \\ dx_2 = \frac{\partial f_2}{\partial p}dp + x_1\frac{\partial f_2}{\partial z}dp. \end{cases}$$

В левых частях этих равенств стоят изменения спроса на товары при изменении $p$ при условии, что доход меняется так, что потребитель остаётся на той же линии безразличия. Преобразуем эти формулы к виду

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial p} = \left(\frac{dx_1}{dp}\right)_{comp} - x_1\frac{\partial x_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial p} = \left(\frac{dx_2}{dp}\right)_{comp} - x_1\frac{\partial x_2}{\partial z}. \end{cases}$$

Эти равенства называются уравнениями Слуцкого. Они показывают, что влияние изменения цены на спрос можно разложить на два эффекта: первое слагаемое соответствует изменению спроса под влиянием только изменения соотношения цен (так называемому компенсированному изменению спроса, что показывает индекс «comp»), а второе — изменению спроса под влиянием изменения только реального дохода.

**Замечание.** Можно записать уравнения Слуцкого в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial p} + x_1 \frac{\partial x_1}{\partial z} = \left(\frac{dx_1}{dp}\right)_{comp}; \\ \frac{\partial x_2}{\partial p} + x_1 \frac{\partial x_2}{\partial z} = \left(\frac{dx_2}{dp}\right)_{comp} \end{cases}$$

и вычислить правые части из некоторых других соображений. Для таких уравнений изучается задача Коши: ставятся условия при некотором значении $p$, что позволяет найти оптимальные $x_{1;2}(\cdot)$.

## § 2. Экономический смысл множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу о нахождении оптимального (в смысле функции полезности $U(\cdot)$) набора из $n$ товаров с заданным бюджетным ограничением:

$$\begin{cases} U = U(x_1; \ldots; x_n) \to \max\limits_{x_1;\ldots;x_n}; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k = z, \end{cases}$$

где $x_k$ и $p_k$ — соответственно количество и цена товара номер $k$. Составим функцию Лагранжа:

$$L = U - \lambda \left( \sum_{k=1}^{n} p_k x_k - z \right).$$

Учитывая условие $L \to \max$, приходим к системе

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial U}{\partial x_k} - \lambda p_k = 0 \ \forall k; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k - z = 0. \end{cases}$$

Из этих соотношений видно, что

$$\lambda = \frac{1}{p_k} \frac{\partial U}{\partial x_k} \ \forall k.$$

Пусть $MU_k = \partial U / \partial x_k$ — предельная полезность товара, то есть величина, показывающая, как увеличит полезность увеличение количества товара на единицу. При этом $p_k$ можно понимать как предельные издержки, то есть изменение издержек при изменении количества товара на единицу. Значит, множитель Лагранжа имеет смысл коэффициента «затраты–результат»; он одинаков для всех товаров в оптимальной точке и показывает, в какой мере ослабление бюджетного ограничения влияет на изменение полезности приобретаемого набора. Если коэффициент $\lambda$ велик или мал, то соответственно небольшое ослабление бюджетного ограничения сильно или слабо изменит достигаемую величину $U$. Каждый рубль в оптимальной точке приносит одинаковую полезность при вложении в любой товар, поэтому можно сказать, что $\lambda$ — «предельная полезность дохода».

Возможен случай краевого максимума, когда потребление одного из товаров в оптимальной точке равно нулю. В этом случае

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{\partial U}{\partial x_k} - \lambda p_k \leqslant 0$$

(неравенство строгое, когда $x_k = 0$). Тогда

$$p_k > \frac{1}{\lambda} \frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{MU_k}{\lambda}.$$

Таким образом, если цена превышает предельную ценность для потребителя $MU_k/\lambda$, то товар не будет куплен.

## § 3. Некоторые другие модели

Уравнения в частных производных порядка выше первого редко используются для изучения экономических процессов. Кратко рассмотрим несколько таких моделей.

1. Пусть $x = x(t) \geqslant 0$ — цена акции в момент времени $t$, $\Delta Q(x;t)$ — число акций, соответствующих отрезку $[x;\ x+\Delta x]$ в момент $t$, $u(x;t) = \partial Q/\partial x$ — плотность распределения акций, $Q = \int_{x_1}^{x_2} u dx$ — число акций, приобретённых по ценам из промежутка $[x_1;\ x_2]$. Тогда плотность акций можно описать уравнением
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 u) - \beta \frac{\partial}{\partial x}(xu)$$
($\alpha$ и $\beta$ — постоянные).

2. Положим $x = x(t)$ — накопления семьи в момент $t$. Тогда
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}((c+F)u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) + f,$$
где $u = u(x;t)$ — плотность семей на пространстве накоплений, $f(x;t)$ — число семей, попавших на отрезок единичной длины из других частей пространства накоплений, $F(x;t)$ соответствует динамике доходов, $b(x;t)$, $c(x;t)$ — параметры стохастического процесса.

3. Модель Блэка–Шоулса:
$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\delta^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + rx \frac{\partial w}{\partial x} - rw = 0,$$
где $w = w(x; t)$ — цена опциона, то есть соглашения, заключённого в момент $t$, о том, что покупатель сможет в момент $t^* > t$ купить акцию цены $x$.

# Глава VI. Тепловые возмущения в нелинейных средах

И тогда я открыл свою книгу в большом переплёте,
Где на первой странице растения виден чертёж.
И черна и мертва, протянулась от книги к природе
То ли правда цветка, то ли в нём заключённая ложь.

*Н.А. Заболоцкий*

Перейдём от вывода уравнений к изучению их свойств.

Как уже говорилось, для уравнений в частных производных, как правило, не удаётся построить общее решение, и ведутся исследования в таких направлениях, как построение точных решений и качественный анализ. В этой главе рассмотрим простейшие способы построения точных решений и их применение к анализу физического процесса, описываемого уравнением.

## § 1. О точных решениях

Назовём простейшие способы построения точных решений уравнения с неизвестной функцией $u = u(x;t)$. Под точным решением (или семейством точных решений[13]) нелинейного уравнения в частных производных

[13] Обычно для уравнения строится не одно точное решение, а семейство, содержащее произвольные постоянные или произвольные функции. Затем, если изучается задача для уравнения, свободные параметры подбираются так, чтобы все условия выполнялись.

понимается сужение множества всех решений уравнения до такого, которое можно описать аналитически с помощью более простых объектов, чем исходное уравнение, то есть выразить через элементарные и специальные функции, неявные формулы, решения обыкновенных дифференциальных уравнений и решения *линейных* уравнений в частных производных.

1. Решение типа бегущей волны: пусть $u(x,t) = f(z)$, где $z = x - at$. Постоянная $a$ может иметь физический смысл скорости движения волны. После подстановки в исходное уравнение получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $f(\cdot)$. Величина $a$ обычно остаётся произвольным параметром, хотя в некоторых случаях на неё накладываются условия непротиворечивости. Метод легко обобщить на случай $x \in \mathbf{R}^N$: пусть $z = (\alpha;\ x) + t$, где $\alpha$ — постоянный вектор соответствующей размерности.

2. Метод разделения переменных[14] имеет следующие варианты:

   - мультипликативный, когда решение ищут в виде:
   $$u(x,t) = f(x)g(t), \tag{6.1}$$
   - аддитивный, когда решение ищут в виде:
   $$u(x,t) = f(x) + g(t). \tag{6.2}$$

   Здесь $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — вообще говоря, произвольные функции одного аргумента. Выбранная предварительная форма решения (6.1) или (6.2) подставляется в уравнение, затем уравнение преобразуется

[14]Не следует путать с одноимённым методом из курса уравнений математической физики.

так, чтобы одна часть зависела только от $x$, а другая — только от $t$. Из того, что выражение, зависящее только от $x$, тождественно равно выражению, зависящему только от $t$, следует, что эти выражения равны постоянной. Таким образом, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения: в одно входит только неизвестная функция $f(\cdot)$, в другое — только $g(\cdot)$.

3. Метод автомодельных решений. Пусть $u(x,t) = t^\alpha \theta(\eta)$, где $\eta = xt^\beta$. Эта предварительная форма подставляется в уравнение[15], вычисляются нужные производные, затем постоянные $\alpha$ и $\beta$ подбираются так, чтобы степени $t$, не входящие в аргументы $\theta(\cdot)$ и её производных, сократились. Таким образом, получается обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\theta(\cdot)$.

Отметим, что метод бегущей волны обычно применим (то есть даёт нетривиальные решения) к любому уравнению с постоянными коэффициентами, а для уравнений с переменными коэффициентами обычно (не обязательно) не даёт нетривиальных решений. Два других названных метода обычно (не обязательно) применимы к уравнениям, содержащим не более трёх членов. Соответствующим примерам и контрпримерам будет посвящено несколько задач[16].

[15] В этой главе не будем обсуждать связь между инвариантностью уравнения относительно некоторых преобразований и существованием автомодельных решений, как обычно делается в литературе. Об инвариантных решениях и об автомодельных решениях как о частном случае инвариантных поговорим в главе XV.

[16] А именно, смотрите задачи с решениями №2–8 и задачи для самостоятельного решения №4–9.

## § 2. Задача о влиянии мгновенного сосредоточенного теплового источника

Рассмотрим нелинейную среду: в ней коэффициент теплопроводности зависит от температуры, а именно, $k(u) = k_0 u^\sigma$, $\sigma = \text{const} > 0$. Пусть удельная теплоёмкость $c = \text{const}$, плотность $\rho = \text{const}$. Здесь процесс теплопроводности описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \operatorname{div}\left(u^\sigma \nabla u\right),$$

где $a^2 = k_0/(\rho c) = \text{const}$.

Пусть в этой нелинейной среде в момент $t = 0$ в плоскости $x = 0$ мгновенно выделяется тепло в количестве на единицу площади $Q_0$. Тепловые возмущения будут распространяться симметрично в обе стороны от названной плоскости. Этот процесс моделирует следующая задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ u(x;0) = Q\delta(x), \end{cases}$$

где $Q = Q_0/(\rho c)$. Сходимость решения $u(x;t)$ к начальному распределению при $t \to 0$ понимается как слабая, то есть $\forall f(\cdot) \in C(\mathbf{R})$ выполняется $\lim\limits_{t\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) u(x;t)dx = Qf(0)$.

Исходя из физического смысла задачи, будем считать, что $u \to 0$ и $u^\sigma \partial u/\partial x \to 0$ при $|x| \to \infty$. Проинтегрируем уравнение почленно по $x$ по всей числовой прямой:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u dx = a^2 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

откуда вытекает закон сохранения:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u dx = \mathrm{const}\,\forall t \geqslant 0,$$

то есть полная внутренняя энергия системы постоянна. А с учётом начальных данных можем записать более определённое выражение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u dx = Q. \tag{6.3}$$

Исследуем автомодельное решение уравнения: пусть

$$u = t^{\alpha}\theta(\eta),$$

где $\eta = xt^{\beta}$, $\theta(\cdot)$ — функция одного аргумента, $\alpha$ и $\beta$ — пока произвольные постоянные. Вычислим нужные производные: во-первых,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha t^{\alpha-1}\theta(\eta) + t^{\alpha}\theta'(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial t} =$$
$$= \alpha t^{\alpha-1}\theta(\eta) + t^{\alpha}\theta'(\eta)\beta x t^{\beta-1} = t^{\alpha-1}(\alpha\theta(\eta) + \beta\eta\theta'(\eta)),$$

во-вторых,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = t^{\alpha}\theta'(\eta)\frac{\partial \eta}{\partial x} = t^{\alpha+\beta}\theta'(\eta),$$

следовательно,

$$u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x} = t^{\sigma\alpha+\alpha+\beta}\theta^{\sigma}(\eta)\theta'(\eta),$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = t^{\sigma\alpha+\alpha+\beta}\frac{d}{d\eta}\left(\theta^{\sigma}(\eta)\theta'(\eta)\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} =$$
$$= t^{\sigma\alpha+\alpha+2\beta}\left(\theta^{\sigma}(\eta)\theta'(\eta)\right)',$$

и уравнение можно привести к виду

$$t^{\alpha-1}(\alpha\theta(\eta)+\beta\eta\theta'(\eta)) = a^2 t^{\sigma\alpha+\alpha+2\beta}\left(\theta^\sigma(\eta)\theta'(\eta)\right)'.$$

Для того чтобы степени $t$, входящие в уравнение явно, сократились, наложим условие

$$\alpha - 1 = \sigma\alpha + \alpha + 2\beta.$$

Кроме того, выберем $\alpha$ и $\beta$ равными, чтобы в левой части уравнения была полная производная (по $\eta$). Таким образом,

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{\sigma+2},$$

и уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{\sigma+2}(\eta\theta)' = a^2(\theta^\sigma(\eta)\theta'(\eta))' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\tfrac{\eta\theta}{\sigma+2} = a^2\theta^\sigma(\eta)\theta'(\eta) + \mathrm{const}\,. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Учитывая поведение функции на бесконечности, заключаем, что постоянная интегрирования равна нулю, а значит,

$$\frac{d}{d\eta}\left(\theta^\sigma\right) = -\frac{\sigma\eta}{a^2(\sigma+2)}.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая особое решение $\theta = 0$, запишем решение (6.4) в виде

$$\theta(\eta) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma}{2a^2(\sigma+2)}(\eta_0^2-\eta^2)\right)^{1/\sigma}, & |\eta| < \eta_0; \\ 0, \ |\eta| \geqslant \eta_0, \end{cases}$$

где $\eta_0 = \mathrm{const} > 0$. А именно, эту величину можно определить следующим образом. Преобразуем левую часть (6.3):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{-1/(\sigma+2)}\theta\left(xt^{-1/(\sigma+2)}\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(\eta)d\eta = \int\limits_{-\eta_0}^{\eta_0} \theta(\eta)d\eta.$$

Значит, $\eta_0$ определяется уравнением

$$\int\limits_{-\eta_0}^{\eta_0} \theta(\eta) d\eta = Q, \tag{6.5}$$

которое можно свести к интегралам Эйлера. Таким образом,

$$u = \begin{cases} U(t)\left(1 - \left(\frac{x}{x_0(t)}\right)^2\right)^{1/\sigma}, \ |x| < x_0(t); \\ 0, \ |x| \geqslant x_0(t), \end{cases}$$

где

$$U(t) = \left(\frac{\sigma\eta_0^2}{2a^2(\sigma+2)}\right)^{1/\sigma} t^{-1/(\sigma+2)}, \ x_0(t) = \eta_0 t^{1/(\sigma+2)}.$$

Такое решение имеет фронт, соответствующий распространению тепловой волны: рис. 6.1.

Фронты тепловой волны отделяют область, где $u > 0$, от невозмущённой области ($u = 0$). Они движутся с конечной скоростью:

$$v(t) = \frac{dx_0}{dt} = \frac{\eta_0}{\sigma+2} t^{-(\sigma+1)/(\sigma+2)} = O^*\left(t^{-(\sigma+1)/(\sigma+2)}\right).$$

Таким образом, тепловые возмущения проникают в среду неограниченно далеко, но с замедлением.

Можно показать, что предельный переход при $\sigma \to 0$ в формулах для решения соответствует переходу к линейной среде, имеющей постоянный коэффициент теплопроводности:

$$u(x;t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

В линейной среде тепловые возмущения распространяются мгновенно — фронт волны отсутствует.

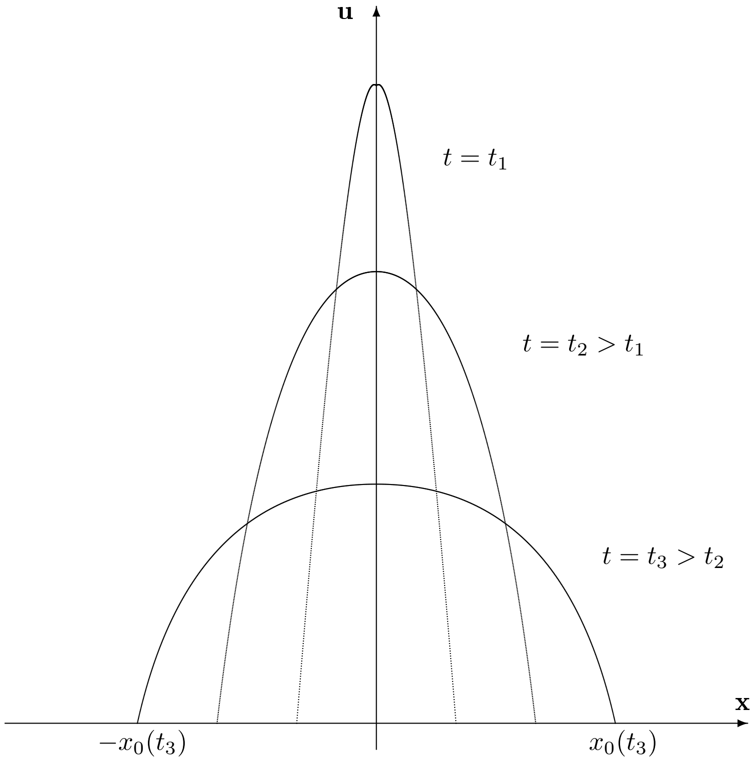


Рис. 6.1: Фронты тепловой волны (задача Коши).

Рассмотрим ещё одну задачу, иллюстрирующую распространение тепловых волн с конечной скоростью. Пусть нелинейная среда занимает полупространство $x > 0$ и нагревается на границе по степенному закону:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right), \ t > 0, \ x > 0; \\ u(x;0) = 0; \\ u(0;t) = u_0 t^{1/\sigma}. \end{cases} \tag{6.6}$$

Можно показать, что эта задача имеет решение

$$u = \begin{cases} u_0 t^{1/\sigma}\left(1 - \frac{x}{x_0(t)}\right)^{1/\sigma}, \ 0 \leqslant x < x_0(t); \\ 0, \ x \geqslant x_0(t), \end{cases} \tag{6.7}$$

где $x_0(t) = v_0 t$, $v_0 = \sqrt{a^2 u_0^\sigma/\sigma}$. Таким образом, от нагретой границы распространяется тепловая волна, фронт которой движется со скоростью $v_0$: рис. 6.2.

Заметим, что тепловой поток имеет вид

$$q = -k_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k_0 u_0^{\sigma+1}}{\sigma v_0} \left( t - \frac{x}{v_0} \right)^{1/\sigma}$$

и равен нулю при $x = v_0 t$.

## § 3. Пространственная локализация тепловых возмущений

Рассмотрим распространение тепловых возмущений в нелинейной среде с объёмным поглощением:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right) - pu, \ t > 0, \ x \in \mathbf{R}, \\ u(x,0) = Q\delta(x), \end{cases}$$

где $p = \mathrm{const} \geqslant 0$ — коэффициент поглощения. Поглощение энергии приводит к уменьшению внутренней энергии среды. Действительно, проинтегрировав уравнение по $x$ по всей числовой прямой, получим:

$$\frac{dI}{dt} = -pI,$$

где $I = \int_{-\infty}^{\infty} u dx$, $I(0) = Q$, откуда $I(t) = Qe^{-pt}$.

Положим $u = ve^{-pt}$, тогда

$$e^{p\sigma t} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( v^\sigma \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Введём переменную $\tau = \tau(t) = (1 - e^{-p\sigma t})/(p\sigma)$. Данная замена отображает множество $t \in \mathbf{R}_+$ на множество $\tau \in (0;\ 1/(p\sigma))$. Приходим к задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( v^\sigma \frac{\partial v}{\partial x} \right), \ 0 < \tau < \frac{1}{p\sigma}, \ x \in \mathbf{R}, \\ v(x,0) = Q\delta(x). \end{cases}$$

Она с точностью до обозначений совпадает с рассмотренной ранее задачей о распространении теплового возмущения в нелинейной среде без поглощения. Существенная разница только в том, что здесь интервал времени конечен. Таким образом, здесь

$$v(x,\tau) = \begin{cases} U(\tau)\left(1 - \frac{x^2}{x_0^2(\tau)}\right)^{1/\sigma}, & |x| < x_0(\tau), \\ 0, & |x| \geqslant x_0(\tau), \end{cases}$$

где $U(\tau) \sim \tau^{-\frac{1}{\sigma+2}}$, $x_0(\tau) \sim \tau^{\frac{1}{\sigma+2}}$, $u = ve^{-pt}$. Значит, $u = 0$ будет вне области $|x| < L(t)$, где

$$L(t) = L_m\left(1 - e^{-p\sigma t}\right)^{1/(\sigma+2)},\ L_m = \mathrm{const}\,.$$

Так как $\sup\limits_{t\geqslant 0} L(t) = L_m < \infty$, то тепловые возмущения могут проникнуть в среду только на конечную глубину: рис. 6.3.

Заметим, что эффект локализации тепла может быть полезен при осуществлении управляемого термоядерного синтеза.

Рассмотрим ещё один эффект — остановившуюся на конечное время тепловую волну. Поставим следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right),\ 0 < t < T < \infty,\ x > 0, \\ u(x,0) = A_0 T^{-1/\sigma}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{2/\sigma},\ x > 0, \\ u(0,t) = A_0(T-t)^{-1/\sigma},\ 0 < t < T, \end{cases} \tag{6.8}$$

где $A_0 = \mathrm{const} > 0$, $x_0 = \sqrt{2A_0^\sigma a^2(\sigma+2)/\sigma}$. Параметр $T$ называется временем обострения, так как $\lim\limits_{t\to T-0} |u(0,t)| = \infty$.

Можно показать, что эта задача имеет решение в разделяющихся переменных:

$$u(x,t) = \begin{cases} A_0(T-t)^{-1/\sigma}\left(1-\frac{x}{x_0}\right)^{2/\sigma}, & 0 \leqslant x < x_0, \\ 0, & x \geqslant x_0 \end{cases} \tag{6.9}$$

(при $t \in [0;\ T)$). Так как $u(x,t) = 0\ \forall x \geqslant x_0$, то неподвижный фронт возмущения $x = x_0$ отделяет нагретую среду от холодной: рис. 6.4.

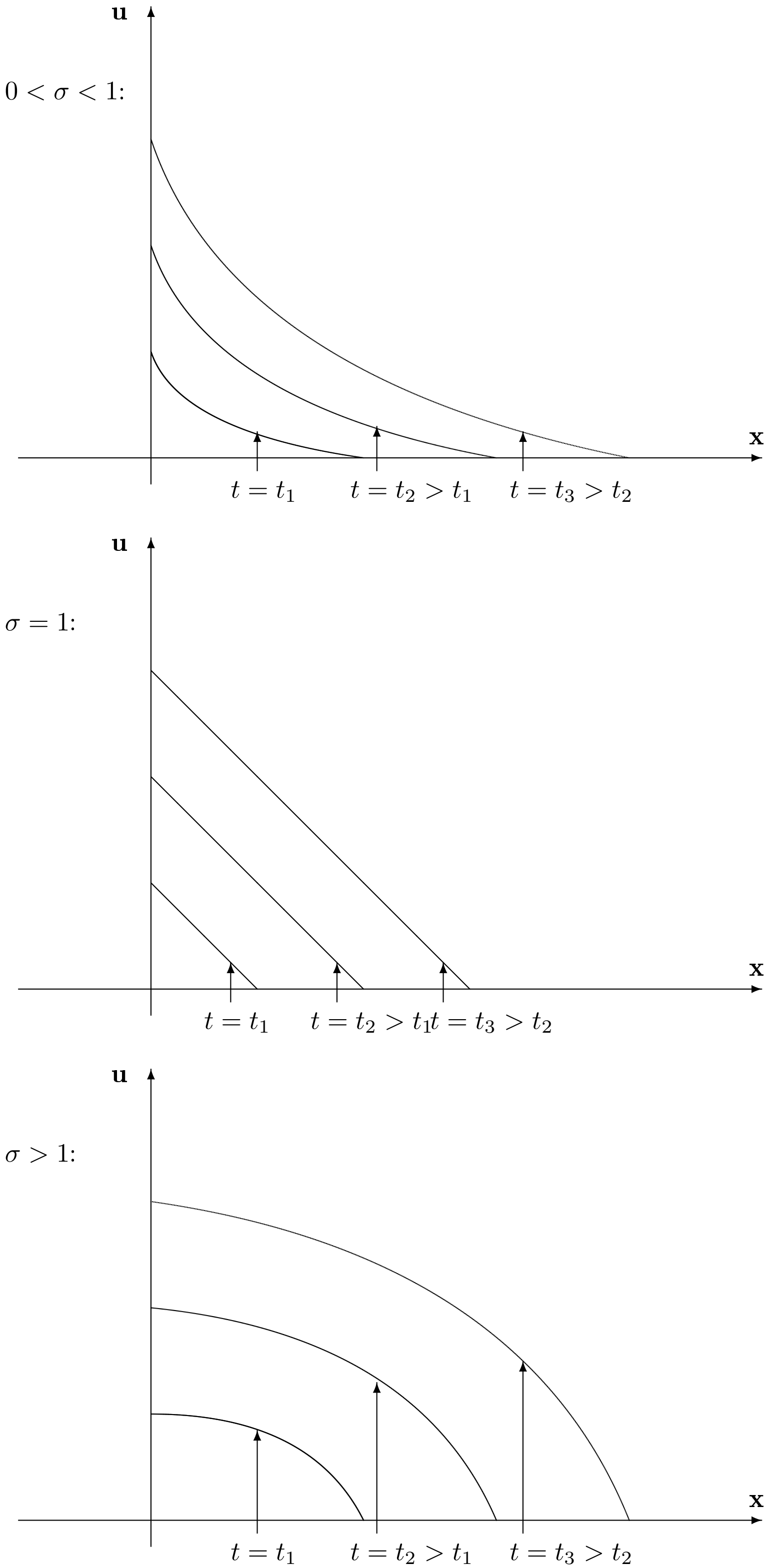


Рис. 6.2: Фронты тепловой волны (задача на луче).

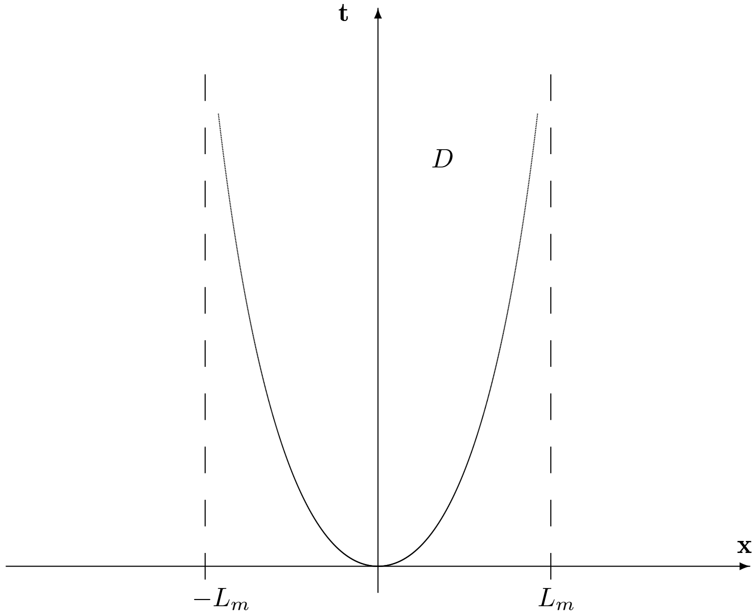


Рис. 6.3: Область тепловых возмущений $D$.

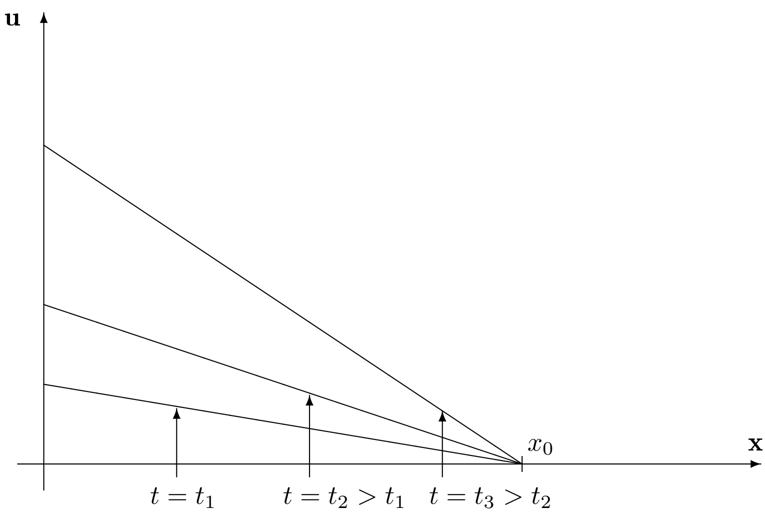


Рис. 6.4: Остановившаяся тепловая волна (случай $\sigma = 2$).

# Глава VII. Анализ уравнения Колмогорова–Петровского-Пискунова

Здесь был особой жизни опыт,
Особый дух, особый тон.
Здесь речь была как конский топот,
Как стук мечей, как копий звон.

*Н.А. Заболоцкий*

А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский и Н.С. Пискунов в 1937 году свели задачу вытеснения одного биологического вида другим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku(1-u),$$

где $x \in \mathbf{R}$, $t > 0$, $u(x;t) = N(x;t)/N_m \in [0;\ 1]$ — плотность особей популяции, $N(x;t)$ — количество особей при данных $x$ и $t$, $N_m$ — максимальное количество особей, которое может обеспечить среда, $k = \mathrm{const}$.

Пусть при $t = 0$

$$u = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x > b > a, \end{cases}$$

$u$ монотонно возрастает от 0 к 1 при $a \leqslant x \leqslant b$. (В предельном случае $a = b$ распределение переходит в функцию Хэвисайда.) Вследствие генерации и диффузии область плотностей, близких к единице, будет распространяться справа налево, увеличивая территорию, занятую доминантными особями. Таким образом, распространяется волна концентрации.

Предположим, что в переходной зоне, где $0 < u < 1$, будет стационарный профиль волны. Для его определения рассмотрим решение типа бегущей волны: $u(x,t) = \theta(z)$, $z = x + \sigma t$, где $\sigma = \text{const} > 0$ — скорость волны. Тогда для $\theta = \theta(z)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\sigma \frac{d\theta}{dz} = \frac{d^2\theta}{dz^2} + k\theta(1-\theta).$$

Дополним его условиями

$$\lim_{z\to-\infty} \theta = 0, \ \lim_{z\to\infty} \theta = 1, \ \lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{d\theta}{dz}\right| = 0. \tag{7.1}$$

Понизим порядок, перейдя к переменной $p = d\theta/dz$. Тогда

$$p\frac{dp}{d\theta} = \sigma p - k\theta(1-\theta),$$

откуда

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{\sigma p - k\theta(1-\theta)}{p}.$$

Это уравнение имеет особые точки $(0;\ 0)$ и $(1;\ 0)$. Интегральная кривая должна лежать в полосе $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ и не пересекать ось $\theta$ вне названной полосы (рис. 7.1).

Покажем, что такая интегральная кривая может существовать только при $\sigma \geqslant 2\sqrt{k}$. С одной стороны, при $\theta \to 0$ кривую можно аппроксимировать прямой $p = a\theta$, $a = \text{const} > 0$. С другой стороны, линеаризуем уравнение, пренебрегая квадратичным членом:

$$\frac{dp}{d\theta} \approx \frac{\sigma p - k\theta}{p}.$$

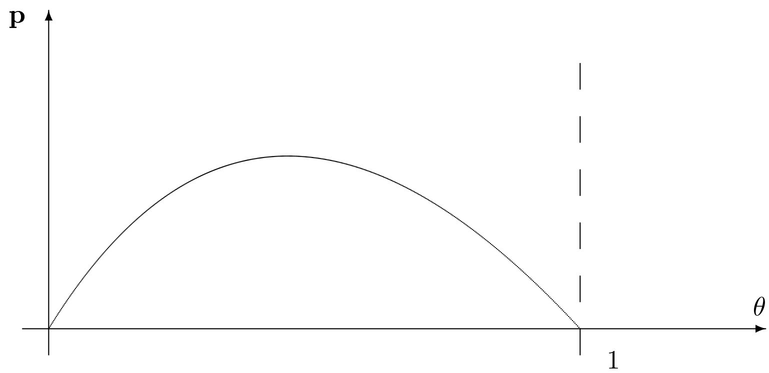


Рис. 7.1: Интегральная кривая $p = p(\theta)$.

Подставив сюда $p = a\theta$, получим: $a = \sigma - k/a \Leftrightarrow a^2 - \sigma a + k = 0$. Это уравнение имеет действительные решения $a$ тогда и только тогда, когда $\sigma^2 \geqslant 4k \Leftrightarrow \sigma \geqslant 2\sqrt{k}$.

Можно показать, что при $\sigma \in (0;\ 2\sqrt{k})$ интегральная кривая выйдет из полосы $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Теперь покажем, что при $\sigma \geqslant 2\sqrt{k}$ выполняются условия (7.1). Заметим, что для интегральной кривой имеют место представления $p = a\theta + o(\theta)$ при $\theta \to 0$ и $p = c(1-\theta) + o(1-\theta)$ при $\theta \to 1$, где $a = \mathrm{const} > 0$, $c = \mathrm{const} > 0$. Так как $p = d\theta/dz$, то

$$z - z_0 = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{p(\theta)}\ (0 < \theta_0 < 1).$$

Из этого равенства с учётом названных асимптотик получаем, что $\lim\limits_{\theta\to 0} z = -\infty$, $\lim\limits_{\theta\to 1} z = \infty$. Как показано Колмогоровым, Петровским и Пискуновым, волна, распространяющаяся с минимальной скоростью $\sigma = \sigma_0 = 2\sqrt{k}$, обладает свойством устойчивости. А именно, любой начальный профиль $u(x;0) = f(x)$ , удовлетворяющий условиям $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $f(\infty) = 1$, $f(-\infty) = 0$, $f'(x) \geqslant 0$, по истечении достаточно большого времени принимает форму стационарного профиля, имеющего скорость $\sigma_0$. Эта форма определяется уравнением

$$\sigma_0 \frac{d\theta}{dz} = \frac{d^2\theta}{dz^2} + k\theta(1-\theta)$$

с условиями (7.1). Аналитического решения этой задачи в общем случае не найдено — она решается численно. Отметим, однако, что при значении $\sigma = 5\sqrt{k/6} \approx 1,02\sigma_0$ решение задачи может быть найдено аналитически. Положим

$$w = \left(\frac{e^{\alpha z}}{1+e^{\alpha z}}\right)^{\nu} = \left(1+e^{-\alpha z}\right)^{-\nu}.$$

Тогда

$$\frac{dw}{dz} = \nu\alpha\left(1+e^{-\alpha z}\right)^{-\nu-1} e^{-\alpha z}.$$

Эта функция удовлетворяет условиям (7.1) при $\alpha > 0$, $\nu > 0$. Заметим, что $e^{-\alpha z} = w^{-1/\nu} - 1$, следовательно,

$$\frac{dw}{dz} = \alpha\nu\left(w^{-1/\nu}-1\right) w^{(\nu+1)/\nu} = -\alpha\nu w\left(w^{1/\nu}-1\right),$$

откуда

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \alpha^2\nu(\nu+1)w\left(w^{1/\nu}-1\right)\left(w^{1/\nu}-\frac{\nu}{\nu+1}\right).$$

Введём оператор $L = \sigma\frac{d}{dz} - \frac{d^2}{dz^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} &Lw = -\alpha\nu\sigma w(w^{1/\nu}-1)- \\ &-\alpha^2\nu(\nu+1)w\left(w^{1/\nu}-1\right)\left(w^{1/\nu}-\tfrac{\nu}{\nu+1}\right) = \\ &= -\alpha^2\nu(\nu+1)w\left(w^{1/\nu}-1\right)\left(w^{1/\nu}+A\right), \end{aligned}$$

где

$$A = \frac{\sigma}{\alpha(\nu+1)} - \frac{\nu}{\nu+1}.$$

Уравнение принимает вид

$$Lw = kw(1-w). \tag{7.2}$$

Рассмотрим подробнее частный случай. Пусть $A = 1 \Leftrightarrow \sigma = \alpha(2\nu + 1)$. Тогда (7.2) можно записать в виде

$$Lw \equiv \alpha^2\nu(\nu + 1)w(1 - w^{2/\nu}) = kw(1 - w).$$

Пусть $2/\nu = 1$, $\alpha^2\nu(\nu + 1) = k$, откуда $\nu = 2$, $\sigma = 5\alpha$, $k = 6\alpha^2$, то есть $\alpha = \sqrt{k/6}$, $\sigma = 5\sqrt{k/6}$, $\nu = 2$. Значит,

$$\theta(z) = w(z) = \left(1 + e^{-\sqrt{k/6}z}\right)^{-2}$$

будет решением задачи для $\theta(\cdot)$.

# Глава VIII. Многосолитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза

Ещё заря не встала над селом,
Ещё лежат в саду десятки теней,
Ещё блистает лунным серебром
Замёрзший мир деревьев и растений.

*Н.А. Заболоцкий*

В следующих двух главах обсудим методы неявной линеаризации, позволяющие при определённых условиях свести нелинейную задачу к линейной, и основы теории солитонов. Предварительно рассмотрим здесь, как построить одно- и двухсолитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза «вручную», и каковы их характерные особенности.

В 1965 году М. Крускал и М. Забуски в ходе численного эксперимента исследовали его решение, описывающее взаимодействие двух бегущих волн. Было замечено, что быстрая волна догоняет медленную, проходит сквозь неё, и затем они продолжают движение, сохранив скорость и форму. Подобный процесс взаимодействия волн напоминает упругое столкновение частиц. Поэтому такие уединённые волны получили название солитонов — слово, образованное от английского «solitary» (уединённый) и созвучное названиям многих элементарных частиц (протон, электрон и так далее).

Опишем солитон аналитически. Рассмотрим уравнение Кортевега–де Фриза с единичным коэффициентом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Положим

$$u = 12\frac{\partial^2 \ln F}{\partial x^2} = 12\left(\frac{F'_x}{F}\right)'_x = 12 \cdot \frac{FF''_{x^2} - {F'_x}^2}{F^2}. \qquad (8.1)$$

Вычислив нужные производные и подставив в уравнение, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\left(\frac{F'_x}{F}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(12 \cdot \frac{\left(F''_{x^2}F - {F'_x}^2\right)^2}{F^4}\right) +$$

$$+\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{F''_{x^2}F - {F'_x}^2}{F^2}\right) = 0.$$

Проинтегрируем уравнение по $x$, положив постоянную интегрирования равной нулю:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{F'_x}{F}\right) + 6 \cdot \frac{\left(F''_{x^2}F - {F'_x}^2\right)^2}{F^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{F''_{x^2}F - {F'_x}^2}{F^2}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$F^2\left(F''_{xt}F - F'_xF'_t\right) + 6\left(F''_{x^2}F - {F'_x}^2\right)^2 +$$

$$+F^4\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{F''_{x^2}}{F} - \left(\frac{F'_x}{F}\right)^2\right) = 0.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$\begin{aligned}&F^3F''_{xt}-F^2F'_xF'_t+6F^2{F''_{x^2}}^2+6{F'_x}^4-\\&-12F{F'_x}^2F''_{x^2}+F^3F^{IV}_{x^4}-4F^2F'_xF'''_{x^3}-3F^2{F''_{x^2}}^2+\\&+12F{F'_x}^2F''_{x^2}-6{F'_x}^4=0,\end{aligned}$$

что равносильно

$$F^3F''_{xt}-F^2F'_xF'_t+3F^2{F''_{x^2}}^2+F^3F^{IV}_{x^4}-4F^2F'_xF'''_{x^3}=0,$$

что, в свою очередь, равносильно

$$FF''_{xt}-F'_xF'_t+3{F''_{x^2}}^2+FF^{IV}_{x^4}-4F'_xF'''_{x^3}=0.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$\begin{aligned}&F\frac{\partial}{\partial x}\left(F'_t+F'''_{x^3}\right)-F'_x\left(F'_t+F'''_{x^3}\right)+\\&+3\left({F''_{x^2}}^2-F'_xF'''_{x^3}\right)=0.\end{aligned}\tag{8.2}$$

Подберём такую функцию $F$, чтобы каждое из выражений в скобках обратилось в нуль. Пусть $F=1+f$, $f=e^{-\theta}$, $\theta=\alpha(x-s)+\beta t$, тогда

$$F'_x=-\alpha e^{-\theta},\ F''_{x^2}=\alpha^2e^{-\theta},\ F'''_{x^3}=-\alpha^3e^{-\theta},\ F_t=-\beta e^{-\theta}.$$

Значит, должны выполняться равенства

$$\begin{cases}-\beta e^{-\theta}-\alpha^3e^{-\theta}=0;\\ \alpha^4e^{-2\theta}-(-\alpha)e^{-\theta}(-\alpha)^3e^{-\theta}=0.\end{cases}$$

Первое равносильно условию $\beta=-\alpha^3$, а второе является тождеством. Значит, $F=1+f=1+e^{-\alpha(x-s)+\alpha^3t}$, а следовательно,

$$u=12\left(\frac{F''_{x^2}}{F}-\left(\frac{F'_x}{F}\right)^2\right)=$$

$$=12\cdot\frac{(1+f)\alpha^2f-\alpha^2f^2}{(1+f)^2}=\frac{12\alpha^2f}{(1+f)^2},$$

то есть

$$u = 12\alpha^2 \left( \frac{1}{e^{\theta/2} + e^{-\theta/2}} \right) = \frac{3\alpha^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Пусть $A = 3\alpha^2$, $\frac{2}{\alpha} = \Delta$, $v = A/3 = \alpha^2$, тогда

$$u = A \operatorname{ch}^{-2} \left( \frac{x - s - vt}{\Delta} \right).$$

Таким образом, получено односолитонное решение, то есть решение, соответствующее уединённной волне, в которой «фаза» $s$ — координата максимума при $t = 0$. Эта волна однозначно определяется амплитудой $A$ и фазой $s$, и для такого решения используется обозначение $\mathrm{Sol}(A; s)$.

Построим теперь более сложное решение. Используем метод возмущений: пусть $F = 1 + \varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)} + \ldots$, где $\varepsilon$ — формальный параметр, полагаемый равным 1 после преобразования. Подставим это выражение в (8.2), пренебрегая членами большего порядка (позже поясним, почему это корректно):

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)}\right) \times \\
&\times \left( \varepsilon \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial t \partial x} + \varepsilon \frac{\partial^4 F^{(1)}}{\partial x^4} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial t \partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^4 F^{(2)}}{\partial x^4} \right) - \\
&- \left( \varepsilon \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \right) \times \\
&\times \left( \varepsilon \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) + \\
&+3 \left( \varepsilon \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2} \right)^2 - \\
&-3 \left( \varepsilon \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \right) \cdot \left( \varepsilon \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Раскроем скобки и применим метод неопределённых коэффициентов. Члены, пропорциональные первой и второй степеням $\varepsilon$, дадут соответственно следующие равенства:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}+\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right)=0; \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)+F^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}+\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right)- \\ -\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}+\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right)+3\left(\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2}\right)^2-3\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}=0. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое равенство этой системы и возьмём постоянную интегрирования равной нулю. Тогда второе можно упростить, и система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}+\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}=0; \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)= \\ =-3\left(\left(\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right). \end{cases} \tag{8.3}$$

Поясним, что мы рассматриваем лишь функции $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ и отбрасываем члены большего порядка, так как можно показать, что в уравнениях относительно $F^{(k)}$, аналогичных (8.3), правые части будут равны нулю при $k > 2$. Значит, эти функции можно взять нулевыми.

Пусть $F^{(1)} = f_1 + f_2$, где $f_k = e^{-\alpha_k(x-s_k)+\alpha_k^3 t}$, тогда первое уравнение системы (8.3) выполнено, так как оно линейно, и каждая функция $f_k$ ему удовлетворяет. Второе уравнение системы можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)=3\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)^2 f_1 f_2. \tag{8.4}$$

Будем искать $F^{(2)}$ в виде $F^{(2)} = Bf_1f_2$, $B = \mathrm{const}$. Легко показать, что

$$\begin{cases} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}=(\alpha_1^3+\alpha_2^3)Bf_1f_2, \\ \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}=-(\alpha_1+\alpha_2)^3 Bf_1f_2, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)=3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)^2 Bf_1f_2.$$

Подставим это выражение в (8.4):

$$3\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)^2Bf_1f_2=3\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)^2f_1f_2,$$

откуда

$$B=\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2+\alpha_1}\right)^2.$$

Таким образом, функция

$$F=1+f_1+f_2+\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2+\alpha_1}\right)^2f_1f_2$$

является точным решением уравнения (8.2).

Вернёмся к функции $u$: формулу (8.1) можно привести к виду

$$u=12\frac{\alpha_1^2f_1+\alpha_2^2f_2+2(\alpha_2-\alpha_1)^2f_1f_2+B(\alpha_2^2f_1^2f_2+\alpha_1^2f_1f_2^2)}{(1+f_1+f_2+Bf_1f_2)^2} \tag{8.5}$$

Это решение похоже на солитон, когда какая-то из функций $f_1$ и $f_2$ велика или мала:

1. пусть $f_2\to 0$, $f_1\approx 1$, тогда
$$u\to 12\frac{\alpha_1^2f_1+0}{(1+f_1)^2}=\frac{12\alpha_1^2f_1}{(1+f_1)^2}=\mathrm{Sol}(A_1;s_1);$$
2. пусть $f_2\to\infty$, $f_1\approx 1$, тогда
$$u=12\frac{\alpha_1^2f_1f_2^{-2}+\alpha_2^2f_2^{-1}+2(\alpha_2-\alpha_1)^2f_1f_2^{-1}+B(\alpha_2^2f_1^2f_2^{-1}+\alpha_1^2f_1)}{((1+f_1)f_2^{-1}+1+Bf_1)^2}\to 12\frac{B\alpha_1^2f_1}{(1+Bf_1)^2}.$$

Однако, $Bf_1=Be^{-\alpha_1(x-s_1)+\alpha_1^3t}=e^{-\alpha_1\left(x-s_1-\frac{\ln B}{\alpha_1}\right)+\alpha_1^3t}$, поэтому $u$ приближается к $\mathrm{Sol}\,(A_1,s_1+\ln B/\alpha_1)$ — солитону со сдвигом фазы.

При $f_1 \approx f_2$ солитоны взаимодействуют в соответствии с (8.5). Отбросим случаи, когда $f_1$ и $f_2$ обе малы или обе велики, так как в этих случаях $u \approx 0$. Действительно:

1. пусть $f_{1,2} \to 0$, тогда, очевидно, $u \to 0$;
2. пусть $f_{1,2} \to \infty$, тогда, положив $q_{1,2} = 1/f_{1,2}$, убедимся, что

$$u = 12\frac{\alpha_1^2 q_1^{-1} + \alpha_2^2 q_2^{-1} + 2(\alpha_2-\alpha_1)^2 q_1^{-1} q_2^{-1} + B\left(\alpha_2^2 q_1^{-2} q_2^{-1} + \alpha_1^2 q_1^{-1} q_2^{-2}\right)}{\left(1+q_1^{-1}+q_2^{-1}+Bq_1^{-1}q_2^{-1}\right)^2} =$$
$$= 12\frac{\alpha_1^2 q_1 q_2^2 + \alpha_2^2 q_1^2 q_2 + 2(\alpha_2-\alpha_1)^2 q_1 q_2 + B(\alpha_2^2 q_2 + \alpha_1^2 q_1)}{(B+q_1q_2+q_2+q_1)^2} \to 0.$$

Пусть для определённости $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, $s_1 > s_2$, так что быстрый солитон изначально находится левее медленного, догоняя его. При $t \to -\infty$ области взаимодействия нет (рис. 8.1). Взаимодействие происходит в окрестности точки $x = \frac{\alpha_2^2 s_1 - \alpha_1^2 s_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}$ в момент времени $t = \tau = \frac{s_1 - s_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}$. После взаимодействия снова образуются два солитона с теми же амплитудами и скоростями, но с другими фазами: быстрый получает дополнительный сдвиг вперёд на $\frac{1}{\alpha_2}\ln\left(\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right)^2$, а медленный — сдвиг назад на $\frac{1}{\alpha_1}\ln\left(\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right)^2$ (рис. 8.2).

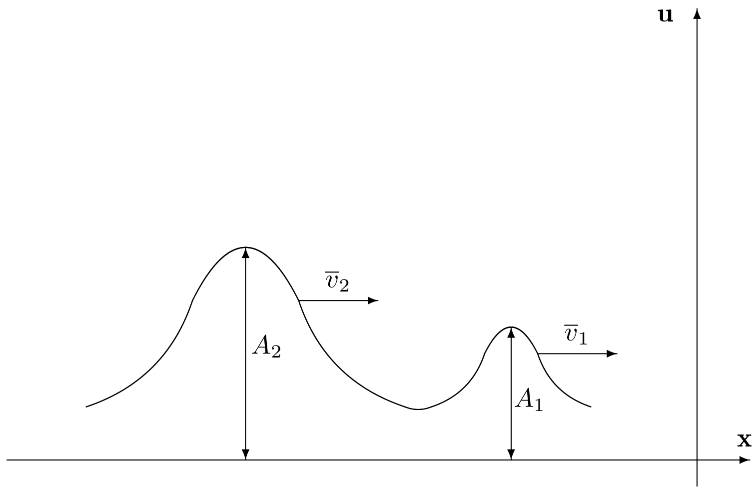


Рис. 8.1: Два солитона при $t \to -\infty$.

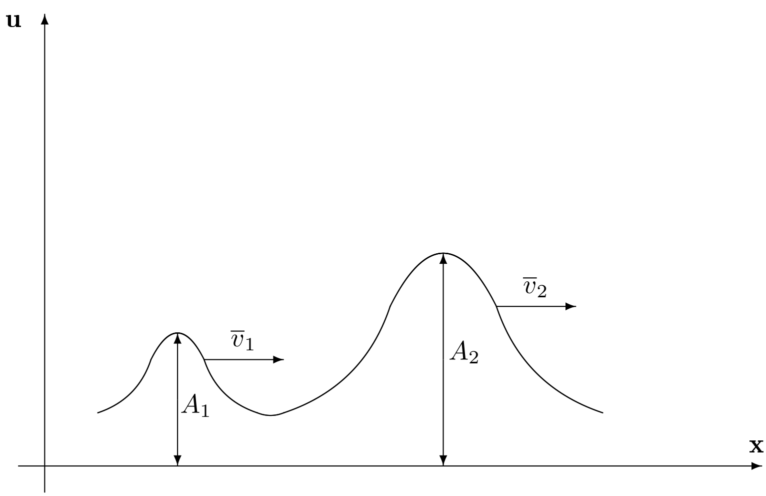


Рис. 8.2: Два солитона при $t \to \infty$.

# Глава IX. Методы неявной линеаризации

Поэзия сродни науке.
И в ней и радости, и муки
Мелькают быстрой чередой.
Совсем не для неё покой.

*В.А. Ильин*

Рассмотрим методы обратной задачи рассеяния, основанные на «неявной» линеаризации уравнения: вместо нелинейного уравнения изучается вспомогательная переопределённая система для новой переменной с коэффициентами, зависящими от той функции, которая была в роли неизвестной в исходном уравнении. При этом условие совместности системы приводит к исходному уравнению.

## § 1. Метод, основанный на парах Лакса

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F[u] \tag{9.1}$$

относительно функции $u(x;t)$, в котором правая часть зависит явно только от функции $u$ и её производных по $x$. Введём два вспомогательных линейных уравнения:

$$L\varphi = \lambda\varphi, \tag{9.2}$$

где $L$ — стационарное выражение[17], а $\lambda$ — спектральный параметр, и
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -M\varphi. \tag{9.3}$$
Система из уравнений (9.2) и (9.3) переопределена, следовательно, надо вывести условие совместности. Для этого продифференцируем (9.2) по $t$:
$$L'_t\varphi + L\varphi'_t = \lambda\varphi'_t.$$ [18]

С учётом (9.3) получим:
$$L'_t\varphi - LM\varphi = -\lambda M\varphi.$$
А так как $\lambda M\varphi = M\lambda\varphi = ML\varphi$, то приходим к условию
$$L'_t\varphi = LM\varphi - ML\varphi \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = [L; M]. \tag{9.4}$$
Говорят, что линейные операторы $L$ и $M$ образуют пару Лакса для уравнения (9.1), если условие (9.4) равносильно уравнению (9.1). Таким образом, пара Лакса позволяет свести анализ нелинейного уравнения к анализу системы более простых линейных уравнений. Отметим, что оператор $M$ определяется неоднозначно: его можно заменить на $M + p(t)$, где функция одного аргумента $p(\cdot)$ произвольна[19].

Рассмотрим два примера.

1. Уравнению Кортевега–де Фриза
$$u'_t + u'''_{x^3} - 6uu'_x = 0$$
соответствует пара Лакса
$$L = u - \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ M = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6u\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + p(t),$$ [20]

---

[17] То есть не содержащее явно операторов дифференцирования по времени.

[18] Выражение $L'_t$ определено и, вообще говоря, не равно нулю, так как коэффициенты оператора $L$ могут зависеть от $t$.

[19] То есть к оператору $M$ прибавляется оператор умножения на $p(t)$.

[20] Не следует путать операторы $\frac{\partial}{\partial x}$ (дифференцирование по $x$) и $\frac{\partial u}{\partial x}$ (умножение на производную $u$ по $x$).

а соответствующие линейные уравнения можно записать в виде

$$\varphi''_{x^2} + (\lambda - u)\varphi = 0;$$
$$\varphi'_t + 4\varphi'''_{x^3} - 6u\varphi'_x - 3u'_x\varphi + p(t)\varphi = 0.$$

Действительно, во-первых,

$$LM\varphi = -4\varphi^V_{x^5} + 10u\varphi'''_{x^3} + (15u'_x - p(t))\varphi''_{x^2} +$$
$$+(12u''_{x^2} - 6u^2)\varphi'_x + (3u'''_{x^3} - 3uu'_x + up(t))\varphi,$$

во-вторых,

$$ML\varphi = -4\varphi^V_{x^5} + 10u\varphi'''_{x^3} + (15u'_x - p(t))\varphi''_{x^2} +$$
$$+(12u''_{x^2} - 6u^2)\varphi'_x + (4u'''_{x^3} - 9uu'_x + up(t))\varphi,$$

где функция $\varphi$ произвольна. Следовательно,

$$[L; M] = -u'''_{x^3} + 6uu'_x,\ L'_t = u'_t.$$

Учитывая (9.4), получим уравнение Кортевега–де Фриза.

2. В линейных уравнениях (9.2) и (9.3) функция $\varphi$ может быть векторной. Уравенению sh–Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 4a \operatorname{sh} u$$

соответствует пара Лакса для векторной функции $\overline{\varphi} = (\varphi_1; \varphi_2)^T$ вида

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} + \frac{u'_x}{2} \\ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{u'_x}{2} & 0 \end{pmatrix},\ M = \frac{a}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & e^u \\ e^{-u} & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим более простой подход. Введём две системы линейных уравнений:

$$\varphi'_x = P\varphi \tag{9.5}$$

и

$$\varphi_t' = Q\varphi, \tag{9.6}$$

где $\varphi \in \mathbf{R}^n$, $P, Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Их правые части должны удовлетворять условию совместности. Чтобы найти его, продифференцируем (9.5) по $t$, (9.6) — по $x$, затем исключим $\varphi_{xt}''$, а $\varphi_x'$ и $\varphi_t'$ выразим из (9.5) и (9.6). Придём к равенству

$$P_t' - Q_x' + [P; Q] = 0.$$

Для заданной матрицы $P$ есть алгоритм нахождения $Q$.

Рассмотрим случай $n = 2$: $\overline{\varphi} = (\varphi_1; \varphi_2)^T$. Пусть (9.5) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} = -i\lambda\varphi_1 + f\varphi_2; \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} = g\varphi_1 + i\lambda\varphi_2, \end{cases} \tag{9.7}$$

где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — функции от $x$ и $t$. Систему (9.6) возьмём в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t} = A\varphi_1 + B\varphi_2; \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t} = C\varphi_1 + D\varphi_2, \end{cases} \tag{9.8}$$

где $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, $D(\cdot)$ — функции от $x$, $t$, $\lambda$, которые надо определить. Продифференцируем (9.7) по $t$, (9.8) — по $x$, затем исключим смешанные производные. Таким образом,

$$\begin{cases} A_x' = Cf - Bg; \\ B_x' + 2i\lambda B = f_t' - (A - D)f; \\ C_x' - 2i\lambda C = g_t' + (A - D)g; \\ -D_x' = Cf - Bg. \end{cases}$$

Для простоты возьмём $D = -A$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} A'_x = Cf - Bg; \\ B'_x + 2i\lambda B = f'_t - 2Af; \\ C'_x - 2i\lambda C = g'_t + 2Ag. \end{cases}$$

Общее решение этой системы в аналитическом виде получить не удаётся — будем искать частные решения в виде многочленов по $\lambda$.

Простейшие разложения, приводящие к нетривиальным результатам, — квадратичные: пусть

$$\begin{cases} A = A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0; \\ B = B_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_0; \\ C = C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0. \end{cases}$$

Подставим эти выражения в систему и сгруппируем члены с одинаковыми степенями $\lambda$:

$$\begin{cases} \lambda^2\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - C_2 f + B_2 g\right) + \lambda\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} - C_1 f + B_1 g\right) + \\ + \frac{\partial A_0}{\partial x} - C_0 f + B_0 g = 0; \\ 2i\lambda^3 B_2 + \lambda^2\left(\frac{\partial B_2}{\partial x} + 2iB_1 + 2A_2 f\right) + \\ + \lambda\left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + 2iB_0 + 2A_1 f\right) + \frac{\partial B_0}{\partial x} + 2A_0 f - \frac{\partial f}{\partial t} = 0; \\ -2i\lambda^3 C_2 + \lambda^2\left(\frac{\partial C_2}{\partial x} - 2iC_1 - 2A_2 g\right) + \\ + \lambda\left(\frac{\partial C_1}{\partial x} - 2iC_0 - 2A_1 g\right) + \frac{\partial C_0}{\partial x} - 2A_0 g - \frac{\partial g}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Равенства должны выполняться тождественно, следовательно, равны нулю коэффициенты при каждой степени $\lambda$. Из коэффициентов при $\lambda^3$ получим, что $B_2 = C_2 = 0$. Учитывая это, получим из коэффициентов при $\lambda^2$: $A_2 = a = \text{const}$, $B_1 = iaf$, $C_1 = iag$. Тогда из коэффициента при $\lambda$ в первом уравнении получим: $A_1 = \text{const}$. Ограничимся рассмотрением $A_1 = 0$. Из коэффициентов при $\lambda$ в двух других уравнениях найдём: $B_0 = -af'_x/2$, $C_0 = ag'_x/2$. Из свободного члена в первом уравнении, проинтегрировав его и взяв нулевую постоянную интегрирования, заключим, что

$A_0 = afg/2$. Условие равенства нулю свободных членов двух других уравнений запишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = -\dfrac{a}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + af^2 g; \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = \dfrac{a}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} - afg^2. \end{cases} \tag{9.9}$$

Подставив полученное в уравнение (9.8), придём к следующему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t} = a\left(\lambda^2 + \dfrac{fg}{2}\right)\varphi_1 + a\left(i\lambda f - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\varphi_2; \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t} = a\left(i\lambda g + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)\varphi_1 - a\left(\lambda^2 + \dfrac{fg}{2}\right)\varphi_2. \end{cases} \tag{9.10}$$

Таким образом, две системы — (9.7) и (9.8) (то есть (9.10)) — совместны, если функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ удовлетворяют (9.9).

В частности, при $g = -k\overline{f}$ ($k = \text{const} \in \mathbf{R}$), $a = 2i$ оба уравнения (9.9) переходят в нелинейное уравнение Шрёдингера:

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2k|f|^2 f.$$

Аналогично можно задать другие многочлены по $\lambda$ и определить соответствующие линейные системы, порождающие нелинейные эволюционные уравнения.

## § 2. Метод, основанный на интегральных уравнениях

Для анализа нелинейного уравнения рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение

$$K(x;y) = F(x;y) + \int\limits_x^\infty K(x;z)N(x;z;y)dz \ (y \geqslant x), \tag{9.11}$$

называемое уравнением Гельфанда–Левитана–Марченко, где $F(\cdot)$ и $N(\cdot)$ — заданные функции, $K(\cdot)$ — искомая. Введём оператор $A_x$ по правилу

$$A_x f = \begin{cases} \int_x^\infty f(z)N(x;z;y)dz, & y \geqslant x, \\ 0, & y < x. \end{cases}$$

Будем предполагать, что при любой $N(\cdot)$ существует непрерывный оператор $(I - A_x)^{-1}$.

В следующей главе обсудим так называемый метод обратной задачи рассеяния для решения задачи Коши для нелинейных уравнений, а сначала рассмотрим здесь алгоритм построения нелинейного уравнения, к которому применим этот метод. Алгоритм состоит из следующих этапов.

1. Выбирается конкретное интегральное уравнение: задаётся связь между $N(\cdot)$ и $F(\cdot)$.

2. Задаются два подходящих линейных дифференциальных уравнения (обыкновенных или с частными производными) для $F(\cdot)$:

$$L_m F = 0, \ m = \overline{1;2} \tag{9.12}$$

3. Функция $K(\cdot)$ связана с $F(\cdot)$ интегральным уравнением, которое можно записать в виде

$$(I - A_x)K = F.$$

Применим операторы $L_m$ к этому уравнению:

$$L_m(I-A_x)K = L_mF \equiv 0 \Leftrightarrow (I-A_x)L_mK = -R_mK,$$

где $R_m = [L_m; I - A_x]$. При этом (9.11) и (9.12) должны быть выбраны так, чтобы $R_m$ можно было представить в виде $R_mK = (I - A_x)M_mK$, где $M_mK$ — нелинейный функционал от $K$. А так как оператор $(I - A_x)$ обратим, то приходим к уравнению

$$L_mK = M_mK. \tag{9.13}$$

Таким образом, каждое решение (9.11) является и решением нелинейных дифференциальных уравнений (9.13). Обычно наибольший интерес представляют частные случаи или следствия одного из уравнений (9.13).

Рассмотрим, например, следующее уравнение:

$$K(x;y) = F(x;y) + \int\limits_x^\infty K(x;z)F(z;y)dz$$

(подразумевается, что функции $F(\cdot)$ и $K(\cdot)$ зависят и от параметра $t$). Отметим, что имеют место следующие тождества:

$$\begin{cases} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int\limits_x^\infty K(x;z)F(z;y)dz = \\ = \int\limits_x^\infty F(z;y)\frac{\partial^n}{\partial x^n}K(x;z)dz + A_n; \\ \int\limits_x^\infty K(x;z)\frac{\partial^n}{\partial x^n}F(z;y)dz = \\ = (-1)^n \int\limits_x^\infty F(z;y)\frac{\partial^n}{\partial z^n}K(x;z)dz + B_n, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} A_1 = -K(x;x)F(x;y), \\ A_n = \frac{\partial A_{n-1}}{\partial x} - F(x;y)\left[\frac{\partial^{n-1}K(x;z)}{\partial x^{n-1}}\right]\Big|_{z=x}, \\ B_1 = -K(x;x)F(x;y), \\ B_2 = -K(x;x)\frac{\partial F(x;y)}{\partial x} + F(x;y)\left[\frac{\partial K(x;z)}{\partial z}\right]\Big|_{z=x}, \dots \end{cases}$$

Следовательно,

$$A_1 - B_1 = 0,\ A_2 - B_2 = -2F(x;y)\frac{\partial K(x;x)}{\partial x}.$$

Введём оператор

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

и такую функцию $F(x;y)$, что $L_1 F = 0$. Применим $L_1$ к исходному уравнению. Таким образом,

$$L_1 K(x;y) = L_1 \int\limits_x^\infty K(x;z)F(z;y)dz,$$

то есть

$$L_1 K(x;y) = \int\limits_x^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x;z)F(z;y)dz -$$

$$- \int\limits_x^\infty K(x;z)\frac{\partial^2}{\partial y^2}F(z;y)dz + A_2.$$

Учитывая выражение для $A_2$, получим:

$$L_1 K(x;y) = \int\limits_x^\infty F(z;y)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)K(x;z)dz -$$

$$-2F(x;y)\frac{d}{dx}K(x;x),$$

что равносильно

$$(I - A_x)\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) K(x;y) + 2\frac{d}{dx}K(x;x)K(x;y)\right] = 0,$$

откуда, учитывая обратимость оператора $(I - A_x)$, придём к уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) K(x;y) - u(x)K(x;y) = 0,$$

где

$$u(x) = -2\frac{d}{dx}K(x;x).$$

Потребуем теперь, чтобы $F(\cdot)$ удовлетворяла уравнению $L_2 F = 0$, где

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3.$$

Применим $L_2$ к исходному уравнению:

$$L_2 K(x;y) = L_2 \int\limits_x^\infty K(x;z)F(z;y)dz.$$

Рассуждая по аналогии со случаем, когда рассматривался оператор $L_1$, получим:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 K - 3u\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) K = 0.$$

На характеристике $y = x$ это уравнение после дифференцирования по $x$ перейдёт в уравнение Кортевега–де Фриза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Таким образом, любая функция $F(\cdot)$, удовлетворяющая условиям $L_1 F = L_2 F = 0$ и достаточно быстро убывающая при $|x| \to \infty$, порождает решение уравнения Кортевега–де Фриза.

# Глава X. Методы неявной линеаризации (продолжение)

Когда вдали угаснет свет дневной
И в чёрной мгле, склоняющейся к хатам,
Всё небо заиграет надо мной,
Как колоссальный движущийся атом, —

В который раз томит меня мечта,
Что где-то там, в другом углу вселенной,
Такой же сад, и та же темнота,
И те же звёзды в красоте нетленной.

*Н.А. Заболоцкий*

## § 1. Решение задачи Коши методом обратной задачи рассеяния

Обсудим применение метода обратной задачи рассеяния[21] для задачи Коши для уравнения, допускающего пару Лакса (или другую «неявную» линеаризацию), на примере задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0; \\ u\big|_{t=0} = f(x). \end{cases} \tag{10.1}$$

[21] Основные идеи и терминология метода пришли из квантовой физики.

Введём вспомогательное уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (\lambda - f(x))\varphi = 0 \tag{10.2}$$

(стационарное уравнение Шрёдингера). Пусть функция $f(\cdot)$, называемая потенциалом, удовлетворяет следующим условиям: во-первых, $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, во-вторых, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)f(x)dx$ сходится.

Рассмотрим задачу на собственные значения для (10.2). Могут быть собственные значения двух видов:

1. $\lambda_n = -\kappa_n^2$, $n = \overline{1;N}$ (дискретный спектр),
2. $\lambda = k^2$, $k \in \mathbf{R}$ (непрерывный спектр).

Известно, что при $\min f(x) < \lambda < 0$ уравнение имеет дискретный спектр, а при $f(x) < 0 < \lambda$ — непрерывный.

Пусть $\lambda_n = -\kappa_n^2$ — дискретный спектр собственных значений, причём $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N < 0$, а $\varphi_n = \varphi_n(x)$ — соответствующие собственные функции, которые обращаются в 0 при $|x| \to \infty$ и квадратично суммируемы. Они определены с точностью до постоянного множителя. Если фиксировать собственную функцию её асимптотикой вида $\varphi_n \sim e^{\kappa_n x}$ при $x \to -\infty$, то главный член асимптотики $\varphi_n$ при $x \to \infty$ будет иметь вид $\varphi_n \sim c_n e^{-\kappa_n x}$. Собственная функция $\varphi_n$ имеет $(n-1)$ нулей, причём $c_n = (-1)^{n-1}|c_n|$.

Для непрерывного спектра $\lambda = k^2$ функция $\varphi(\cdot)$ при $|x| \to \infty$ определяется линейной комбинацией $e^{\pm ikx}$. Условия

$$\begin{cases} \varphi \sim e^{-ikx} & \text{при } x \to -\infty, \\ \varphi \sim a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} & \text{при } x \to \infty \end{cases}$$

и уравнение (10.2) позволяют однозначно определить функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$. Заметим, что $|a|^2 - |b|^2 = 1$ при любых $k$. Если говорить о физическом смысле, то слагаемое $a(k)e^{-ikx}$ соответствует прошедшей волне, а $b(k)e^{ikx}$ — отражённой. Поэтому величина $r(k) = b(k)/a(k)$ называется коэффициентом отражения.

Совокупность величин

$$S = \{\kappa_n,\ c_n,\ r(k)\ (n = \overline{1, N})\}$$

называется данными рассеяния.

Цель прямой задачи рассеяния — определить $S$ по заданному потенциалу $f(\cdot)$. Данные рассеяния полностью определяют спектр задачи на собственные значения для (10.2).

Отметим, что для восстановления $a$ по $f$ используются формулы

$$|a(k)| = \frac{1}{\sqrt{1 - |r(k)|^2}},$$
$$\arg a(k) = \frac{1}{i}\sum_{n=1}^{N}\frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} - \frac{1}{\pi}\mathrm{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|a(s)|}{s-k}ds,$$

при этом $i\kappa_n$ — нули функции $a(\cdot)$, которая аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$.

Цель обратной задачи рассеяния — определить $f(\cdot)$ по $S$. Известны следующие результаты: потенциал $f(\cdot)$ можно вычислить по формуле

$$f(x) = -2\frac{d}{dx}K(x, x),$$

где $K(\cdot)$ — решение уравнения

$$K(x, y) + \Phi(x + y) + \int\limits_{x}^{\infty} K(x, z)\Phi(z + y)\,dz = 0,$$

в котором

$$\Phi(p) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{ia'(i\kappa_n)} e^{-\kappa_n p} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ikp} dk.$$

Перейдём к обсуждению задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (10.1). Пусть $f(x) < 0$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, причём интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)\, f(x) dx$ сходится.

Выделим следующие этапы решения.

1. Рассмотрим прямую задачу рассеняия:
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (\lambda - f(x))\, \varphi = 0.$$
Это уравнение возникает при подставновке начального профиля (то есть функции $f(\cdot)$) в первое уравнение пары Лакса для уравнения Кортевега–де Фриза (то есть $L\varphi = \lambda\varphi$)[22]. Из этой задачи находятся данные рассения $S$.

2. При $t > 0$ в нестационарном уравнении пары Лакса[23], то есть в уравнении вида
$$\varphi'_t + 4\varphi'''_{x^3} - 6u\varphi'_x - 3u'_x\varphi + p(t)\varphi = 0 \qquad (10.3)$$
вместо начального профиля $f(x)$ должна стоять функция $u = u(x, t)$. В соответствующей задаче на собственные значения $\lambda$ не меняются (они не зависят от $t$), но меняются собственные функции. Для непрерывного спектра асимптотика имеет вид:
$$\begin{cases} \varphi \sim e^{-ikx} & \text{при } x \to -\infty, \\ \varphi \sim a(k,t)e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx} & \text{при } x \to \infty. \end{cases}$$
Подставим первую асимптотику в (10.3) и учтём, что $\lim\limits_{x\to-\infty} u = 0$. Получим, что $p(t) = -4ik^3 =$

[22] Напомним, что для уравнения Кортевега–де Фриза $L = u - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

[23] Напомним, что имеется в виду уравнение $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -M\varphi$.

const. Теперь рассмотрим (10.3), учитывая найденную функцию $p(\cdot)$ и условие $\lim\limits_{x\to\infty} u = 0$:

$$\varphi'_t + 4\varphi'''_{x^3} - 4ik^3\varphi = 0. \tag{10.4}$$

Подставляя сюда асимптотику $\varphi(\cdot)$ при $x \to \infty$, группируя слагаемые, пропорциональные $e^{-ikx}$ и $e^{ikx}$ и применяя метод неопределённых коэффициентов, приходим к уравнениям

$$\begin{cases} a'_t = 0, \\ b'_t - 8ik^3 b = 0, \end{cases}$$

откуда $a(k;t) = a(k;0)$, $b(k;t) = b(k;0)e^{8ik^3t}$, а следовательно,

$$r(k,t) = \frac{b(k,t)}{a(k,t)} = r(k,0)e^{8ik^3t}.$$

Аналогично определяются асимптотики собственных функций для дискретного спектра (при $k = i\kappa_n$) с использованием (10.4).

Таким образом, получаем зависимость данных рассеяния от времени:

$$S(t) = \Big\{\kappa_n,\ c_n(t) = c_n(0)e^{8\kappa_n^3 t},$$
$$r(k,t) = r(k,0)e^{8ik^3t}\ (n = \overline{1,N})\Big\}.$$

3. Учитывая найденные данные рассеяния $S(t)$, введём функцию

$$\Phi(p;t) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(k,0)e^{i(8k^3t+kp)}dk + \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n(0)}{ia'(i\kappa_n)} e^{8\kappa_n^3 t - \kappa_n p}.$$

Чтобы восстановить функцию $u(\cdot)$ по $S(t)$, надо решить уравнение

$$K(x,y,t)+\Phi(x+y,t)+\int\limits_x^\infty K(x;z;t)\Phi(z+y,t)dz=0. \tag{10.5}$$

Тогда решение задачи Коши можно выразить формулой

$$u(x,t)=-2\frac{d}{dx}K(x,x,t).$$

## § 2. $N$-солитонное решение уравнения Кортевега–де Фриза

Построим точное решение уравнения Кортевега–де Фриза в случае безотражательных потенциалов, что соответствует $r(k;t)=0$. Воспользуемся уравнением (10.5). Полагая $r(k,0)=0$, получим

$$\Phi(p,t)=\sum_{n=1}^N\gamma_n e^{-\kappa_n p+8\kappa_n^3 t},\ \ \gamma_n=\frac{c_n(0)}{ia'(i\kappa_n)}>0.$$

Уравнение примет вид

$$K(x,y,t)+\sum_{n=1}^N g_n(t)e^{-\kappa_n(x+y)}+$$
$$+\sum_{n=1}^N g_n(t)e^{-\kappa_n y}\int\limits_x^\infty e^{-\kappa_n z}K(x,z,t)dz=0,$$

где $g_n(t)=\gamma_n e^{8\kappa_n^3 t}$.

Решение ищется в виде

$$K(x,y,t)=\sum_{n=1}^N e^{-\kappa_n y}K_n(x,t). \tag{10.6}$$

Подставив это выражение в уравнение и проинтегрировав, получим

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-\kappa_n y} K_n(x,t) + \sum_{n=1}^{N} g_n(t) e^{-\kappa_n(x+y)} + \\ + \sum_{n=1}^{N} g_n(t) e^{-\kappa_n y} \sum_{m=1}^{N} K_m(x,t) \frac{e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}}{\kappa_n+\kappa_m} = 0.$$

Это равенство можно записать в виде $\sum_{n=1}^{N} \psi_n(x,t) e^{-\kappa_n y} = 0$ $(\forall y)$, откуда $\psi_n(x,t) = 0$, $n = \overline{1;N}$, то есть

$$K_n(x,t) + g_n(t) \sum_{m=1}^{N} \frac{e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}}{\kappa_n+\kappa_m} K_m(x,t) = -g_n(t) e^{-\kappa_n x}. \tag{10.7}$$

По правилу Крамера,

$$K_n(x,t) = \frac{\det A^{(n)}(x,t)}{\det A(x,t)}, \tag{10.8}$$

где $A(x,t)$ — матрица с элементами $A_{n,m}(x,t)$ вида

$$A_{n,m}(x,t) = \delta_{nm} + \frac{g_n(t) e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}}{\kappa_n+\kappa_m} = \delta_{nm} + \frac{\gamma_n e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x + 8\kappa_n^3 t}}{\kappa_n+\kappa_m},$$

а матрица $A^{(n)}(x,t)$ получена из $A(x,t)$ путём замены $n$-го столбца на правую часть системы (10.7). Подставив (10.8) в (10.6), получим

$$K(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N} e^{-\kappa_n y} \frac{\det A^{(n)}(x,t)}{\det A(x,t)}.$$

Положив $y = x$, приходим к равенству

$$K(x,x,t) = \frac{1}{\det A(x,t)} \sum_{n=1}^{N} e^{-\kappa_n x} \det A^{(n)}(x,t) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \ln \det A(x,t).$$

Следовательно

$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det A(x,t).$$

Это решение содержит $2N$ свободных параметров $(\kappa_n;\ \gamma_n)$ и называется $N$-солитонным решением.

Например, при $N = 1$ будет $A(x,t) \in \mathbf{R}^{1\times 1}$, причём $A_{1,1}(x,t) = 1 + \gamma e^{-2\kappa x + 8\kappa^3 t}/(2\kappa)$, откуда

$$u(x,t) = -\frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2\left(\kappa(x - 4\kappa^2 t) + \xi_0\right)},\ \xi_0 = \frac{1}{2\kappa}\ln\frac{\gamma}{2\kappa},$$

то есть $u(x;t)$ представляет собой уединённую бегущую волну, движущуюся со скоростью $v = 4\kappa^2$.

В общем случае имеет место асимптотика при $t \to \pm\infty$ вида

$$u(x,t) \approx -2\sum_{n=1}^{N}\frac{\kappa_n^2}{\operatorname{ch}^2\left(\kappa_n(x - v_n t) + \xi_n^{\pm}\right)},$$

где $v_n = 4\kappa_n^2$, $\xi_n^{\pm} = \mathrm{const}$. Таким образом, при $|t| \to \infty$ $N$-солитонное решение распадается на $N$ солитонов, причём солитоны с большей амплитудой движутся с большей скоростью. Поэтому при $t \to -\infty$ или $t \to +\infty$ они расположены соответственно по убыванию или по возрастанию амплитуд и скоростей.

Устойчивость солитонов по отношению к изменению формы позволила специалистам по волоконной оптике предложить использование нелинейных эффектов для подавления дисперсии и получения коротких солитонных импульсов в оптических линиях связи, что даёт увеличение скорости передачи информации на несколько порядков.

Решения–солитоны обнаружены и у многих других уравнений математической физики.

# Глава XI. Анализ локальной и глобальной разрешимости

Золотыми крыльями взмахнув,<br>
Улетают в ночь бронзовые львы,<br>
Путь держа на ясную луну,<br>
Что взошла над серебром Невы.<br>
И вцепившись в гриву, как в мечту,<br>
Дерзкую мечту, ту, которой жив,<br>
Петербургских облаков пастух<br>
Я лечу, считая этажи.

*А.Я. Розенбаум*

В анализе решений нелинейных дифференциальных уравнений важную роль играют вопросы локальной и глобальной по времени разрешимости. А именно, выясняются достаточные условия для того, чтобы решение задачи существовало глобально по времени и для того, чтобы решение разрушалось, то есть существовало локально, но не глобально. При этом во втором случае желательно оценить время существования решения. Разрушение решения за конечное время может как иметь непосредственную физическую интерпретацию (например, пробой полупроводника), так и характеризовать границы применимости модели.

## § 1. Справочный материал

Напомним нужные сведения из функционального анализа.

Будем считать в этой главе, что $\Omega$ — ограниченная область в $\mathbf{R}^N$ с достаточно гладкой границей, а именно, пусть $\partial\Omega \in C^{(2;\delta)}$, $\delta \in (0;1]$[24].

Введём следующие множества:

- $C_0^\infty(\Omega)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на $\Omega$, имеющих компактный носитель, то есть множество $\operatorname{supp} f \equiv \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$;
- $W^{l;p}(\Omega)$ — множество функций из $L_p(\Omega)$, имеющих все обобщённые производные до порядка $l$ включительно, интегрируемые со степенью $p$; в этом пространстве введена норма
$$\|u\|_{W^{l;p}(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{m=0}^{l} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_N=m} \left|\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}\right|^p dx\right)^{1/p};$$
- $W_0^{l;p}(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства $W^{l;p}(\Omega)$;
- $H^l(\Omega) = W^{l;2}(\Omega)$, в частности, $H^1(\Omega) = W^{1;2}(\Omega)$ — в этом пространстве будет норма
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}}; \tag{11.1}$$
- $H_0^1(\Omega) = W_0^{1;2}(\Omega)$, то есть замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $H^1(\Omega)$.

**Определение.** *Говорят, что нормированное пространство $X$ вложено в нормированное пространство*

[24]То есть $\partial\Omega$ в окрестности любой своей точки может быть представлена локальными координатами так, что функции, осуществляющие параметризацию, два раза непрерывно дифференцируемы, причём все их производные второго порядка принадлежат классу Гёльдера с показателем $\delta$. Аналогично можно рассмотреть классы $C^{(m;\delta)}$.

*$Y$, если $X \subset Y$, причём существует такая постоянная $C$, что $\|u\|_Y \leqslant C\|u\|_X$ $\forall u \in X$.*

**Теорема вложения С.Л. Соболева**[25] *Пусть $\Omega$ — ограниченное открытое подмножество $\boldsymbol{R}^N$ с границей $\partial\Omega \in C^{(l-1;\delta)}$, $\delta \in (0;1]$, $l \in \boldsymbol{N}$. Пусть $p \geqslant 1$. Тогда при $N > lp$ имеет место вложение $W^{l;p}(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, где $q \leqslant Np/(N-lp)$. Утверждение остаётся в силе и для пространства $W_0^{l;p}(\Omega)$ вместо $W^{l;p}(\Omega)$.*

Для дальнейших рассуждений особенно интересно пространство $H_0^1(\Omega)$. В нём введена норма

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)},$$

эквивалентная норме (11.1)[26].

Таким образом, $H_0^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ (имеется в виду вложение) при $q \leqslant 6$ (в случае $N = 3$) для ограниченных областей $\Omega$ с достаточно гладкой границей.

Обозначим через $C_q$ наилучшую постоянную вложения $H_0^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$, то есть $C_q = \inf\{C : \ \|w\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \ \forall w \in H_0^1(\Omega)\}$.

## § 2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \mu(t)u^3 = 0; \\ u(x;0) = u_0(x) \in H_0^1(\Omega); \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{11.2}$$

где $x \in \Omega$, $\Omega$ — ограниченное подмножество $\mathbf{R}^3$ с границей $\partial\Omega \in C^{(2;\delta)}$, $\delta \in (0;1]$ , $t \geqslant 0$, $\mu(\cdot) \in C[0;\infty)$, причём $\mu(t) > 0 \forall t$.

[25] Здесь приведена сокращённая формулировка теоремы. Полная дана, например, в [17, с. 320].

[26] Эквивалентность этих норм следует из теоремы вложения.

Такая задача может описывать потенциал $u$ в полупроводниковой среде, занимающей область $\Omega$. Будет показано, что можно так подобрать параметры задачи (начальное условие $u_0(\cdot)$ и коэффициент $\mu(\cdot)$), чтобы:

- произошёл пробой, то есть некоторая норма потенциала стала бесконечной[27] за конечное время;
- норма потенциала была определена и ограничена на всём луче $t \in [0; \infty)$ — пробоя не произошло.

Обобщённым решением задачи (11.2) будем называть такой элемент $u$ пространства $X_T = C^1\left[0; T; H_0^1(\Omega)\right)$[28], что

$$\int\limits_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \mu(t)u^3 \right) w dx = 0 \qquad (11.3)$$

для всех $w(\cdot) \in H_0^1(\Omega)$ и для всех $t \in [0; T)$.

**Теорема 1.** *Существует такое значение $T > 0$ (возможно, бесконечное), что существует единственное решение задачи (11.2) из класса $X_T$. При этом если величина $T$ конечна*[29]*, то $\lim\limits_{t \to T-} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \infty$.*

Доказательство теоремы основано на принципе сжимающих отображений.

Величина $T$, а значит, и класс $X_T$, в котором задача разрешима, зависит от параметров задачи. Основная цель исследования — опрелить, является ли $T$ конечной или бесконечной, а в первом случае — оценить её сверху и снизу.

Очевидно, при тривиальных начальных данных единственным решением будет $u = 0$. В дальнейшем будем считать, что $u_0 \neq 0$.

[27] Применив к потенциалу, зависящему от $x$ и $t$, норму, соответствующую только простанственным переменным, получим функцию, зависящую от времени.

[28] Имеется в виду пространство функций от $x$ и $t$, которые принадлежат классу $C^1[0; T)$ как функции времени и являются элементами пространства $H_0^1(\Omega)$ при любом фиксированном $t$.

[29] То есть точная верхняя грань множества возможных $T$.

Введём функционалы энергии (являющиеся функциями только от времени): $\Phi = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}$, $W = \|u'_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u'_t\|^2_{L_2(\Omega)}$, то есть $\Phi = \|u\|^2_{W^{1;2}(\Omega)}$, $W = \|u'_t\|^2_{W^{1;2}(\Omega)}$.

Подставляя в (11.3) $w = u$ и $w = u'_t$ и интегрируя по частям, получим соответственно первое энергетическое тождество

$$\Phi'(t) = 2\mu(t)\|u\|^4_{L_4(\Omega)}$$

и второе энергетическое тождество

$$W(t) = \frac{\mu(t)}{4}\frac{d}{dt}\|u\|^4_{L_4(\Omega)}.$$

Нижний индекс 0 будет означать, что величина рассматривается при $t = 0$. Величину $\Phi_0$ будем считать известной, поскольку она, как видно из определения величины $\Phi$, однозначно выражается через $u_0$. Очевидно, $\Phi_0 > 0$.

Учитывая теорему вложения, можем записать следующие неравенства:

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant (C_2^2 + 1)\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

откуда видно, что

$$\frac{\sqrt{\Phi}}{\sqrt{C_2^2 + 1}} \leqslant \|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \sqrt{\Phi},$$

а значит, $\|u\|_{H^1_0(\Omega)}$ принимает конечные значения тогда и только тогда, когда принимает конечные значения $\Phi$. Поэтому вопрос о том, на каком промежутке времени определена величина $\|u\|_{H^1_0(\Omega)}$, сводится к нахождению области определения $\Phi$.

## § 3. Нижняя оценка времени существования решения

**Теорема 2.** *Если*

$$\int\limits_0^\infty \mu(t)dt \leqslant \frac{1}{2C_4^4\Phi_0},$$

*то решение (11.2) не разрушается, причём его норма в* $H_0^1(\Omega)$ *ограничена глобально по времени. В противном случае, решение существует, по крайней мере, при* $t < T_1$*, где* $T_1$ *— корень уравнения*[30]

$$\int\limits_0^{T_1} \mu(t)dt = \frac{1}{2C_4^4\Phi_0}.$$

Оценим сверху правую часть первого энергетического тождества с помощью теоремы вложения:

$$\Phi'(t) = 2\mu\|u\|^4_{L_4(\Omega)} \leqslant 2\mu C_4^4\|\nabla u\|^4_{L_2(\Omega)} \leqslant 2\mu C_4^4\Phi^2,$$

откуда получим[31]:

$$\Phi^{-2}\Phi'(t) \leqslant 2C_4^4\mu(t).$$

Проинтегрируем это неравенство почленно:

$$-\Phi^{-1}\Big|_0^t \leqslant 2C_4^4\int\limits_0^t \mu(\tau)d\tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi(t) \leqslant \left(\Phi_0^{-1} - 2C_4^4\int\limits_0^t \mu(\tau)d\tau\right)^{-1}.$$

---

[30] Этот корень единственный, так как первообразная $\mu(\cdot)$ возрастает.

[31] Это корректно, так как $\Phi_0 > 0$, а в силу первого энергетического тождества, $\Phi'(t) \geqslant 0$, а значит, $\Phi(t) \geqslant \Phi_0 > 0 \forall t$.

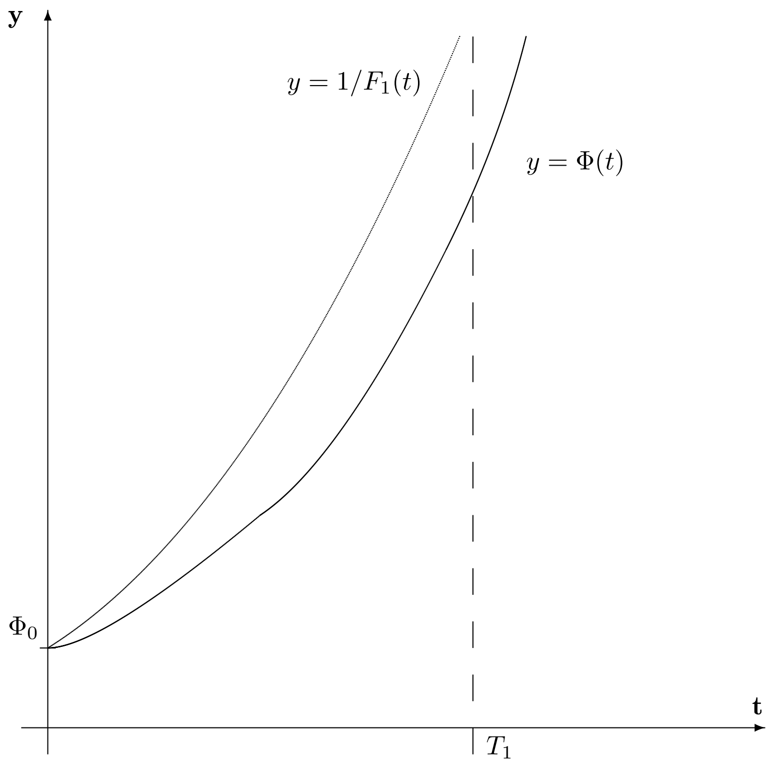


Рис. 11.1: Верхняя оценка $\Phi(t)$ (случай 1).

Таким образом, $\Phi(t) \leqslant 1/F_1(t)$, где функция $F_1(\cdot)$ строго положительна в окрестности нуля и достигает нулевого значения при $t = T_1$, где $T_1$ (если существует) определяется уравнением

$$\int\limits_0^{T_1} \mu(t)dt = \frac{1}{2C_4^4\Phi_0}$$

(рис. 11.1).

Возможен и случай, когда интеграл $\int_0^\infty \mu(\tau)d\tau$ сходится к числу, не превышающему $(2C_4^4\Phi_0)^{-1}$. Тогда уравнение для $T_1$ не имеет конечного решения, и $F_1(t)$ принимает конечные положительные значения на всём луче $[0;\infty)$. А следовательно, $\Phi(t) \leqslant \overline{\Phi}\ \forall t \geqslant 0$, где $\overline{\Phi} =$

$\left(\Phi_0^{-1} - 2C_4^4 \int_0^\infty \mu(\tau)d\tau\right)^{-1}$ (рис. 11.2).

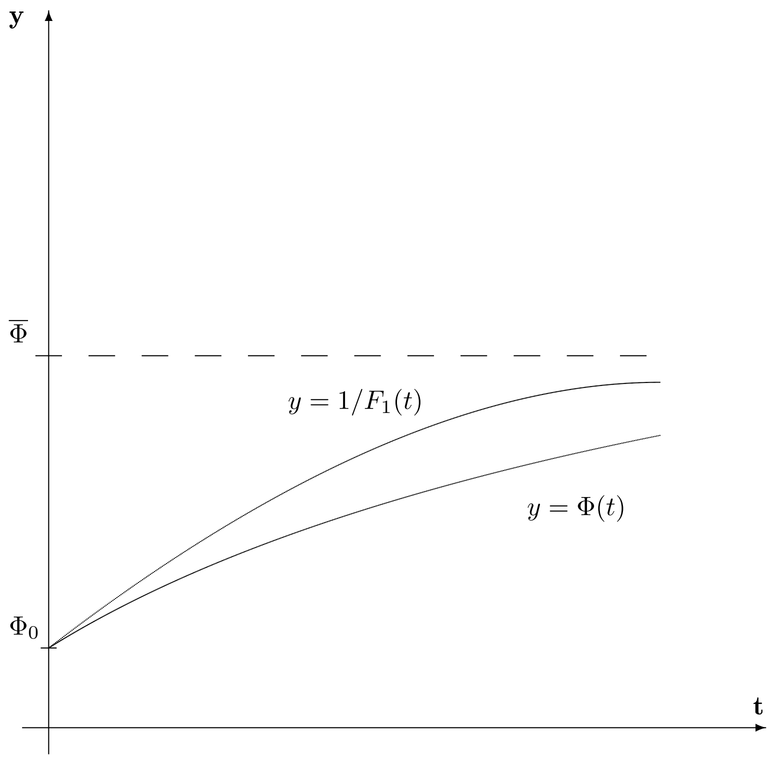


Рис. 11.2: Верхняя оценка $\Phi(t)$ (случай 2).

Таким образом, функция $\Phi(t)$ ограничена сверху конечными значениями на промежутке $[0; T_1)$ (если существует $T_1$) или на луче $[0; \infty)$ (в противном случае). Это гарантирует существование решения задачи соответственно на названном полуинтервале или луче. **Теорема доказана.**

## § 4. Верхняя оценка времени существования решения

**Лемма.** *Имеет место неравенство* $\Phi'^2 \leqslant 4\Phi W$.

Утверждение следует из неравенств Коши–Буняковского–Шварца.

**Теорема 3.** *Предположим дополнительно, что* $\mu(\cdot) \in C^1[0;\infty)$, *а уравнение*

$$\int\limits_0^t \mu(\tau)d\tau = \frac{\Phi_0}{2\|u_0\|^4_{L_4(\Omega)}}$$

*имеет положительный корень*[32] $t = T_2$. *Тогда решение задачи существует при* $t \in [0;T)$, *где* $T \leqslant T_2$, *то есть глобальная по времени разрешимость отсутствует.*

Выразим $\|u\|^4_{L_4(\Omega)}$ из первого энергетического равенства и подставим во второе:

$$W = \frac{\mu}{8}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Phi'}{\mu}\right).$$

Тогда неравенство из леммы можно преобразовать следующим образом:

$$\Phi'^2 \leqslant 4\Phi W = \frac{\mu\Phi}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Phi'}{\mu}\right),$$

что равносильно неравенству

$$\Phi\Phi'' - 2\Phi'^2 - \frac{\mu'}{\mu}\Phi\Phi' \geqslant 0.$$

Положив $\Phi = z^{-1}$, после упрощений[33] получим:

$$z'' \leqslant \frac{\mu' z'}{\mu} \Leftrightarrow \left(\frac{z'}{\mu}\right)' \leqslant 0.$$

Проинтегрировав почленно, запишем неравенство в виде

$$z' \leqslant \frac{z_0'\mu}{\mu_0}.$$

---

[32] Уравнение имеет не более одного корня, так как первообразная $\mu(\cdot)$ возрастает.

[33] При исследовании многих подобных задач дифференциальное неравенство второго порядка $\Phi\Phi'' - (1+\alpha)\Phi'^2 + \ldots \geqslant 0$, где $\alpha > 0$, а многоточие означает выражение, не содержащее второй производной, можно упростить с помощью замены $\Phi = z^{-1/\alpha}$.

Ещё раз проинтегрируем:

$$z - z_0 \leqslant \frac{z_0'}{\mu_0} \int\limits_0^t \mu(\tau) d\tau.$$

Вернёмся к переменной $\Phi$. Так как $z = \Phi^{-1}$, то $z_0' = -\Phi_0^{-2}\Phi_0'$, что с учётом первого энергетического тождества даёт $z_0' = -\Phi_0^{-2} \cdot 2\mu_0 \|u_0\|^4_{L_4(\Omega)} < 0$. Следовательно,

$$\Phi^{-1} - \Phi_0^{-1} \leqslant -2\Phi_0^{-2} \|u_0\|^4_{L_4(\Omega)} \int\limits_0^t \mu(\tau) d\tau,$$

что равносильно

$$\Phi \geqslant \left( \Phi_0^{-1} - 2\Phi_0^{-2} \|u_0\|^4_{L_4(\Omega)} \int\limits_0^t \mu(\tau) d\tau \right)^{-1}.$$

Таким образом, $\Phi(t) \geqslant 1/F_2(t)$, где функция $F_2(\cdot)$ строго положительна в окрестности нуля и достигает нулевого значения в момент $t = T_2$, определяемый уравнением

$$\int\limits_0^t \mu(\tau) d\tau = \frac{\Phi_0}{2\|u_0\|^4_{L_4(\Omega)}}.$$

Значит, $\Phi(t)$ (если определена) ограничена снизу конечными значениями на промежутке $[0; T_2)$, следовательно, она обращается в бесконечность не позже момента $t = T_2$ (рис. 11.3). Таким образом, решение задачи существует при $t \in [0; T)$, где $T \leqslant T_2$. **Теорема доказана.**

Сделаем несколько замечаний.

- Теоремы 2 и 3 не противоречат друг другу, так как величины $T_1$ и $T_2$, определённые в них, удовлетво-

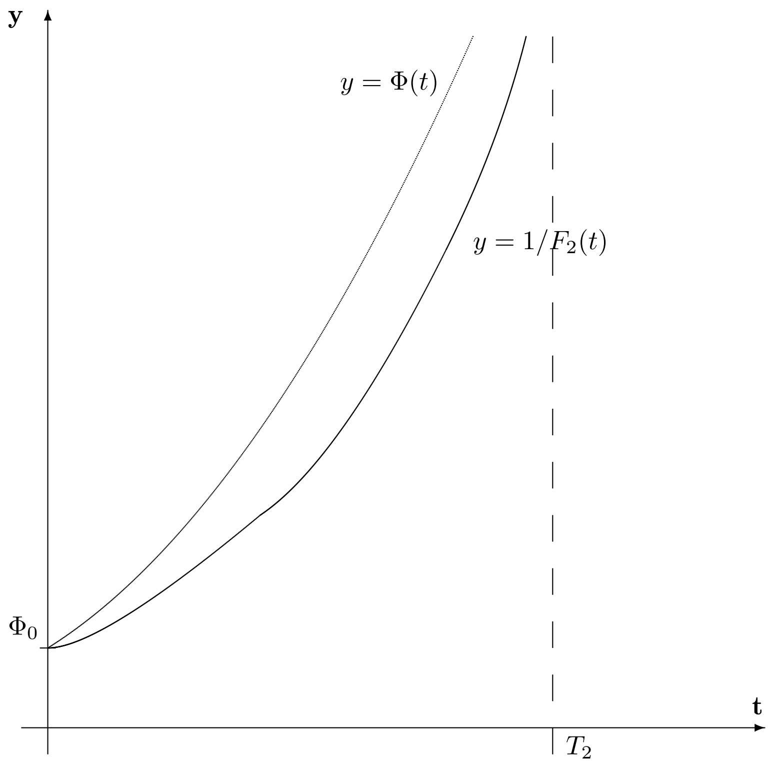


Рис. 11.3: Нижняя оценка $\Phi(t)$.

ряют условию $T_1 \leqslant T_2$ (если существуют). Действительно, функция $\omega(t) = \int_0^t \mu(\tau)d\tau$ является строго возрастающей функцией и принимает значения $A_1 = (2C_4^4\Phi_0)^{-1}$ и $A_2 = \left(2\|u_0\|_{L_4(\Omega)}^4\right)^{-1}\Phi_0$ соответственно при $t = T_1$ и $t = T_2$. Из теоремы вложения следует, что $\|u_0\|_{L_4(\Omega)}^4 \leqslant C_4^4\Phi_0^2$, что равносильно сооношению $A_1 \leqslant A_2$. Следовательно, и $T_1 \leqslant T_2$.

Таким образом, возможны три случая: $M \leqslant A_1$, $A_1 < M \leqslant A_2$ или $M > A_2$ (в третьем случае не исключается $M = \infty$), где $M = \int_0^\infty \mu(\tau)d\tau$. В соответствии с теоремами 2 и 3, можно сказать, что в первом случае решение существует глобально по времени, в третьем — разрушается, а во втором — нет ответа на вопрос, разрушается ли оно, но гарантируется его существование на промежутке $t \in [0; T_1)$.

- Интересен вопрос о том, насколько точны сделанные оценки. Рассмотрим семейство начальных данных $u_0(x) = kv(x)$, где $v(\cdot)$ — фиксированный элемент пространства $H_0^1(\Omega)$, а $k$ — положительный числовой параметр. Предположим дополнительно, что $\inf\limits_{t \geqslant 0} \mu(t) = m > 0$. Заметим, что

$$A_1 = \frac{1}{2C_4^4 \Phi_0} = \frac{1}{2C_4^4 k^2 \|v\|^2_{W^{1;2}(\Omega)}} = O(k^{-2})$$

при $k \to \infty$. Аналогично можно показать, что $A_2 = O(k^{-2})$. А так как $\int_0^{T_{1;2}} \mu(\tau) d\tau \geqslant mT_{1;2}$, то и $T_{1;2} = O(k^{-2})$. Значит, во-первых, при достаточно больших по норме начальных данных должно происходить разрушение решения, причём при увеличении этой нормы время разрушения стремится к нулю как $O(k^{-2})$, во-вторых, и длина промежутка $[T_1; T_2]$, содержащего момент разрушения решения, должна стремиться к нулю как $O(k^{-2})$.

# Глава XII. Исследование асимптотики решения задачи Коши

Катится река под уклон —
Озеро встретила.
Сколько же воды утекло
За полстолетия…
*А.Я. Розенбаум*

Для понимания качественного поведения решения нелинейных уравнений большую роль играют асимптотические методы. В книге [44] проведено обширное исследование асимптотик решений задач Коши при стремлении времени к бесконечности. Рассмотрены задачи для нелинейного уравнения теплопроводности, уравнений Кортевега–де Фриза–Бюргерса, Ландау–Гинзбурга, уравнений соболевского типа и других. Предложена следующая классификация нелинейностей, входящих в уравнение:

- асимптотически слабая (суперкритическая),
- критическая,
- асимптотически сильная (субкритическая)[34].

Такая классификация основана на сравнении нелинейного уравнения с соответствующим линейным: поясним

[34] Для второго и третьего случаев рассматривается и более детальная классификация

эту идею на примере. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u^\rho = 0; \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Здесь $t \geqslant 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, а функция $u_0(\cdot)$ гладкая и достаточно быстро стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Решение задачи Коши для соответствующего линейного уравнения $u'_t - \Delta u = 0$ имеет порядок стремления к нулю на бесконечности $N/2$, то есть $u(x;t) = O^*(t^{-N/2})$ при $t \to \infty$. При таком поведении решения для нелинейности должно выполняться соотношение $u^\rho = O^*(t^{-N\rho/2})$. Теперь заметим, что при $\rho > 1+2/N$ нелинейная часть стремится к нулю быстрее линейной при стремлении времени к бесконечности. Поэтому ожидаемо, что в таком случае асимптотическое поведение решения будет примерно таким же, как в случае линейного уравнения. Показатель $\rho > 1+2/N$ называется суперкритическим, а нелинейность — асимптотически слабой. А в случаях $\rho = 1 + 2/N$ и $\rho < 1 + 2/N$ нелинейности называются соответственно критической и субкритической. В критическом случае линейная и нелинейная части «уравновешиваются», а в субкритическом асимптотика определяется нелинейностью.

## § 1. Асимптотика решения задачи Коши (случай разных коэффициентов при $\Delta u$ и при $u$)

Рассмотрим задачу Коши для уравнения, которое может использоваться для моделирования фильтрации жидкости в пористой среде с трещинами и для исследования динамики потенциала в полупроводнике:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \alpha \Delta u + \beta u^3 = 0; \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{12.1}$$

Здесь $t \geqslant 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, $N \geqslant 2$, $\alpha = \text{const} > 0$, $\beta = \text{const} \neq 0$.

Будем обозначать через $\hat{v}$ образ Фурье (по пространственным переменным) функции $v$. Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} u_0(\cdot) \in L_1(\mathbf{R}^N), \\ |\hat{u}_0(p)| \leqslant \varepsilon M^{-s}(p), \\ |\hat{u}_0(p_1) - \hat{u}_0(p_2)| \leqslant \varepsilon |p_1 - p_2|^\sigma M^{-s}(p_2), \end{cases} \tag{12.2}$$

где $p$ — произвольный вектор из $\mathbf{R}^N$, $p_1$ и $p_2$ удовлетворяют неравенству $|p_1 - p_2| \leqslant 1$, $\sigma \in (0;\ 1]$, $s > N$, $|p| = \sqrt{\sum_{k=1}^N p_k^2}$, $M(p) = \max(1; |p|)$, а $\varepsilon$ — достаточно малый параметр (позже уточним, что подразумевается под его малостью).

Формально применим к задаче Коши преобразование Фурье и проинтегрируем от 0 до $t$ с учётом начальных данных:

$$\begin{gathered} \hat{u}(p,t) = \\ = \hat{u}_0(p) e^{-K(p)t} + \frac{\beta}{1+|p|^2} \int\limits_0^t e^{-K(p)(t-\tau)}\, d\tau \times \\ \times \int\limits_{\mathbf{R}^N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \hat{u}(p-q,\tau) \hat{u}(q-r,\tau) \hat{u}(r,\tau)\, dq\, dr, \end{gathered} \tag{12.3}$$

где $K(p) = \alpha |p|^2 / (1 + |p|^2)$. Таким образом, получаем уравнение вида $\hat{u} = \mathcal{A}\hat{u}$. Обобщённым решением задачи Коши будем считать прообраз Фурье $u$ решения этого уравнения. При этом от $u$ требуется непрерывность по всем аргументам, ограниченность и принадлежность классу $L_1(\mathbf{R}^N)$ при всех фиксированных $t$. Существование и единственность решения можно обосновать с помощью принципа сжимающих отображений.

**Теорема 1.** *При сделанных предположениях имеет место следующая асимптотика при* $t \to \infty$*:*

$$u = A_0 e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha t}} \cdot (4\pi\alpha t)^{-N/2} + O\left(t^{-N/2-\theta}\right)$$

*равномерно по* $\frac{1}{\sqrt{t}}x$*, где* $A_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}^N} u(x,t)dx$*,* $\theta = \mathrm{const} > 0$.

Пусть $\hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} v_n(p,t)$, $\hat{u_0}(p) = \varepsilon v(p)$. Подставим эти выражения в полученное выше интегральное уравнение (12.3) и воспользуемся методом неопределённых коэффициентов:

$$\begin{gathered}
v_0(p,t) = v(p)e^{-K(p)t};\\
v_n(p,t) = \tfrac{\beta}{1+|p|^2} \int\limits_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \times\\
\times \int\limits_{\mathbf{R}^N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} v_{j-1}(p-q,\tau) v_{k-j}(q-r,\tau) v_{n-k}(r,\tau)\, dq\, dr\\
\forall n \in \mathbf{N}.
\end{gathered} \tag{12.4}$$

Кроме того, обращая преобразование Фурье, получим следующие равенства:

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} e^{i(p;x)} \hat{u}(p,t)\, dp =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} e^{i(p;x)} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{2n+1} v_n(p,t)\, dp =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{2n+1} \psi_n(x,t),$$

где $\psi_n = \mathcal{F}^{-1}[v_n]$. Корректность этого перехода обеспечивается тем, что ряд сходится абсолютно и равномерно на $\mathbf{R}^N \times [0;\ \infty)$ при достаточно малых $\varepsilon$. Таким образом, задача сводится к выявлению асимптотики $\psi_n(x;t)$. Представим эту функцию в виде $\sum_{k=1}^4 I_k$, где

$$I_1 = \int\limits_{|p|\geqslant 1} e^{i(p;x)} v_n(p,t)\, dp;$$

$$I_2 = \varphi_n \int\limits_{|p|\leqslant 1} e^{i(p;x)-K(p)t}\, dp;$$

$$I_3 = \int\limits_{|p|\leqslant 1} e^{i(p;x)-K(p)t}\, (v_n(0,t) - \varphi_n)\ dp;$$

$$I_4 = \int\limits_{|p|\leqslant 1} e^{i(p;x)-K(p)t} \Big(v_n(p,t) e^{K(p)t} - v_n(0,t)\Big)\ dp;$$

$$\varphi_n = \lim_{t\to\infty} v_n(0,t).$$

Доказаны леммы, позволяющие оценить подынтегральные выражения. Показано, что $I_2$ даёт главный член и члены большего порядка малости, а остальные интегралы полностью уходят в остаток. Переходя к переменной $u$, получим требуемую оценку.

Кроме того,

$$A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} \varphi_n = \lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n+1} v_n(0,t) =$$
$$= \lim_{t\to\infty} \hat{u}(0,t) = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{\mathbf{R}^N} u(x,t)\, dx.$$

При этом $A_0$ можно выразить не через $u(x;t)$ с помощью так называемой диаграммной техники [46].

Кроме того, можно показать, что такая же асимптотика имеет место для аналогичных задач с нелинейностями вида $\sum_{k=3}^{n} \beta_k u^k$, $\beta_k = \mathrm{const}$.

Указанный подход можно распространить на другие соболевские уравнения. Исследованы аналогичные задачи для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + b\Delta u - au + (\chi + (\lambda; \nabla))\, u^{\upsilon} = 0, \quad (12.5)$$

где $x \in \mathbf{R}^N$, $t \geqslant 0$, $a,\ b,\ \chi \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}^N$, причём

- при $\upsilon = 2$ наложено условие $N \in \mathbf{N}$, $0 < a < b < 3a$,
- а при $\upsilon = 3$ — условие $N \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $0 \leqslant a < b$.

Показано, что в обоих случаях имеет место асимптотика

$$u(x,t) = (4\pi(b-a))^{-N/2} A_0 t^{-N/2} e^{-at} e^{-\frac{|x|^2}{4(b-a)t}} + \\ + O\left(t^{-N/2-\theta} e^{-at}\right),\ \theta > 0.$$

Поясним, что условия (12.2) определяют нетривиальное множество начальных данных. Например, им удовлетворяют функции вида

$$u_0(x) = A \left(\frac{B}{\pi}\right)^N \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{x_k^2 + B^2},$$

где $B \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $A$ достаточно мало по модулю. Во-первых, $\exists \|u_0\|_{L_1} = |A|$. Во-вторых, с помощью леммы Жордана можно показать, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip_k x_k}(x_k^2 + B^2)^{-1} dx_k = \pi e^{-B|p_k|}/B$, а следовательно, $\hat{u}_0(p) = Ae^{-B(|p_1|+\ldots+|p_N|)}$. Легко показать, что второе условие выполняется. В-третьих, можно выбором $A$ добиться того, чтобы выполнялось и третье условие.

## § 2. Предельный случай

Очевидно, в уравнениях (12.5) условие $a < b$ было существенно, поскольку при $b = a$ в асимптотической формуле появляется нулевой знаменатель. Поэтому возникает вопрос поиска асимптотики в случае $b = a$. Частично этот вопрос исследован.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + a(\Delta u - u) + f(x, u) = 0; \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Здесь $x \in \mathbf{R}^N$, $N \in \mathbf{N}$, $t \geqslant 0$, $a = \text{const} > 0$, а функция $f(\cdot) \in C(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R})$ удовлетворяет условиям $|f(\xi; \eta)| \leqslant \mu(\xi)|\eta|^\alpha \ \forall \xi \in \mathbf{R}^N,\ \eta \in \mathbf{R}$, где $\alpha = \text{const} > 1$, $\mu(\cdot) \in C(\mathbf{R}^N) \cap L_q(\mathbf{R}^N)$, а $q$ — некоторое число, находящееся в промежутке $[2;\ \infty]$ или $(N/2;\ \infty]$ соответственно при $N \leqslant 3$ или $N \geqslant 4$ (не исключается случай $q = \infty$). Кроме того, существует производная $\partial f/\partial \eta \in C(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R})$, удовлетворяющая условиям $|\partial f/\partial \eta| \leqslant k(\xi)|\eta|^\beta \ \forall \xi \in \mathbf{R}^N,\ \eta \in \mathbf{R}$, где $\beta = \text{const} > 0$, $k(\cdot) \in C(\mathbf{R}^N) \cap L_\nu(\mathbf{R}^N)$ при некотором $\nu \in [2;\ \infty]$. Пусть $u_0(\cdot) \in L_\infty(\mathbf{R}^N) \cap H^2(\mathbf{R}^N)$.

Введём обозначения

$$\overline{B}[\cdot] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{1 + |p|^2}\mathcal{F}[\cdot]\right];$$

$$B(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{e^{i(p;x)}}{1 + |p|^2}dp;$$

$$u(x; t) = v(x; t)e^{-at}.$$

Введём класс $X = C\left[0;\ \infty;\ L_\infty(\mathbf{R}^N) \cap H^2(\mathbf{R}^N)\right)$ (то есть класс функций, непрерывных по $t$ на множестве $[0;\ \infty)$ и при каждом фиксированном $t$ принадлежащих множеству $L_\infty(\mathbf{R}^N) \cap H^2(\mathbf{R}^N)$ по $x$) с нормой $\|\varphi(x;t)\| = \sup\limits_{t\geqslant 0}\left(\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbf{R}^N)} + \|\varphi\|_{H^2(\mathbf{R}^N)}\right)$. Формально применим к уравнению оператор $\overline{B}[\cdot]$ и проинтегрируем его от 0 до $t$ с учётом начальных данных:

$$v(x;t) = u_0(x) + \int\limits_0^t e^{a\tau}\overline{B}[f(x;ve^{-a\tau})]d\tau. \tag{12.6}$$

Обобщённым решением задачи назовём функцию $u(\cdot) \in X$, определённую по правилу $u = ve^{-at}$, где $v \in X$ — решение (12.6).

**Теорема 1.** *Пусть величина* $\|u_0\|_{L_\infty(\boldsymbol{R}^N)} + \|u_0\|_{H^2(\boldsymbol{R}^N)}$ *достаточно мала. Тогда существует единственное обобщённое решение задачи.*

**Теорема 2.** *Пусть величина* $\|u_0\|_{L_\infty(\boldsymbol{R}^N)} + \|u_0\|_{H^2(\boldsymbol{R}^N)}$ *достаточно мала. Тогда при* $t \to \infty$ *имеет место асимптотика*

$$u = A(x)e^{-at} + O\left(e^{-\alpha a t}\right),$$

*где* $A(\cdot)$ *не зависит от* $t$, $\alpha = \mathrm{const} > 1$.

# Глава XIII. Введение в групповой анализ

Всё, что видим мы, — видимость только одна.
Далеко от поверхности мира до дна.
Полагай несущественным явное в мире,
Ибо тайная сущность вещей не видна.

*О. Хайям*

Одной из областей применения теории групп является исследование дифференциальных уравнений.

Рассмотрим семейство преобразований[35] с параметром $a$ из некоторого интервала $\Delta$:

$$T_a: \begin{cases} \overline{x} = \varphi(x; y; a); \\ \overline{y} = \psi(x; y; a). \end{cases}$$

Пусть функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ независимы, то есть

$$\frac{D(\varphi; \psi)}{D(x; y)} \neq 0.$$

**Определение 1.** *Локальной однопараметрической группой преобразований Ли ($G$) называется семейство преобразований $T_a$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1. *существует значение $a_0 \in \Delta$, которому соответ-*

[35] Здесь черта над переменной будет обозначать не вектор, а новое значение — результат преобразования.

*ствует тождественное преобразование, то есть*

$$T_{a_0}(x;y) = (x;y);$$

2. *для любого* $a \in \Delta$ *существует такое значение* $\tilde{a} \in \Delta$, *что если*

$$(\overline{x};\overline{y}) = T_a(x;y),$$

*то*

$$(x;y) = T_{\tilde{a}}(\overline{x};\overline{y});$$

3. *для всех* $a, b \in \Delta$ *существует значение* $c \in \Delta$, *соответствующее суперпозиции преобразований с параметрами* $a$ *и* $b$, *то есть*

$$T_c = T_b T_a;$$

4. *функции* $\varphi(\cdot)$ *и* $\psi(\cdot)$ *бесконечно дифференцируемы по* $a$.

Таким образом, к классическому определению группы добавлено требование бесконечной дифференцируемости по $a$. В дальнейшем будем считать, что $a_0 = 0$, а $c = a + b$, то есть суперпозиции преобразований с параметрами $a$ и $b$ соответствует преобразование с параметром $c = a + b$: $T_b T_a = T_{a+b}$.

Разложим $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ по степеням $a$:

$$\begin{cases} \overline{x} = x + \xi(x;y)a + O(a^2); \\ \overline{y} = y + \eta(x;y)a + O(a^2), \end{cases}$$

где

$$\xi = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right|_{a=0}; \ \eta = \left.\frac{\partial\psi}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

Вектор $(\xi;\eta)$ является касательным в точке $(x;y)$ к кривой, описываемой преобразованием точки $(\overline{x};\overline{y})$, поэтому говорят, что такие векторы образуют касательное векторное поле группы $G$. Введём оператор

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}, \tag{13.1}$$

называемый генератором группы $G$ или инфинитезимальным оператором группы $G$.

**Теорема С. Ли.** *Функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ имеют разложения*

$$\begin{cases} \overline{x} = x + a\xi + O(a^2); \\ \overline{y} = y + a\eta + O(a^2) \end{cases}$$

*тогда и только тогда, когда они являются решениями задачи Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{da} = \xi(\varphi;\psi); \;\; \varphi|_{a=0} = x; \\ \dfrac{d\psi}{da} = \eta(\varphi;\psi); \;\; \psi|_{a=0} = y. \end{cases}$$

Рассмотрим, например, группу поворота:

$$\begin{cases} \overline{x} = x\cos a + y\sin a; \\ \overline{y} = -x\sin a + y\cos a. \end{cases} \tag{13.2}$$

Изучим взаимосвязь между $(\varphi;\psi)$ и $(\xi;\eta)$.

- По $(\varphi;\psi)$ найдём $(\xi;\eta)$. Здесь

  $$\begin{cases} \varphi(x;y;a) = x\cos a + y\sin a; \\ \psi(x;y;a) = -x\sin a + y\cos a, \end{cases}$$

  откуда

  $$\xi = \left.\frac{d\varphi}{da}\right|_{a=0} = y; \;\; \eta = \left.\frac{d\psi}{da}\right|_{a=0} = -x.$$

  Значит,

  $$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

- Обратно: по $(\xi;\eta)$ найдём $(\varphi;\psi)$. Из задачи Коши
$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{da} = \overline{y};\ \overline{x}\big|_{a=0} = x; \\ \dfrac{d\overline{y}}{da} = -\overline{x};\ \overline{y}\big|_{a=0} = y \end{cases}$$
несложно получить общее решение уравнений:
$$\begin{cases} \overline{x} = c_1\cos a + c_2\sin a; \\ \overline{y} = -c_1\sin a + c_2\cos a. \end{cases}$$
Теперь учтём начальные условия: $c_1 = x$, $c_2 = y$, следовательно, преобразование соответствует формулам (13.2).

**Определение 2.** *Функция $F(x;y)$ называется инвариантом группы $G$, если $F(\overline{x};\overline{y}) = F(x;y)$, то есть $F(\varphi(x;y;a);\psi(x;y;a)) = F(x;y)$.*

**Теорема 2.** *Функция $F(x;y)$ является инвариантом группы $G$ с генератором $X$ тогда и только тогда, когда она является решением уравнения $XF = 0$, то есть*
$$\xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Рассмотрим, например, оператор
$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}.$$
Уравнению $XF = 0$ соответствует уравнение характеристик $dx/x = dy/y$, имеющее интеграл $h = x/y$. Значит, общий вид инварианта — $F(x;y) = \Phi(x/y)$, где $\Phi(\cdot)$ — произвольная функция одного аргумента.

Отметим, что группы преобразований и введённые связанные с ними понятия имеют очевидные обобщения на случай большего количества переменных. Уравнение $XF = 0$ в этом случае примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k(x) \frac{\partial F}{\partial x_k} = 0.$$

Оно имеет характеристические уравнения

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n}$$

с независимыми интегралами $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$. Тогда произвольный инвариант оператора имеет вид $F(x) = \Phi(\psi_1(x); \ldots; \psi_{n-1}(x))$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1; \ldots; x_n) = 0; \\ \ldots; \\ F_s(x_1; \ldots; x_n) = 0, \end{cases} \tag{13.3}$$

где $s < n$. Пусть $\operatorname{rg} \|\frac{\partial F_k}{\partial x_l}\| = s \ \forall x$. Тогда система определяет $(n-s)$-мерную поверхность.

**Определение 3.** *Говорят, что система (13.3) является инвариантом группы преобразований $G$, заданной соотношениями*

$$\overline{x}_k = f_k(x; a),$$

*если эти соотношения не выводят за пределы поверхности $M$, заданной системой, то есть $\overline{x} \in M \ \forall x \in M$. Поверхность $M$ называется инвариантной поверхностью.*

**Теорема 3.** *Поверхность $M$, заданная системой (13.3), есть инвариант по отношению к группе $G$ с генератором $X$ тогда и только тогда, когда $XF_k|_M = 0$ при всех $k = \overline{1; s}$.*

**Теорема 4.** *Любая однопараметрическая группа преобразований $G$ с генератором вида (13.1) может быть* *с помощью замены переменных* $t = t(x; y)$, $u = u(x; y)$ *приведена к группе сдвигов* $\overline{t} = t + a$, $\overline{u} = u$ *с генератором* $X = \partial/\partial t$. *При этом переменные* $t$ *и* $u$ *называются каноническими.*

Утверждение вытекает из того, что указанная замена влияет на оператор $X$ следующим образом:

$$X = X(t(x; y))\frac{\partial}{\partial t} + X(u(x; y))\frac{\partial}{\partial u}.$$

Значит, оператор $X$ совпадёт с $\partial/\partial t$, если наложить условия

$$\begin{cases} Xt = 1; \\ Xu = 0. \end{cases} \tag{13.4}$$

Таким образом, система (13.4) даёт способ найти канонические переменные.

Например, найдём канонические переменные для группы растяжений с генератором

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Первое уравнение (13.4) примет вид

$$x\frac{\partial t}{\partial x} + y\frac{\partial t}{\partial y} = 1.$$

Достаточно найти любое частное решение этого уравнения — возьмём для простоты $t$, зависящую только от $x$. Тогда из уравнения легко найти $t = \ln|x|$. Второе уравнение имеет вид

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Оно имеет уравнение характеристик $dx/x = dy/y \Leftrightarrow y/x = \mathrm{const}$. Возьмём для простоты $u = y/x$. Таким образом, приходим к каноническим переменным $t =$

$\ln|x|$, $u = y/x$. В этих переменных группа растяжений

$$\overline{x} = xe^a;\ \overline{y} = ye^a$$

свелась к группе сдвига

$$\bar{t} = t + a;\ \overline{u} = u.$$

Действительно,

$$\bar{t} = \ln|\overline{x}| = \ln|xe^a| = \ln|x| + a = t + a;$$
$$\overline{u} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \frac{ye^a}{xe^a} = \frac{y}{x} = u.$$

# Глава XIV. Применение группового анализа к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка

Теперь нам не надо по улицам мыкаться ощупью:
машины нас ждут и ракеты уносят нас вдаль.
А всё-таки жаль, что в Москве больше нету
извозчиков,
хотя б одного, и не будет отныне, — а жаль.

*Б.Ш. Окуджава*

Групповой анализ весьма полезен при исследовании нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Ограничимся рассмотрением уравнений первого порядка[36].

## § 1. Симметрии уравнений первого порядка

Перейдём к применению группового анализа к дифференциальным уравнениям. Рассмотрим замену переменных

$$\overline{x} = \varphi(x; y; a); \ \overline{y} = \psi(x; y; a).$$

[36]О применении группового анализа к обыкновенным дифференциальным уравнениям более высоких порядков подробно говорится в [11]

Как преобразуется $dy/dx$? Заметим, что

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{D_x\psi}{D_x\varphi},$$

где $D_x$ — оператор полного дифференцирования, то есть

$$D_x\varphi = \varphi'_x + \varphi'_y y'(x),\ D_x\psi = \psi'_x + \psi'_y y'(x).$$

Введя правило преобразования производной, мы сможем вместо дифференциального уравнения с двумя переменными $(x, y)$ исследовать алгебраическое[37] с тремя переменными ($x$, $y$, «$\frac{dy}{dx}$») и соответствующую группу $G_{(1)}$, называемую первым продолжением группы $G$.

Найдём правило преобразования производной. Так как

$$\varphi = x + a\xi + O(a^2),\ \psi = y + a\eta + O(a^2),$$

то

$$\begin{gathered}\overline{y'} = \frac{y' + aD_x\eta + O(a^2)}{1 + aD_x\xi + O(a^2)} = \\ = (y' + aD_x\eta + O(a^2))(1 - aD_x\xi + O(a^2)) = \\ = y' + (D_x\eta - y'D_x\xi)a + O(a^2).\end{gathered}$$

Значит, $\overline{y'} = y' + a\zeta_1 + O(a^2)$, где

$$\zeta_1 = D_x\eta - y'D_x\xi = \eta'_x + (\eta'_y - \xi'_x)y' - \xi'_y y'^2. \qquad (14.1)$$

Генератор группы переходит в

$$\underset{1}{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial y'} \qquad (14.2)$$

(«первое продолжение инфинитезимального оператора»).

[37] Алгебраическое в широком смысле, то есть содержащее, возможно, функции более сложного вида, чем многочлены, но не содержащее явным образом операций дифференцирования.

**Определение 1.** *Говорят, что группа преобразований $G$ является группой симметрии уравнения $dy/dx = f(x; y)$, или что это уравнение допускает группу $G$, если форма уравнения не меняется при переходе от переменных $(x,\ y)$ к $(\overline{x},\ \overline{y})$ с соответствующим пересчётом производной.*

**Теорема 1 (основное свойство симметрии).** *Группа преобразований $G$ является группой симметрии данного уравнения тогда и только тогда, когда она переводит любое решение уравнения в решение того же уравнения.*

Генератор $X$ допускаемой группы $G$ называется допускаемым оператором или инфинитезимальной симметрией уравнения.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Уравнение $y' = f(y)$, не содержащее явным образом $x$, не меняется при преобразовании $\overline{x} = x + a$, следовательно, оно допускает оператор $X = \partial/\partial x$.

2. Уравнение $y' = f(y/x)$ допускает группу растяжений $\overline{x} = xe^a$, $\overline{y} = ye^a$ с генератором $X = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$.

3. Рассмотрим уравнение Риккати:
$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0.$$
Подберём допускаемую группу в виде преобразований масштабирования: $\overline{x} = kx$, $\overline{y} = ly$. Уравнение в новых переменных должно совпасть с исходным, то есть иметь вид
$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} + \overline{y}^2 - \frac{2}{\overline{x}^2} = 0,$$
что с учётом связи между старыми и новыми пере-

менными даёт

$$\frac{ldy}{kdx} + l^2y^2 - \frac{2}{k^2x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} + kly^2 - \frac{2}{klx^2} = 0.$$

Таким образом, уравнение будет инвариантно относительно выбранного преобразования при условии $kl = 1$. Поэтому положим $k = e^a$, $l = e^{-a}$, откуда $\overline{x} = xe^a$, $\overline{y} = ye^{-a}$. Значит, уравнение имеет симметрию

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Исследуем вопрос о построении уравнения общего вида, допускающего заданную симметрию. А именно, каков общий вид функции $f(\cdot)$ при условии, что уравнение $y' = f(x; y)$ допускает оператор вида

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$$

с заданными $\xi$ и $\eta$? Рассмотрим продолженный оператор (14.2); применим условие инвариантной поверхности:

$$\zeta_1\big|_{y'=f(x;y)} = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

откуда

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} = (\eta'_x + (\eta'_y - \xi'_x)y' - \xi'_y {y'}^2)\Big|_{y'=f} = \\ = \eta'_x + (\eta'_y - \xi'_x)f - \xi'_y f^2.$$

Таким образом, уравнение

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} = \eta'_x + (\eta'_y - \xi'_x)f - \xi'_y f^2 \tag{14.3}$$

определяет требуемые функции $f(\cdot)$.

Например, найдём уравнения, допускающие оператор $X = x\partial/\partial x - y\partial/\partial y$. Равенство (14.3) примет вид

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = -2f. \tag{14.4}$$

Из его характеристической системы

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} = -\frac{df}{2f}$$

найдём первые интегралы: $\psi_1 = xy$, $\psi_2 = x^2 f$. Значит, общее решение (14.4) имеет вид $f = x^{-2}F(xy)$, где $F(\cdot)$ — произвольная функция одного аргумента. Приходим к семейству уравнений

$$x^2 y' = F(xy),$$

допускающих заданный оператор.

## § 2. Уравнения в дифференциалах

Рассмотрим уравнение вида

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0, \qquad (14.5)$$

где $P(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ — функции двух аргументов[38].

**Теорема 2.** *Пусть известно, что уравнение (14.5) допускает оператор*

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y},$$

*причём $P\xi + Q\eta \neq 0$. Тогда это уравнение имеет интегрирующий множитель вида*

$$\mu = \frac{1}{P\xi + Q\eta},$$

*называемый интегрирующим множителем Ли.*

Рассмотрим несколько примеров.

- Уравнение

$$ydx + (x-y)dy = 0$$

[38] Левая часть этого уравнения, вообще говоря, не является *полным* дифференциалом.

инвариантно относительно преобразования $\overline{x} = xe^a$, $\overline{y} = ye^a$, следовательно, оно допускает оператор

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Поэтому оно имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{xy + y(x-y)} = \frac{1}{2xy - y^2}.$$

С учётом этого множителя приведём уравнение к уравнению в полных дифференциалах:

$$\frac{ydx}{2xy - y^2} + \frac{(x-y)dy}{2xy - y^2} = 0.$$

Несложно показать, что оно имеет решение в виде неявной формулы

$$(2x - y)y = C.$$

- Запишем уравнение Риккати в виде

$$\left(y^2 - \frac{2}{x^2}\right)dx + dy = 0.$$

Ранее было показано, что оно допускает оператор

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Значит,

$$\mu = \frac{1}{(y^2 - 2/x^2)\,x - y} = \frac{x}{x^2y^2 - xy - 2}.$$

После умножения на $\mu$ уравнение примет вид

$$\frac{xdy}{x^2y^2 - xy - 2} +$$

$$+ \frac{1}{x^2y^2 - xy - 2} \cdot \frac{x^2y^2 - 2}{x} dx = 0,$$

что равносильно соотношению

$$\frac{xdy}{x^2y^2 - xy - 2} + \frac{x^2y^2 - xy - 2 + xy}{x(x^2y^2 - xy - 2)}dx = 0,$$

то есть

$$\frac{d(xy)}{x^2y^2 - xy - 2} + \frac{dx}{x} = 0. \tag{14.6}$$

Легко проверить, что

$$\int \frac{dz}{z^2 - z - 2} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{z-2}{z+1}\right| + \mathrm{const}\,.$$

Поэтому почленное интегрирование (14.6) даёт

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{z-2}{z+1}\right| + \ln|x| = \mathrm{const},$$

где $z = xy$. Выражая $y$, получим:

$$y = \frac{2x^3 + C}{x(x^3 - C)}.$$

**Теорема 3.** *Пусть известны два линейно независимых интегрирующих множителя $\mu_{1;2}(x;y)$ уравнения (14.5). Тогда его общее решение можно записать в виде неявной формулы:*

$$\frac{\mu_1(x;y)}{\mu_2(x;y)} = C. \tag{14.7}$$

Рассмотрим для иллюстрации этой теоремы следующее уравнение:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}.$$

Перепишем его в виде

$$(x^2y + y^2)dx - x^3dy = 0.$$

Можно показать, что оно допускает операторы

$$X_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Им соответствуют интегрирующие множители

$$\mu_1 = \frac{1}{x^2y^2}, \ \mu_2 = \frac{1}{xy(y-x^2)}.$$

Уравнение (14.7) после упрощений даст

$$y = \frac{x^2}{1-Cx}.$$

## § 3. Интегрирование с помощью канонических переменных

Уравнение $y' = f(x;y)$ с известной симметрией

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$$

можно упростить с помощью введённых ранее канонических переменных. А именно, в новых переменных правая часть будет явно зависеть только от новой функции, а не от независимой переменной, и уравнение можно будет проинтегрировать в квадратурах. Перечислим эти действия подробнее:

1. найти канонические переменные $t$ (независимую переменную) и $u$ (функцию) из условий $Xt = 1$ и $Xu = 0$;

2. сделать соответствующую замену переменных, считая $u$ функцией, зависящей от $t$:

$$\frac{du}{dt} = g(u);$$

3. проинтегрировать полученное уравнение квадратурой;

4. сделать обратную замену.

Применим этот алгоритм к двум уравнениям.

- Рассмотрим уравнение
$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3}.$$
  1. несложно показать, что канонические переменные имеют вид $t = \ln|x|$, $u = y/x$.
  2. Так как
  $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(xu)}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = u + x\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = u + \frac{du}{dt},$$
  то уравнение можно записать в виде
  $$\frac{du}{dt} = u^3.$$
  3. Интегрирование даёт $u(t) = \pm 1/\sqrt{C - 2t}$.
  4. Вернёмся к первоначальным обозначениям: $y(x) = \pm x/\sqrt{C - \ln(x^2)}$.

- Рассмотрим теперь уравнение Риккати:
$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0.$$
Так как оно допускает оператор
$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y},$$
то канонические переменные имеют вид $t = \ln|x|$, $u = xy$. Следовательно,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{x}\right) = -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \\ = -\frac{u}{x^2} + \frac{u'(t)}{x^2}.$$
Таким образом, левую часть уравнения можно преобразовать следующим образом:
$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = \frac{u'(t)}{x^2} - \frac{u}{x^2} + \frac{u^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{u' + u^2 - u - 2}{x^2},$$

а значит, уравнение можно записать в виде

$$\frac{du}{dt} = -(u^2 - u - 2). \tag{14.8}$$

Интегрирование этого уравнения даст

$$\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right| = -3t + \mathrm{const}, \tag{14.9}$$

откуда

$$u = \frac{C + 2e^{3t}}{e^{3t} - C}.$$

Вернёмся к первоначальным переменным:

$$y = \frac{2x^3 + C}{x(x^3 - C)}.$$

Отметим, что переход от (14.8) к (14.9) не был равносильным: могли быть потеряны решения, при которых правая часть (14.8) равна нулю. Проверкой убеждаемся, что $u = 2$ и $u = -1$ будут решениями. Им соответствуют $y = 2/x$ и $y = -1/x$.

Рассмотрим теперь уравнение более общего вида:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x}F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Можно показать, что оно допускает оператор

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y},$$

которому соответствует преобразование

$$\overline{x} = \frac{x}{1-ax}, \ \overline{y} = \frac{y}{1-ax}.$$

Заметим, что

$$D_x\overline{x} = \frac{1}{(1-ax)^2}, \ D_x\overline{y} = \frac{(1-ax)y' + ay}{(1-ax)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{D_x\overline{y}}{D_x\overline{x}} = (1-ax)y' + ay.$$

Уравнение в новых переменных запишем в виде

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} - \frac{\overline{y}}{\overline{x}} - \frac{1}{\overline{x}}F\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right) = 0,$$

что с учётом указанных преобразований можно записать как

$$(1-ax)y' + ay - \frac{y}{x} - \frac{1-ax}{x}F\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Проинтегрируем уравнение в случае $F(\sigma) = \sigma^2$, то есть

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}.$$

1. Системе $Xt = 1$, $Xu = 0$ удовлетворяют $t = -1/x$, $u = y/x$.

2. Заметим, что

$$y' = \frac{d(xu)}{dx} = u+x\frac{du}{dx} = u+x\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = u+xu'\frac{1}{x^2} = u+\frac{u'}{x}.$$

   Следовательно, уравнение можно записать в виде

$$\frac{du}{dt} = u^2.$$

3. Полученное уравнение даёт $u = 1/(C+t)$ или $u = 0$, откуда $y = x^2/(1-Cx)$ или $y = 0$.

## § 4. Инвариантные решения

Группа симметрии состоит из преобразовний, которые отображают множество решений уравнения в это же множество. При этом возможно, что какие-то решения переходят в себя. Такие решения называются инвариантными.

Например, найдём решения уравнения Риккати

$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0,$$

инвариантные относительно оператора

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Из условия инвариантности $XI = 0$ находим инвариант $I = xy$. Значит, $xy = c = \mathrm{const}$ — соотношение, соответствующее инвариантному решению. Поэтому $y = c/x$ — общая форма такого решения. Чтобы найти $c$, подставим это предварительное выражение в уравнение:

$$-\frac{c}{x^2} + \frac{c^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 0,$$

откуда $c = -1$ или $c = 2$. Таким образом, уравнение имеет инвариантные решения $y = -1/x$ и $y = 2/x$.

Обсудим теперь, как можно применять инвариантные решения для получения общего интеграла обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с двумя независимыми симметриями. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^n}{x^{n+1}}.$$

Можно показать, что оно допускает операторы

$$X_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y},\ X_2 = (n-1)x\frac{\partial}{\partial x} + ny\frac{\partial}{\partial y}.$$

Из условия $X_2 I = 0$ находим инвариант $I = y^{n-1}/x^n$. Значит, инвариантное относительно этого оператора решение должно иметь вид $y = \lambda x^{n/(n-1)}$. Подставив это выражение в уравнение, найдём $\lambda = (n-1)^{-1/(n-1)}$.

Таким образом, инвариантное решение в новых переменных имеет вид

$$\overline{y} = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{1/(n-1)} \overline{x}^{n/(n-1)}. \qquad (14.10)$$

Теперь воспользуемся $X_1$: этому оператору соответствует преобразование

$$\overline{x} = \frac{x}{1-ax},\ \overline{y} = \frac{y}{1-ax}.$$

Подставим эти выражения в (14.10):

$$\frac{y}{1-ax} = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{1/(n-1)} \left(\frac{x}{1-ax}\right)^{n/(n-1)},$$

откуда

$$y = \left(\frac{1}{n-1}\right)^{1/(n-1)} \cdot \frac{x^{n/(n-1)}}{(1-ax)^{1/(n-1)}},$$

где $a$ — произвольная постоянная. В частности, при $n = 2$ уравнение имеет решение $y = x^2/(1-ax)$.

# Глава XV. Групповой анализ уравнений в частных производных

Не мучьтесь понапрасну — всему своя пора.
Траву взрастите — к осени сомнётся.
Вы начали прогулку с арбатского двора,
к нему-то всё, как видно, и вернётся.
*Б.Ш. Окуджава*

Групповой анализ в применении к уравнениям в частных производных позволяет:

1. найти преобразования, относительно которых уравнение инвариантно[39],
2. найти инвариантные решения (важный класс точных решений),
3. по одному решению уравнения найти класс решений с произвольной постоянной.

Обсудим эти вопросы в данной главе[40]. Отметим, что групповой анализ применим к уравнениям в частных производных и системам уравнений любого порядка — здесь ограничимся рассмотрением уравнений второго порядка.

[39] То есть преобразованное уравнение имеет такой же вид, как и исходное, с точностью до обозначений.

[40] Ещё одно применение группового анализа — линеаризация. Обсудим этот подход в главе XVI.

## § 1. Предварительные рассмотрения

Рассмотрим уравнение относительно функции $u$, зависящей от переменных $x$ и $y$. Подобно тому, как было сделано при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений, введём следующее семейство преобразований:

$$\begin{cases} \overline{x} = \varphi_1(x, y, u, a), \\ \overline{y} = \varphi_2(x, y, u, a), \\ \overline{u} = \psi(x, y, u, a), \\ \overline{x}\Big|_{a=0} = x,\ \overline{y}\Big|_{a=0} = y,\ \overline{u}\Big|_{a=0} = u. \end{cases} \tag{15.1}$$

Положим

$$\xi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial a}\Big|_{a=0},\ \eta = \frac{\partial \varphi_2}{\partial a}\Big|_{a=0},\ \zeta = \frac{\partial \psi}{\partial a}\Big|_{a=0}.$$

Введём инфинитезимальный оператор

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial u}.$$

**Теорема С. Ли.** *Пусть известны $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Тогда по ним можно восстановить функции $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi$, решив задачу Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{da} = \xi(\varphi_1, \varphi_2, \psi), \\ \dfrac{d\varphi_2}{da} = \eta(\varphi_1, \varphi_2, \psi), \\ \dfrac{d\psi}{da} = \zeta(\varphi_1, \varphi_2, \psi), \\ \varphi_1\Big|_{a=0} = x,\ \varphi_2\Big|_{a=0} = y,\ \psi\Big|_{a=0} = u. \end{cases}$$

**Определение.** *Инвариантом преобразования (15.1) называется функция $I(x, y, u)$, удовлетворяющая условию $I(\overline{x}, \overline{y}, \overline{u}) = I(x, y, u)$.*

Инварианты можно найти из уравнения

$$XI = 0.$$

Заметим, что оператор $X$ имеет два функционально независимых инварианта.

Пусть в уравнение входят производные $u$ по $x$ и $y$ первого и второго порядков. Будем считать уравнение алгебраическим[41] относительно большего числа переменных[42].

Проанализируем, как преобразуются производные при преобразовании (15.1). Можно показать[43], что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} &= \frac{\partial u}{\partial x} + a\zeta_1 + O(a^2),\\
\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} &= \frac{\partial u}{\partial y} + a\zeta_2 + O(a^2),\\
\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\zeta_{11} + O(a^2),\\
\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}\partial \overline{y}} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\zeta_{12} + O(a^2),\\
\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\zeta_{22} + O(a^2),
\end{aligned}$$

[41] Алгебраическим в широком смысле, то есть содержащим, возможно, функции более сложного вида, чем многочлены, но не содержащим явным образом операций дифференцирования.

[42] А именно, уравнение может содержать до восьми «независимых переменных»: $x$, $y$, $u$, «$\frac{\partial u}{\partial x}$», «$\frac{\partial u}{\partial y}$», «$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$», «$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$», «$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$».

[43] Рассуждения аналогичны выводу формулы (14.1). Они приведены в [30, с. 106–107].

где

$$
\begin{aligned}
\zeta_1 =& \zeta'_x + (\zeta'_u - \xi'_x)u'_x - \eta'_x u'_y - \xi'_u {u'_x}^2 - \eta'_u u'_x u'_y;\\
\zeta_2 =& \zeta'_y - \xi'_y u'_x + (\zeta'_u - \eta'_y)u'_y - \xi'_u u'_x u'_y - \eta'_u {u'_y}^2,\\
\zeta_{11} =& \zeta''_{x^2} + (2\zeta''_{ux} - \xi''_{x^2})u'_x - \eta''_{x^2}u'_y + (\zeta''_{u^2} - 2\xi''_{ux}){u'_x}^2 -\\
& - 2\eta''_{ux}u'_x u'_y - \xi''_{u^2}{u'_x}^3 - \eta''_{u^2}{u'_x}^2 u'_y + (\zeta'_u - 2\xi'_x)u''_{x^2} -\\
& - 3\xi'_u u'_x u''_{x^2} - \eta'_u u''_{x^2}u'_y - 2\eta'_x u''_{xy} - 2\eta'_u u'_x u''_{xy},\\
\zeta_{12} =& \zeta''_{xy} + (\zeta''_{uy} - \xi''_{xy})u'_x + (\zeta''_{ux} - \eta''_{xy})u'_y - \xi''_{uy}{u'_x}^2 -\\
& - (\zeta''_{u^2} - \xi''_{ux} - \eta''_{uy})u'_x u'_y - \eta''_{ux}{u'_y}^2 - \xi''_{u^2}{u'_x}^2 u'_y -\\
& - \eta''_{u^2}u'_x {u'_y}^2 - \xi'_y u''_{x^2} - \xi'_u u''_{x^2}u'_y + (\zeta'_u - \xi'_x - \eta'_y)u''_{xy} -\\
& - 2\xi'_u u'_x u''_{xy} - 2\eta'_u u'_y u''_{xy} - \eta'_x u''_{y^2} - \eta'_u u'_x u''_{y^2},\\
\zeta_{22} =& \zeta''_{y^2} - \xi''_{y^2}u'_x + (2\zeta''_{uy} - \eta''_{y^2})u'_y - 2\xi''_{uy}u'_x u'_y +\\
& + (\zeta''_{u^2} - 2\eta''_{uy}){u'_y}^2 - \xi''_{u^2}u'_x {u'_y}^2 - \eta''_{u^2}{u'_y}^3 - 2\xi'_y u''_{xy} -\\
& - 2\xi'_u u'_y u''_{xy} + (\zeta'_u - 2\eta'_y)u''_{y^2} - \xi'_u u'_x u''_{y^2} - 3\eta'_u u'_y u''_{y^2}.
\end{aligned}
\tag{15.2}
$$

Рассмотрим уравнение

$$F(x; y; u; u'_x; u'_y; u''_{x^2}; u''_{xy}; u''_{y^2}) = 0.$$

Опишем процедуру поиска симметрий (преобразований, сохраняющих вид) этого уравнения.

1. Пусть уравнение инвариантно относительно некоторого преобразования, тогда

$$F(\overline{x};\ \overline{y};\ \overline{u};\ \overline{u}'_{\overline{x}};\ \overline{u}'_{\overline{y}};\ \overline{u}''_{\overline{x}^2};\ \overline{u}''_{\overline{xy}};\ \overline{u}''_{\overline{y}^2}) = 0.$$

Разложим в ряд по $a$ левую часть. Придём к условию

$$
\begin{cases}
\underset{2}{X}F = 0,\\
\quad F = 0,
\end{cases}
\tag{15.3}
$$

где

$$\underset{2}{X}F = \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} + \zeta\frac{\partial F}{\partial u} + \zeta_1\frac{\partial F}{\partial u'_x} + \zeta_2\frac{\partial F}{\partial u'_y} +$$
$$+\zeta_{11}\frac{\partial F}{\partial u''_{x^2}} + \zeta_{12}\frac{\partial F}{\partial u''_{xy}} + \zeta_{22}\frac{\partial F}{\partial u''_{y^2}}.$$

Соотношение (15.3) называется условием инвариантности, а оператор $\underset{2}{X}$ — вторым продолжением оператора $X$.

2. Из системы (15.3) исключается одна из производных $u$ первого или второго порядка. Затем левая часть полученного равенства записывается как многочлен по «независимым переменным» — всевозможным произведениям производных функции $u$. Например, исключив $u''_{y^2}$, получим следующее соотношение:

$$\sum_{k_1;k_2;k_3;k_4} A_{k_1;k_2;k_3;k_4}(u'_x)^{k_1}(u'_y)^{k_2}(u''_{x^2})^{k_3}(u''_{xy})^{k_4} = 0,$$

где коэффициенты $A_{k_1;k_2;k_3;k_4}$ зависят от $x$, $y$, $u$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, а также производных $\xi$, $\eta$, $\zeta$, но не зависят от производных функции $u$. Это равенство будет выполнено тождественно, если все коэффициенты $A_{k_1;k_2;k_3;k_4}$ равны нулю. Приходим к переопределённой системе для $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

3. Решаем эту определяющую систему для $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

**Замечание 1.** *Система для определения $\xi$, $\eta$, $\zeta$ линейна.*

**Замечание 2.** *Инвариант $I$, соответствующий уравнению $XI = 0$, удовлетворяет и уравнению $\underset{2}{X}I = 0$.*

Покажем на примере, как используется данная схема. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(u). \tag{15.4}$$

Здесь $F = u''_{x^2} + u''_{y^2} - f(u)$. С учётом этого первое из равенств условия инвариантности (15.3) имеет вид

$$\zeta_{11} + \zeta_{22} - \zeta f'(u) = 0.$$

Подставив сюда выражения для $\zeta_{11}$ и $\zeta_{22}$ и заменив $u''_{y^2}$ на $f(u) - u''_{x^2}$, получим:

$$\begin{aligned}
&- 2\xi'_u u'_x u''_{x^2} + 2\eta'_u u'_y u''_{x^2} - 2\eta'_u u'_x u''_{xy} - 2\xi'_u u'_y u''_{xy} - \\
&- 2(\xi'_x - \eta'_y) u''_{x^2} - 2(\xi'_y + \eta'_x) u''_{xy} - \xi''_{u^2} {u'_x}^3 - \eta''_{u^2} {u'_x}^2 u'_y - \\
&- \xi''_{u^2} u'_x {u'_y}^2 - \eta''_{u^2} {u'_y}^3 + (\zeta''_{u^2} - 2\xi''_{xu}) {u'_x}^2 - \\
&- 2(\xi''_{yu} + \eta''_{xu}) u'_x u'_y + (\zeta''_{u^2} - 2\eta''_{yu}) {u'_y}^2 + \\
&+ \bigl(2\zeta''_{xu} - \xi''_{x^2} - \xi''_{y^2} - f(u)\xi'_u\bigr) u'_x + \\
&+ \bigl(2\zeta''_{yu} - \eta''_{x^2} - \eta''_{y^2} - 3f(u)\eta'_u\bigr) u'_y + \zeta''_{x^2} + \zeta''_{y^2} + \\
&+ f(u) \cdot (\zeta'_u - 2\eta'_y) - \zeta f'(u) = 0.
\end{aligned}$$

Так как все коэффициенты должны быть равны нулю, приходим к следующей системе (здесь указаны комбинации производных функции $u$, к которым относятся конкретные коэффициенты):

$$\begin{cases} u'_x u''_{x^2}: & \xi'_u = 0; \\ u'_y u''_{x^2}: & \eta'_u = 0; \\ u''_{x^2}: & \xi'_x - \eta'_y = 0; \\ u''_{xy}: & \xi'_y + \eta'_x = 0; \\ {u'_x}^2: & \zeta''_{u^2} - 2\xi''_{ux} = 0; \\ u'_x u'_y: & \eta''_{ux} + \xi''_{uy} = 0; \\ u'_x: & 2\zeta''_{ux} - \xi''_{x^2} - \xi''_{y^2} - \xi'_u f(u) = 0; \\ u''_{y^2}: & \zeta''_{u^2} - 2\eta''_{uy} = 0; \\ u'_y: & 2\zeta''_{uy} - \eta''_{x^2} - \eta''_{y^2} - 3\eta'_u f(u) = 0; \\ 1: & \zeta''_{x^2} + \zeta''_{y^2} - f'(u)\cdot\zeta + f(u)\cdot(\zeta'_u - 2\eta'_y) = 0. \end{cases}$$

Другие уравнения[44] не указаны в этой системе, поскольку они дублируют написанные или являются их следствиями. Из первого, второго и пятого уравнений получим:

$$\xi = \xi(x,y),\ \eta = \eta(x,y),\ \zeta = a(x,y)u + b(x,y), \quad (15.5)$$

где $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ — пока произвольные функции двух аргументов. Из третьего и четвёртого уравнений получим:

$$\Delta\xi = 0,\ \Delta\eta = 0. \quad (15.6)$$

Подставим найденные выражения для $\xi$ и $\eta$ в седьмое и девятое уравнения, а затем используем (15.6). Получим

$$a'_x = a'_y = 0 \Rightarrow a \equiv \mathrm{const}\,.$$

С учётом этого и (15.5) система примет вид:

$$\begin{cases} \xi'_x - \eta'_y = 0, \\ \xi'_y + \eta'_x = 0, \\ \Delta b - auf' - bf' + f\cdot(a - 2\eta'_y) = 0. \end{cases} \quad (15.7)$$

[44]А именно, уравнения, соответствующие членам, пропорциональным $u'_x u''_{xy}$, $u'_y u''_{xy}$, ${u'_x}^3$, ${u'_x}^2 u'_y$, $u'_x {u'_y}^2$, ${u'_y}^3$.

Вид функции $f(\cdot)$ может влиять на линейную зависимость слагаемых в последнем уравнении этой системы. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $f(\cdot)$ — общего вида. Тогда в последнем уравнении системы (15.7) слагаемые $\Delta b$, $auf'$ и $f \cdot (a - 2\eta_y)$ линейно независимы. Следовательно, $a = b = \eta'_y = 0$, то есть $\xi = c_1 y + c_2$, $\eta = -c_1 x + c_3$, $\zeta = 0$. Полагая последовательно одну из постоянных равной единице, а другие — нулю, получим, что исходное уравнение допускает следующие операторы[45]:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x},\\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial y},\\
X_3 &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}
\tag{15.8}
$$

   Они соответствуют переносам по $x$ и $y$ и вращению на плоскости $xy$.

2. Пусть
$$(au + b)f' - (a - 2\eta'_y)f = 0. \tag{15.9}$$

   Решения могут иметь разный вид в зависимости от $a$.

   - Во-первых, пусть $a \neq 0$. Из (15.9) получим
   $$f(u) = C(au + b)^{1 - \frac{2\gamma}{a}},$$
   где $\gamma = \eta'_y = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$. Поэтому при
   $$f(u) = u^k \tag{15.10}$$

[45]Когда уравнение допускает сложный оператор с большим количеством произвольных постоянных, то обычно его преобразуют к списку «базисных» операторов, полагая по очереди каждую постоянную равной единице, а остальные — нулю. Надо помнить, что уравнение допускает произвольную линейную комбинацию «базисных» операторов, а не только каждый из них — обсудим это подробнее в §4.

исходное уравнение допускает и оператор

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{2}{1-k}u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad (15.11)$$

соответствующий неравномерному растяжению.

- Во-вторых, пусть $a = 0$. Тогда

$$f(u) = Ce^{\lambda u},$$

где $\lambda = \mathrm{const}$. Следовательно, $b = -\frac{2\eta'_y}{\lambda}$, а функции $\xi$ и $\eta$ определяются условиями Коши–Римана. В частности при $b = \mathrm{const}$ и

$$f(u) = e^u \qquad (15.12)$$

получаем оператор

$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - 2\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (15.13)$$

Таким образом, уравнение в любом случае допускает операторы (15.8), кроме того, если правая часть имеет вид (15.10) или (15.12), то оно допускает ещё и оператор (15.11) или (15.13) соответственно.

Далее обсудим, как симметрии могут применяться к исследованию уравнений.

## § 2. Внесение постоянной

Пусть известно некоторое решение дифференциального уравнения, кроме того, известна его симметрия. По этим данным можно получить класс решений уравнения, содержащий произвольную постоянную. Обсудим, как это сделать, на примере уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u.$$

Построим его точное решение. Пусть для простоты это будет функция $u$, зависящая только от $x$, но не являющаяся постоянной. В таком случае, несложно показать, что уравнение имеет решение вида

$$u = \ln \frac{2}{x^2}.$$

Кроме того, заметим, что данное уравнение является частным случаем уравнения (15.4), допускающего, как было показано, оператор $X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$, которому соответствует преобразование

$$\begin{cases} \overline{x} = x\cos a + y\sin a, \\ \overline{y} = y\cos a - x\sin a, \\ \overline{u} = u. \end{cases} \tag{15.14}$$

В силу инвариантности уравнения относительно этого преобразования,

$$\overline{u} = \ln \frac{2}{\overline{x}^2}$$

будет решением такого же уравнения, где к каждой переменной приписана черта. Учитывая (15.14), придём к семейству решений исходного уравнения вида

$$u = \ln \frac{2}{(x\cos a + y\sin a)^2}$$

с произвольным параметром $a$.

Опишем схему этого метода в общем виде. Пусть дано решение уравнения $u = g(x, y)$. Так как уравнение переходит в себя при переходе к переменным $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{u}$, то преобразованное уравнение должно иметь решение $\overline{u} = g(\overline{x}; \overline{y})$. Возвращаясь здесь к старым переменным, получим однопараметрическое семейство решений

$$\psi(x; y; u; a) = g\big(\varphi_1(x; y; u; a), \varphi_2(x; y; u; a)\big)$$

с произвольным $a$.

## § 3. Инвариантные решения

Другое применение симметрий — построение инвариантных решений.

Обратимся к описанному методу внесения постоянной. Возможен случай, когда решение $\overline{u} = g(\overline{x}; \overline{y})$ совпадает с $u = g(x, y)$. Такое решение называют инвариантным относительно рассматриваемого преобразования. Как построить такое решение? Будем искать его в неявном виде: $I(x, y, u) = 0$. Отсюда вытекает, что $I(\overline{x}; \overline{y}; \overline{u}) = 0$. Находим однопараметрическое преобразование с оператором $X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial u}$, координаты которого определяются из условия инвариантности (15.3). Затем находим два функционально независимых интеграла $I_{1;2}$ характеристической системы

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{du}{\zeta}.$$

Общее решение уравнения $XI = 0$ определяется по формуле $\Psi(I_1; I_2) = 0$, где $\Psi(\cdot)$ — произвольная функция двух аргументов. Приведём эту формулу к виду $I_2 = \Phi(I_1)$. Это выражение является предварительной формой инвариантного решения (в качестве $I_1$ удобно брать тот инвариант, который не зависит от $u$, если такой имеется). Функцию $\Phi(\cdot)$ определяют с помощью исходного уравнения. А именно, после подстановки в него предварительной формы решения и упрощений должно получиться обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\Phi(\cdot)$ и независимой переменной $I_1$.

Построим инвариантные решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^k.$$

- Было показано, что оно допускает оператор
$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{2}{1-k}u\frac{\partial}{\partial u}.$$
Чтобы найти инварианты этого оператора, рассмотрим уравнение $X_4 I = 0$. Его характеристическая система имеет вид:
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{1-k}{2}\cdot\frac{du}{u}.$$
Её первые интегралы: $y/x = \mathrm{const}$, $ux^{2/(k-1)} = \mathrm{const}$. Значит, инвариантами будут функции
$$I_1 = \frac{y}{x},$$
$$I_2 = ux^{\frac{2}{k-1}}.$$
Поэтому предварительная форма решения имеет вид:
$$u = x^{-\frac{2}{k-1}}\Phi(z),\ z = \frac{y}{x}.$$
Для функции $\Phi$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение
$$(k-1)^2(z^2+1)\Phi''(z) + 2(k^2-1)z\Phi'(z) +$$
$$+ 2(k+1)\Phi - (k-1)^2\Phi^k = 0.$$
Можно показать, что его общее решение имеет вид
$$z = \operatorname{tg} Q(\tau),\ \Phi = \tau(\operatorname{tg}^2 Q(\tau) + 1)^{\frac{1}{1-k}},$$
где
$$Q(\tau) = (k^2-1)Q_1(\tau) + A_2,$$
$$Q_1(\tau) = \int \frac{d\tau}{\sqrt{2(k-1)^2\tau^{k+1} - 4(k+1)\tau^2 + A_1}},$$
$\tau$ — параметр, соответствующий параметрическому заданию функции $\Phi(z)$, $A_{1;2}$ — произвольные постоянные.

- Было показано, что данное уравнение допускает и оператор $X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$. Он имеет инварианты $I_1 = x^2 + y^2$ и $I_2 = u$. Поэтому уравнение имеет решение $u = \Phi(x^2 + y^2)$, где $\Phi(\cdot)$ определяется уравнением
$$4z\Phi''(z) + 4\Phi'(z) = \Phi^k(z).$$

## § 4. Заключительные замечания

Покажем, что решения типа бегущей волны и автомодельные, введённые раньше как точные решения специального вида, могут интерпретироваться как классы инвариантных решений.

1. Если уравнение инвариантно относительно согласованного масштабирования переменных, то оно должно иметь автомодельные решения. Действительно, пусть оно инвариантно относительно преобразования
$$\overline{y} = e^a y,\ \overline{x} = e^{ka}x,\ \overline{u} = e^{ma}u$$
(при каких-то постоянных $k$ и $m$ и тождественно по $a$), которому соответствует оператор
$$X = y\frac{\partial}{\partial y} + kx\frac{\partial}{\partial x} + mu\frac{\partial}{\partial u}.$$
Этот оператор имеет инварианты $I_1 = xy^{-k}$, $I_2 = uy^{-m}$, следовательно, уравнение должно иметь решения вида $u = y^m\Phi(xy^{-k})$, что соответствует предварительной форме автомодельных решений[46].

[46] Инвариантность отностительно указанного преобразования является достаточным, но не необходимым условием для существования автомодельных решений. Соответствующему контрпримеру посвящена задача для самостоятельного решения №9а на с. 213.

2. Аналогично можно показать, что уравнение, допускающее оператор
$$X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y},$$
должно иметь решения вида $u = \Phi(x - ay/b)$, то есть решения типа бегущей волны[47] (переменная $y$ может играть роль времени, а величина $a/b$ — скорости распространения волны).

Следует отметить, что инвариантные решения могут порождаться не только отдельными операторами, допускаемыми уравнением. Линейные комбинации этих операторов могут давать решения, не сводящиеся к тем, которые соответствуют отдельным операторам. Например, можно показать, что уравнение
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^u\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
допускает следующие операторы:
$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x},\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial u}.$$
Рассмотрим их линейные комбинации. Во-первых, оператор
$$Y_1 = X_1 + aX_2 = \frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}$$
с произвольной постоянной $a$ порождает решение типа бегущей волны
$$u = F(x - at),$$
где функция одного аргумента $F(\cdot)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением
$$-aF' = \left(e^F F'\right)'.$$

[47]Инвариантность отностительно указанного преобразования является достаточным, но не необходимым условием для существования решений типа бегущей волны. Соответствующему контрпримеру посвящена задача для самостоятельного решения №9б на с. 213.

Во-вторых, оператор

$$Y_2 = X_3 + aX_4 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + (a+1)x\frac{\partial}{\partial x} + 2a\frac{\partial}{\partial u}$$

с произвольной постоянной $a$ порождает решение

$$u = F\left(xt^{-(a+1)/2}\right) + a\ln t,$$

где функция одного аргумента $F(\theta)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\left(e^F F'\right)' + \frac{a+1}{2}\theta F' = a.$$

Эти новые решения не получаются из отдельно взятых операторов $X_{1;2;3;4}$.

# Глава XVI. Разное

Покуда ночка длится, покуда бричка катит,
дороги этой дальней на нас с тобою хватит.
*Б.Ш. Окуджава*

Кратко изложим несколько подходов к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений, не вошедших в предыдущие главы.

## § 1. Подход Пенлеве

Теория Пенлеве изучает возможность построения общего решения уравнения в виде ряда Лорана. А именно, исследование уравнения («тест Пенлеве») состоит в проверке возможности построения (и самом построении — точно или приближённо) решения обыкновенного дифференциального уравнения[48] порядка $n$

$$u^{(n)}(z) = F(z; u; u'; \ldots; u^{(n-1)})$$

в виде

$$u = \frac{1}{t^p} \sum_{m=0}^{\infty} A_m t^m,$$

где $t = z - z_0$, $p = \text{const} \in \mathbf{N}$, а $z_0$ — произвольная комплексная постоянная.

Рассмотрим этот алгоритм на примере уравнения

$$u''(z) = u^2(z) + au(z) + bz + cz^2 \qquad (16.1)$$

[48]Идею можно приспособить и к изучению уравнений в частных производных.

с постоянными коэффициентами $a$, $b$, $c$.

Определим начальный член разложения $A_0 t^{-p}$ с помощью подстановки этого одночлена в уравнение:

$$\underline{A_0 p(p+1)t^{-p-2}} = \underline{A_0^2 t^{-2p}} + aA_0 t^{-p} + b(z_0+t) + c(z_0+t)^2.$$

Здесь подчёркнуты так называемые ведущие члены, то есть те, которые соответствуют наибольшим по модулю отрицательным степеням $t$. Степени ведущих членов должны быть равны, так как в противном случае коэффициент $A_0$ будет равен нулю, а значит, порядок полюса решения $p$ можно будет понизить. Значит, $-p-2 = -2p \Leftrightarrow p = 2$. Ведущие члены должны быть тождественно равны, следовательно, $A_0 = 6$.

С учётом найденных параметров возьмем разложение решения

$$\begin{aligned} u = 6t^{-2} + A_1 t^{-1} + A_2 + A_3 t + A_4 t^2 + \\ + A_5 t^3 + A_6 t^4 + O(t^5) \end{aligned} \tag{16.2}$$

(почему надо для дальнейшего исследования взять именно столько точных членов, поясним позже) и подставим в уравнение. Получим равенство вида

$$B_{-3}t^{-3} + B_{-2}t^{-2} + B_{-1}t^{-1} + B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + O(t^3) = 0,$$

где коэффициенты $B_k$ $(-3 \leqslant k \leqslant 2)$ выражаются через параметры уравнения и коэффициенты разложения (16.2). Приравняв к нулю каждый коэффициент $B_k$, заданный точно, получим:

$$\begin{cases} t^{-3}: & 10A_1 = 0; \\ t^{-2}: & 12A_2 + A_1^2 + 6a = 0; \\ t^{-1}: & 12A_3 + 2A_1A_2 + A_1 a = 0; \\ 1: & 10A_4 + 2A_1A_3 + A_2^2 + A_2 a + bz_0 + cz_0^2 = 0; \\ t: & 6A_5 + 2A_1A_4 + 2A_2A_3 + A_3 a + 2cz_0 + b = 0; \\ t^2: & 0A_6 + 2A_1A_5 + 2A_2A_4 + A_3^2 + A_4 a + c = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $A_1 = 0$, $A_2 = -a/2$, $A_3 = 0$, $A_4 = (a^2/4 - bz_0 - cz_0^2)/10$, $A_5 = -b/6 - cz_0/3$, а последнее равенство принимает вид

$$0A_6 + c = 0. \tag{16.3}$$

Возможно два случая:

- при $c \neq 0$ равенство (16.3) противоречиво, а значит, исходное уравнение (16.1) не удовлетворяет тесту Пенлеве;
- при $c = 0$ равенство (16.3) верно при всех комплексных $A_6$, следовательно, общее решение исходного уравнения второго порядка может быть представлено в виде ряда Лорана с двумя произвольными постоянными ($z_0$ и $A_6$), то есть уравнение удовлетворяет тесту Пенлеве.

Поясним теперь, какие коэффициенты ряда Лорана в общем случае могут быть произвольными, и сколько надо взять точных членов в разложении (16.2), чтобы это выяснить. Заметим, что рекуррентные формулы для определения $A_m$ имеют вид

$$k_m A_m = \Phi_m(A_0; A_1; \ldots; A_{m-1}). \tag{16.4}$$

Величина $A_m$ будет произвольной, если одновременно $k_m = 0$ и $\Phi_m(A_0; A_1; \ldots; A_{m-1}) = 0$. Множители $k_m$ определяются только ведущими членами исходного уравнения. Левая часть (16.4) линейна по $A_m$, а правая не зависит от $A_m$. Множитель $k_m$ можно найти подстановкой двучлена $u = A_0 t^{-p} + A_m t^{m-p}$ в ведущие члены уравнения:

$$A_m k_m t^q + \ldots = 0,$$

где под многоточием подразумевается выражение, пропорциональное $A_m$ в степени более первой и, как можно показать, существенной роли не играющее. При этом $k_m$ будет многочленом от $m$: $k_m = \sum_{l=0}^{n} b_l m^l$. Уравнение $k_m = 0$ всегда имеет корень $m = -1$, соответствующий произвольному $z_0$. Другие корни определяют «индексы Фукса» («резонансы») $m_1; \ldots; m_{n-1}$, то есть номера коэффициентов ряда Лорана, которые могут быть произвольными.

Покажем, почему применительно к уравнению (16.1) следовало взять разложение (16.2) с точными членами именно[49] до $A_6 t^4$. Ранее были найдены $p = 2$, $A_0 = 6$. Подставим соответствующий двучлен $u = 6t^{-2} + A_m t^{m-2}$ в уравнение $u'' = u^2$ (достаточно выписать ведущие члены):

$$36t^{-4} + A_m(m-2)(m-3)t^{m-4} = \\ = 36t^{-4} + A_m^2 t^{2m-4} + 12A_m t^{m-4},$$

откуда

$$A_m t^{m-4}[(m-2)(m-3) - 12] = A_m^2 t^{2m-4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_m[m^2 - 5m - 6] = A_m^2 t^m.$$

Правая часть будет бесконечно малой при стремлении $t$ к нулю, тогда как левая не зависит от $t$. Значит, левая часть должна быть равна нулю, откуда $m = -1$ или $m = 6$. Поэтому надо брать разложение решения до члена с $A_6$.

Таким образом, общая схема теста Пенлеве состоит в следующем.

1. Определяем начальный член разложения $A_0 t^{-p}$. Все значения $p$ должны быть натуральными, иначе — тест не пройден.

[49] Можно составить рекуррентные формулы для определения произвольного количества точных членов, но здесь цель рассуждений — подтвердить или опровергнуть возможность построения общего решения уравнения в виде ряда с нужным количеством произвольных постоянных, поэтому берётся частичная сумма, которая должна содержать все произвольные постоянные.

2. Определяем индексы Фукса: подставляем $u = A_0 t^{-p} + A_m t^{m-p}$ в ведущие члены уравнения и находим $k_m$. Уравнение $k_m = 0$ должно иметь $(n-1)$ различных корней $m_l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, то есть

$$k_m = (m+1)\prod_{l=1}^{n-1}(m-m_l),\ 0 \leqslant m_1 < \ldots < m_{n-1},$$

иначе — тест не пройден[50].

3. Проверяем условия $k_m = \Phi_m = 0$, последовательно вычисляя коэффициенты ряда Лорана до $A_{m_{n-1}}$. Если при каком-то $m_j \leqslant m_{n-1}$ условия $k_m = \Phi_m = 0$ не выполнены, то тест не пройден, если же все шаги выполнить удалось — пройден.

## § 2. Мгновенное разрушение

Ранее рассматривались задачи о разрушении решений уравнений: рассматривалось уравнение для функции, зависящей от времени и пространственных переменных, и выводились оценки сверху и снизу для времени существования этой функции. Близкое направление исследований — изучение вопроса о мгновенном разрушении, то есть о несуществовании при некоторых условиях решения задачи ни на каком конечном временном промежутке положительной длины.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = |u|^q, \\ u(x;0) = u_0(x), \\ u(0;t) = 0, \end{cases}$$

[50] В [19, гл. 3] обсуждается, как можно распространить анлиз Пенлеве на случаи рациональных показателей $p$ и целых отрицательных индексов Фукса.

где $x \in (0;\infty)$, $t \in (0;T) \subset (0;\infty)$, $q = \mathrm{const} > 1$, $u_0(\cdot) \in L_q(0;\infty)$.

Умножив левую и правую части уравнения на некоторую функцию $\varphi(x;t)$ и формально проинтегрировав по частям, получим интегральное тождество, которое возьмём за основу определения решения.

**Определение 1.** *Слабым решением задачи называется функция $u(x;t) \in L_q(0;T;L_q^{loc}(0;\infty))$, удовлетворяющая при некотором $T > 0$ равенству*

$$\int_0^T \int_0^\infty u(x;t)\frac{\partial^2\varphi(x;t)}{\partial t\partial x}dxdt+ \\ +\int_0^\infty u_0(x)\frac{\partial\varphi(x;0)}{\partial x}dx = \\ = \int_0^T \int_0^\infty |u(x;t)|^q\varphi(x;t)dxdt \tag{16.5}$$

*для любой такой функции $\varphi(x;t) \in C^1[0;T;C^1[0;\infty)]$, что, во-первых, $\varphi(x;T) = 0$ $\forall x \in [0;\infty)$, во-вторых, $\varphi(x;t) = 0$ $\forall (x;t) \in [L;\infty) \times [0;T]$ при некотором $L > 0$.*

**Определение 2.** *Говорят, что функция $u_0(x)$ принадлежит классу $U_1$, если $u_0(\cdot) \in L_q(0;\infty)$, причём существует такой собственный интервал $(0;L) \subset (0;\infty)$, что $u_0(\cdot) \in H^1(0;L)$, $u_0(0) = 0$, но $u_0(x)$ не равно тождественно нулю на этом интервале.*

**Теорема.** *Пусть $u_0(x) \in U_1$, тогда не существует слабого решения задачи ни при каком $T > 0$.*

Шаг 1. Докажем, что $u(x;t) = 0$ почти всюду на $(0;\infty) \times [0;T]$. Интегральное тождество (16.5) должно выполняться для всех $\varphi(\cdot)$, указанных в определении, а значит, и для $\varphi(\cdot)$ следующего вида: $\varphi(x;t) = f_L(x)g(t)$, где $f_L(x) = f_0(x/L)$, $g(t) = (1-t/T)^m$, $m \geqslant 2$, а $f_0(\cdot) \in C^\infty[0;\infty)$, причём $f_0(s) = 1$ при $0 \leqslant s \leqslant 1/2$, $f_0(s) = 0$ при $s \geqslant 1$.

Обозначим правую часть (16.5) через $I_L$ и будем оценивать с помощью левой части.

- Во-первых, в силу неравенства Гёльдера,

$$\left| \int\limits_0^T \int\limits_0^\infty u(x;t) \frac{\partial^2 \varphi(x;t)}{\partial t \partial x} dx dt \right| \leqslant c_1(T) c_2(L) I_L^{1/q},$$

где

$$c_1(T) = \left( \int\limits_0^T \frac{|g'(t)|^{q'}}{g^{q'/q}(t)} dt \right)^{1/q'},$$

$$c_2(L) = \left( \int\limits_0^\infty \frac{|f_L'(x)|^{q'}}{f_L^{q'/q}(x)} dx \right)^{1/q'},$$

$q'$ определяется условием $1/q + 1/q' = 1$.

- Во-вторых,

$$\left| \int\limits_0^\infty u_0(x) \frac{\partial \varphi(x;0)}{\partial x} dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^\infty u_0(x) f_L'(x) dx \right| \leqslant c_3(L) \|u_0\|_{L_q(0;\infty)},$$

где

$$c_3(L) = \left( \int\limits_0^\infty |f_L'(x)|^{q'} dx \right)^{1/q'}.$$

Перейдя к переменной $s = x/L$, получим, что $c_2(L) = c_0 L^{-1+1/q'}$, $c_3(L) = c_4 L^{-1+1/q'}$, где

$$c_0 = \left( \int\limits_{1/2}^{1} \frac{|f_0'(s)|^{q'}}{f_0^{q'/q}(s)} ds \right)^{1/q'},$$

$$c_4 = \left( \int\limits_{1/2}^{1} |f_0'(s)|^{q'} ds \right)^{1/q'}.$$

Применяя найденные оценки в интегральном тождестве (16.5), придём к неравенству

$$I_L \leqslant c_1(T) c_0 L^{-1+1/q'} I_L^{1/q} + \|u_0\|_{L_q(0;\infty)} c_4 L^{-1+1/q'}.$$

Первое слагаемое правой части этого неравенства оценим с помощью неравенства Юнга с параметром $\varepsilon$, то есть

$$ab \leqslant \varepsilon a^q + \frac{b^{q'}}{q'(\varepsilon q)^{q'/q}} \ (a, b \geqslant 0, \ \varepsilon > 0),$$

и сгруппируем слагаемые, пропорциональные $\varepsilon$:

$$(1-\varepsilon) I_L \leqslant \|u_0\|_{L_q(0;\infty)} c_4 L^{-1+1/q'} + \frac{c_1^{q'} c_0^{q'} L^{1-q'}}{q'(\varepsilon q)^{q'/q}}.$$

Пусть $\varepsilon = 1/2$:

$$I_L \leqslant 2\|u_0\|_{L_q(0;\infty)} c_4 L^{-1+1/q'} + \left(\frac{2}{q}\right)^{q'/q} \frac{2 c_1^{q'} c_0^{q'} L^{1-q'}}{q'}. \tag{16.6}$$

Пусть теперь $L$ принимает натуральные зачения: $L = N \in \mathbf{N}$. Введём функциональную последовательность $\theta_N(x;t) = f_N(x) g(t) |u(x;t)|^q$. Заметим, что $\theta_N(x;t) \leqslant \theta_{N+1}(x;t)$ для почти всех $(x;t) \in (0;\infty) \times [0;T]$. Кроме того, из (16.6) следует, что $\int_0^T \int_0^\infty \theta_N(x;t) dx dt \leqslant K$, где

$K$ — некоторая конечная постоянная (не зависящая от $N$). Тогда из теоремы Леви[51] вытекает, что

$$\lim_{N\to\infty} \theta_N(x;t) = \theta(x;t) \equiv g(t)|u(x;t)|^q$$

для почти всех $(x;t) \in (0;\infty) \times [0;T]$, причём

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_0^T \int\limits_0^\infty \theta_N(x;t)dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_0^\infty \theta(x;t)dxdt.$$

Таким образом, $\lim\limits_{N\to\infty} I_N = I$, где

$$I_N = \int\limits_0^T \int\limits_0^\infty f_N(x)g(t)|u(x;t)|^q dxdt,$$

$$I = \int\limits_0^T \int\limits_0^\infty g(t)|u(x;t)|^q dxdt,$$

то есть последовательность $(I_N)$ сходится, а следовательно, ограничена. Кроме того, перепишем (16.6) в виде

$$0 \leqslant I_N \leqslant 2\|u_0\|_{L_q(0;\infty)} c_4 N^{-1+1/q'} + \left(\frac{2}{q}\right)^{q'/q} \frac{2c_1^{q'} c_0^{q'} N^{1-q'}}{q'}$$

и заметим, что правая часть этого неравенства стремится к нулю при стремлении $N$ к бесконечности. Значит, $I = 0$, откуда следует, что $u(x;t) = 0$ для почти всех $(x;t) \in (0;\infty) \times [0;T]$.

Шаг 2. Подставив $u(x;t) = 0$ в интегральное тождество, определяющее решение, получим необходимое условие существования решения:

$$\int_0^\infty u_0(x) \frac{\partial \varphi(x;0)}{\partial x} dx = 0 \qquad (16.7)$$

[51] Напомним **теорему Леви**. Рассмотрим последовательность функций $(f_n(x))$, интегрируемых по Лебегу на множестве $A$. Пусть они удовлетворяют условиям $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ $\forall n$ и $\int_A f_n(x)dx \leqslant K = \text{const}$, тогда почти всюду на $A$ существует предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, интегрируемая на $A$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A f(x)dx$.

для любой функции $\varphi(\cdot)$, удовлетворяющей перечисленным в определении условиям. Выберем $\varphi(x;t) = F(x)G(t)$, причём $G(0) = 1$. Тогда из (16.7) вытекает, что

$$\int_0^\infty u_0(x)F'(x)dx = 0 \tag{16.8}$$

для любой $F(\cdot) \in C^1[0;\infty)$, удовлетворяющей условию $F(x) = 0\ \forall x > L$ для некоторого $L > 0$. Можно выбрать $F(\cdot) \in C_0^\infty(0;L)$, тогда из (16.8) следует, что

$$0 = \int_0^L u_0(x)F'(x)dx = -\int_0^L u_0'(x)F(x)dx$$

для любой такой $F(\cdot)$. А следовательно, $u_0'(x) = 0$ почти всюду на $(0;L)$. Так как $u_0(\cdot) \in H^1(0;L) \subset C^\mu[0;L]$ при $\mu \in (0;1/2)$, то $u_0(x) = 0$ на $(0;L)$, что противоречит определению класса $U_1$. Следовательно, предположение о существовании решения на временном промежутке $(0;T)$ неверно, и имеет место мгновенное разрушение, **что требовалось доказать**.

## § 3. Линеаризация

Здесь под линеаризацией подразумевается сведение нелинейного уравнения в частных производных к линейному с помощью замены переменных, что не эквивалентно методам неявной линеаризации, обсуждавшимся ранее[52]. Линеаризуемые уравнения встречаются довольно редко, но следует сказать несколько слов и о них.

- В ряде случаев замену удаётся подобрать. Например, сведём уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

[52] Например, к уравнению Кортевега – де Фриза применим метод обратной задачи рассеяния, однако оно не сводится к линейному заменой переменных.

к линейному с помощью замены переменной $u = f(v)$. Подставив это выражение в уравнение, получим:

$$f'(v)v'_t = \underline{f''(v){v'_x}^2} + f'(v)v''_{x^2} + \underline{af(v){f'}^2(v){v'_x}^2}.$$

Заметим, что подчёркнутые члены пропорциональны ${v'_x}^2$, и если бы сумма их коэффициентов была равна нулю, то уравнение можно было бы сократить на $f'(v)$, и оно стало бы линейным. Таким образом, надо потребовать, чтобы выполнялось равенство

$$f''(v) + af(v){f'}^2(v) = 0.$$

Понизим порядок, введя переменную $g = f'(v)$, тогда $f''(v) = gg'(f)$, и требуемое условие примет вид

$$gg'(f) + afg^2 = 0.$$

Проинтегрировав это соотношение, получим квадратурную формулу:

$$\int e^{af^2/2} df = v$$

(выбор постоянных интегрирования существенной роли не играет). Таким образом, функция $f(v)$, определяемая квадратурной формулой $\int e^{af^2/2} df = v$, сводит уравнение к линейному:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

- Можно подобрать линеаризующую замену с помощью группового анализа. Покажем этот подход на примере уравнения Бюргерса в потенциальной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \qquad (16.9)$$

Можно показать, что оно допускает следующие операторы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x};$$
$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t};$$
$$X_3 = \frac{\partial}{\partial u};$$
$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t};$$
$$X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial u};$$
$$X_6 = 4xt\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)\frac{\partial}{\partial u};$$
$$X_\infty = b(x;t)e^{-u}\frac{\partial}{\partial u},$$

где $b(\cdot)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности $b'_t = b''_{x^2}$. «Бесконечномерный» оператор $X_\infty$, содержащий произвольное решение уравнения в частных производных $b(\cdot)$, указывает на то, что уравнение, возможно, линеаризуемо с помощью замены переменной. Кроме того, можно показать, что линейное уравнение теплопроводности $v'_t = v''_{x^2}$

допускает следующие операторы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x};$$
$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t};$$
$$X_3 = v\frac{\partial}{\partial v};$$
$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t};$$
$$X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xv\frac{\partial}{\partial v};$$
$$X_6 = 4xt\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)v\frac{\partial}{\partial v};$$
$$X_\infty = b(x;t)\frac{\partial}{\partial v},$$

где $b(\cdot)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности $b'_t = a^2 b''_{x^2}$

Названные списки допускаемых операторов совпадут, если переменные $u$ и $v$ согласованы по правилам $v\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}$ и $\frac{\partial}{\partial v} = e^{-u}\frac{\partial}{\partial u}$ — для этого достаточно взять $u = \ln v$. Подставив это выражение в (16.9), после упрощений получим линейное уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \qquad (16.10)$$

Заметим, кроме того, что уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2w\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (16.11)$$

и уравнение Бюргерса в потенциальной форме (16.9) связаны следующим образом. Продифференцируем (16.9) почленно по $x$ и введём переменную $w = u'_x$ — получим (16.11). Отсюда следует замечательный факт: уравнение (16.11) сводится к линейному (16.10) с помощью замены $w = v'_x/v$. Непосредственно из анализа уравнения Бюргерса получить такое преобразование затруднительно. Это связано с тем, что в названной замене фигурируют не только сами переменные (неизвестная функция и независимые переменные), но и производная, тогда как уравнение не допускает бесконечномерного оператора.

# Глава XVII. Задачи с решениями

Задачи в этой главе подобраны в соответствии с темами теоретического курса следующим образом:

- математическое моделирование: 1;
- точные решения, их применение и контрпримеры: 2–9;
- неявная линеаризация: 10;
- вопросы локальной и глобальной разрешимости: 11–15;
- асимптотика: 16–17;
- групповой анализ: 18–28;
- анализ Пенлеве: 29;
- линеаризация заменой переменных: 30–31.

**Задача 1.** *Рассмотрим поверхности, заданные в виде графика явной функции: $z = z(x; y)$, где $(x; y) \in \Omega \subset R^2$. Выведите уравнение минимальных поверхностей, то есть уравнение, определяющее все возможные конфигурации мембраны (формы поверхности), минимизирующие её площадь.*

**Решение.** Требуется вывести уравнение, определяющее функции $z = z(x; y)$, минимизирующие площадь поверхности:

$$S = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy \to \min .$$

Таким образом, надо составить уравнение для функций, минимизирующих этот функционал. Обозначим подынтегральное выражение через $L$. Составим уравнение Эйлера–Лагранжа[53]:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{z_x}{\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}}\right) = 0.$$

После упрощений получим:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \\ -2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

**Ответ.** $\left(1 + {z'_y}^2\right) z''_{x^2} + \left(1 + {z'_x}^2\right) z''_{y^2} - 2z'_x z'_y z''_{xy} = 0.$

**Задача 2.** *Найдите решения типа бегущей волны уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^n \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

**Решение.** Решения типа бегущей волны представляют собой решения вида $u(x;t) = f(z)$, где $z = x - at$ ($a = \mathrm{const} \neq 0$ — скорость распространения волны). Заметим, что левая часть равна $-af'(z)$, тогда как выражение в скобках равно $f^n(z)f'(z)$. Дифференцируя это выражение по $x$ как сложную функцию, получим,

[53]Напомним, что в общем случае оно имеет вид $\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial z'_x}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial L}{\partial z'_y}\right) = 0$.

что правая часть равна $(f^n(z)f'(z))'$ (штрих обозначает дифференцирование по $z$). Тогда уравнение примет вид

$$-af' = (f^n f')' \Leftrightarrow f^n f' = -af + c_1.$$

В общем случае оно имеет решение в виде квадратуры:

$$\int \frac{f^n df}{-af + c_1} = z + c_2. \tag{17.1}$$

Например, при n=1 это выражение можно упростить до неявной формулы:

$$-\frac{1}{a}\left(f + \frac{c_1}{a}\ln\left|f - \frac{c_1}{a}\right|\right) = z + c_2.$$

**Ответ.** $u(x;t) = f(x - at)$, где функция одного аргумента $f(\cdot)$ определяется квадратурной формулой (17.1), $a$ — произвольная ненулевая постоянная.

**Задача 3.** *Найдите автомодельные решения уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^n$$

*(возможно выражение решения через решение некоторого обыкновенного дифференциального уравнения).*

**Решение.** Введём предварительную форму решения:

$$u = t^\alpha f(z),\ z = xt^\beta.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = t^\alpha f'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = t^{\alpha+\beta} f'(z) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t^{\alpha+2\beta} f''(z).$$

Кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha t^{\alpha-1} f(z) + t^{\alpha-1} f'(z)\frac{\partial z}{\partial t} =$$
$$= \alpha t^{\alpha-1} f(z) + t^{\alpha-1} f'(z)\beta x t^{\beta-1} = t^{\alpha-1}(\alpha f(z) + \beta z f'(z)).$$

Подставим полученные выражения в уравнение:

$$t^{\alpha-1}(\alpha f(z) + \beta z f'(z)) = t^{\alpha+2\beta} f''(z) + t^{n\alpha} f^n(z),$$

что равносильно

$$\alpha f(z) + \beta z f'(z) = t^{2\beta+1} f''(z) + t^{n\alpha-\alpha+1} f^n(z).$$

Для того чтобы получить обыкновенное дифференциальное уравнение, содержащее явно только переменные $z$ и $f$, потребуем, чтобы показатели степеней $t$ были равны нулю: $2\beta+1 = n\alpha-\alpha+1 = 0$, откуда $\beta = -1/2$, $\alpha = 1/(1-n)$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{1}{1-n} f(z) - \frac{1}{2} z f'(z) = f''(z) + f^n(z). \tag{17.2}$$

**Ответ.** $u(x;t) = t^{1/(1-n)} f(xt^{-1/2})$, где функция одного аргумента $f(\cdot)$ определяется уравнением (17.2).

**Задача 4.** *Найдите точные решения уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^n \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

*методом мультипликативного разделения переменных.*

**Решение.** Метод мультипликативного разделения переменных подразумевает поиск решений в форме $u = f(x)g(t)$, где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — функции одного аргумента, отличные от постоянных. Подставим это выражение в уравнение:

$$f(x)g''(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f^n(x) g^{n+1}(t) f'(x)\right),$$

откуда

$$\frac{g''(t)}{g^{n+1}(t)} = \frac{1}{f(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left(f^n(x) f'(x)\right).$$

Здесь левая часть зависит только от $t$, правая — только от $x$, следовательно, они равны постоянной.

- Во-первых,
$$\frac{g''(t)}{g^{n+1}(t)} = c.$$
Приведём это уравнение к виду
$$g'(t)g''(t) = cg^{n+1}(t)g'(t),$$
а затем проинтегрируем почленно, взяв для простоты постоянную интегрирования равной нулю:
$$g'^2(t) = \frac{2c}{n+2}g^{n+2}(t),$$
откуда, проинтегрировав и выразив $g$, получим:
$$g(t) = \left(c_1 \pm n\sqrt{\frac{c}{2(n+2)}t}\right)^{-2/n}.$$

- Во-вторых,
$$\frac{1}{f(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left(f^n(x)f'(x)\right) = c,$$
то есть
$$nf^{n-1}f'^2 + f^n f'' = cf.$$
Понизим порядок, введя переменную $z = f'$: тогда $f''(x) = zz'(f)$. Запишем уравнение в виде
$$nf^{n-1}z^2 + f^n zz'(f) = cf.$$
Теперь линеаризуем это уравнение, введя переменную $w = z^2$:
$$f^n w' + 2nf^{n-1}w = 2cf.$$
Заметим, что, умножив левую и правую части уравнения на $f^n$, получим в левой части полную производную. Проинтегируем почленно, взяв для простоты постоянную интегрирования равной нулю:
$$f^{2n}w = 2c\frac{f^{n+2}}{n+2}.$$

Так как $f'^2 = w$, то отсюда легко получить, что

$$f(x) = \left(c_2 \pm n\sqrt{\frac{c}{2(n+2)}}x\right)^{2/n}.$$

Собирая полученные выражения, придём к трёхпараметрическому семейству решений:

$$u(x;t) = \left[\frac{c_2 \pm n\sqrt{\frac{c}{2(n+2)}}x}{c_1 \pm n\sqrt{\frac{c}{2(n+2)}}t}\right]^{2/n}.$$

Однако, здесь не все постоянные независимы. Действительно, положим $c_{1;2} = \pm\tilde{c}_{1;2}n\sqrt{c/(2(n+2))}$, затем сократим дробь и получим семейство с двумя параметрами:

$$u(x;t) = \left[\frac{\tilde{c}_2 + x}{\tilde{c}_1 + t}\right]^{2/n}.$$

**Ответ.** $u(x;t) = [(x+c_2)/(t+c_1)]^{2/n}$.

**Задача 5.** *Найдите точные решения уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

*методом аддитивного разделения переменных.*

**Решение.** Метод аддитивного разделения переменных подразумевает поиск решений в форме $u = f(x) + g(t)$, где $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — функции одного аргумента, отличные от постоянных. Подставим это выражение в уравнение:

$$g''(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left((f(x) + g(t))f'(x)\right).$$

Пусть $f(x)$ является многочленом степени $n$ от $x$. Тогда легко показать, что правая часть уравнения является многочленом степени $(2n-2)$, тогда как левая не содержит $x$, то есть является многочленом нулевой степени. Значит, $2n-2=0 \Leftrightarrow n=1$, а поэтому функция линейна: $f(x)=c_1x+c_2$. Подставив это выражение в уравнение, после упрощений получим:

$$g''(t)=c_1^2 \Leftrightarrow g(t)=\frac{c_1^2}{2}t^2+c_3t+c_4.$$

Таким образом,

$$u=c_1x+c_2+\frac{c_1^2}{2}t^2+c_3t+c_4.$$

Переобозначив $(c_2+c_4)$ за $c_2$, придём к трёхпараметрическому семейству:

$$u=c_1x+c_2+\frac{c_1^2}{2}t^2+c_3t.$$

**Ответ.** $u(x;t)=c_1x+c_2+c_1^2t^2/2+c_3t$.

**Задача 6.** *Найдите точные решения уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

*являющиеся многочленами от $x$ (с коэффициентами, зависящими от $y$).*

**Решение.** Для начала определим степень $n$ требуемого многочлена. Так как дифференцирование по $x$ уменьшает его степень на единицу, а дифференцирование по $y$ не меняет[54], то первое слагаемое уравнения является многочленом степени $(2n-3)$, а второе — степени $n$. Эти степени должны быть равны, следовательно, $n=3$, и предварительная форма решения такова:

$$u=x^3f(y)+x^2g(y)+xh(y)+k(y)$$

($f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot)$, $k(\cdot)$ — функции одного аргумента, подлежащие определению). Подставим это выражение в

[54]Не будем рассматривать случай, когда старший коэффициент является постоянным.

уравнение и раскроем скобки:

$$18f^2x^3 + 18fgx^2 + 4g^2x + 6fhx + 2gh + f''x^3 + g''x^2 + \\ + h''x + k'' = 0.$$

Таким образом, кубический многочлен от $x$ тождественно равен нулю, следовательно, равны нулю его коэффициенты:

$$\begin{cases} 18f^2 + f'' = 0; \\ 18fg + g'' = 0; \\ 4g^2 + 6fh + h'' = 0; \\ 2gh + k'' = 0. \end{cases}$$

Ограничимся рассмотрением решения первого уравнения системы, являющегося степенной функцией: $f(y) = Ay^\nu$. Легко проверить, что это равенство будет выполняться тождественно при $\nu = -2$, $A = -1/3$, то есть $f(y) = -y^{-2}/3$. Тогда второе уравнение примет вид

$$g'' - 6y^{-2}g = 0.$$

Несложно убедиться, что его общим решением будет $g(y) = B_1y^{-2} + B_2y^3$, $B_{1;2} = \mathrm{const}$. Возьмём для простоты $g(y) = By^3$, $B = \mathrm{const}$. Третье уравнение примет вид

$$h'' - 2y^{-2}h + 4B^2y^6 = 0.$$

Его общее решение можно найти с помощью стандартных приёмов — ограничимся подбором решения в виде степенной функции: $h(y) = Cy^\kappa$. Равенство верно при $\kappa = 8$, $C = -2B^2/27$, откуда $h(y) = -2B^2y^8/27$. Подставляя найденные функции в четвёртое уравнение и дважды интегрируя, получим: $k(y) = B^3y^{13}/1053 + c_1y + c_2$, $c_{1;2} \in \mathbf{R}$. Таким образом,

$$u = -\frac{x^3y^{-2}}{3} + Bx^2y^3 - \frac{2B^2xy^8}{27} + \frac{B^3y^{13}}{1053} + c_1y + c_2.$$

**Ответ.** $u(x;y) = -x^3y^{-2}/3 + c_0x^2y^3 - 2c_0^2xy^8/27 + c_0^3y^{13}/1053 + c_1y + c_2$, $c_{0;1;2} \in \mathbf{R}$.

**Задача 7.** *Приведите пример нелинейного уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами, которое имеет нетривиальное решение типа бегущей волны.*

**Решение.** Рассмотрим уравнение

$$(x+t)\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Пусть $u = f(z)$, где $z = x + t$, а не $z = x - at$ с произвольной «скоростью» $a$. Тогда уравнение принимает вид

$$zf'(z) = f(z)f''(z),$$

то есть получается обыкновенное дифференциальное уравнение для $f(z)$, не содержащее явно $x$ и $t$. Достаточно построить хотя бы одно нетривиальное решение — подберём его в виде $f(z) = Az^n$. Подставив это выражение в уравнение и упростив, получим:

$$1 = A(n-1)z^{n-2}.$$

Это равенство будет тождеством при $n = 2$, $A = 1$, откуда $u(x;t) = (x+t)^2$.

**Ответ.** В качестве примера подходит уравнение $(x+t)u'_t = uu''_{x^2}$: оно имеет решение $u(x;t) = (x+t)^2$.

**Задача 8.** *Постройте точные решения уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u^3$$

*методом мультипликативного разделения переменных. (Здесь $f(t)$ — известная функция, не равная нулю.)*

**Решение.** Несмотря на то, что в уравнении «много» слагаемых, оно имеет нетривиальные решения указанного вида. Возьмём $u = \varphi(x)\psi(t)$ и преобразуем уравнение к виду

$$\frac{\psi'(t)}{f(t)\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{\psi^2(t)}{f(t)}\left(\varphi'^2(x) - \varphi^2(x)\right).$$

Потребуем, чтобы коэффициенты, зависящие от $x$, были постоянными: тогда получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $\psi(t)$. Таким образом, приходим к системе:

$$\begin{cases} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = c_1; \\ \varphi'^2(x) - \varphi^2(x) = c_2; \\ \frac{\psi'(t)}{f(t)\psi(t)} = c_1 + c_2\frac{\psi^2(t)}{f(t)}. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $c_1 > 0$. Из первого уравнения системы получим: $\varphi(x) = k_1 e^{\sqrt{c_1}x} + k_2 e^{-\sqrt{c_1}x}$, где $k_{1;2}$ — произвольные постоянные. Подставим это выражение во второе уравнение:

$$(c_1 - 1)k_1^2 e^{2\sqrt{c_1}x} + (c_1 - 1)k_2^2 e^{-2\sqrt{c_1}x} - 2(c_1 + 1)k_1 k_2 = c_2.$$

Здесь левая часть должна быть тождественно равна постоянной — это будет верно при $c_1 = 1$. Тогда $c_2 = -4k_1k_2$.

Несложно показать, что при $c_1 \leqslant 0$ система не даёт $\varphi(x)$, не равных тождественно постоянной.

Теперь остаётся найти $\psi(t)$ из третьего уравнения системы. Запишем его в виде

$$\psi^{-3}\psi' = c_1 f\psi^{-2} + c_2$$

и введём переменную $y = \psi^{-2}$. Тогда

$$y' + 2c_1 f y = -2c_2.$$

Умножим левую и правую части на такую функцию $E(t)$, чтобы в левой части появилась полная производная. Для этого наложим условие $E' = 2c_1 f E$, откуда

$E = e^{2c_1 \int f(t)dt}$ (имеется в виду одна любая первообразная). Теперь можно проинтегрировать уравнение квадратурой:

$$Ey' + E'y = -2c_2 E \Leftrightarrow Ey = -2c_2 \int E dt + k, \ k = \mathrm{const}\,.$$

Вернёмся к переменной $\psi$:

$$\psi(t) = \pm \frac{e^{c_1 \int f(t)dt}}{\sqrt{2c_2 \int E dt + k}}.$$

**Ответ.**
$u(x;t) = (k_1 e^{\sqrt{c_1}x} + k_2 e^{-\sqrt{c_1}x}) e^{c_1 \int f(t)dt} \left(2c_2 \int E dt + k\right)^{-1/2}$, где $E = e^{2c_1 \int f(t)dt}$, $c_{1;2}$, $k_{1;2}$, $k$ — произвольные постоянные[55].

**Задача 9.** *Решите задачу:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^n \frac{\partial u}{\partial x}\right) \ (x \geqslant 0, \ t \geqslant 0); \\ u(x;0) = 0; \\ u(0;t) = kt^{1/n}, \end{cases}$$

*считая, что функция $u(\cdot)$ достаточно гладкая, а $n$ и $k$ — положительные параметры.*

**Решение.** Будем искать решение в виде

$$u(x;t) = \begin{cases} f(z), & 0 \leqslant x \leqslant \lambda t, \\ 0, & x > \lambda t, \end{cases}$$

где $z = \lambda t - x$. Для $f(\cdot)$ несложно получить равенство $\lambda f(z) + c_1 = f^n(z) f'(z)$, $c_1 = \mathrm{const}$ (смотрите задачу 2). Так как эта функция непрерывна, а $f(0) = 0$, то $c_1 = 0$. Тогда уравнение можно упростить: $f^n/n = \lambda z + c_2$, $c_2 = \mathrm{const}$. Подставив $z = 0$, убедимся, что и $c_2 = 0$. Значит,

$$u(x;t) = \begin{cases} (\lambda n)^{1/n} (\lambda t - x)^{1/n}, & 0 \leqslant x \leqslant \lambda t, \\ 0, & x > \lambda t, \end{cases}$$

[55] Знак $\pm$ можно не писать, поскольку $k_{1;2}$ произвольны.

и остаётся определить $\lambda$. Условие при $t = 0$, очевидно, выполнено, а условие при $x = 0$ будет выполнено при $(\lambda n)^{1/n}(\lambda t)^{1/n} = kt^{1/n}$, откуда $\lambda = k^{n/2}/\sqrt{n}$.

**Ответ.** $u(x;t) = (k^n t - k^{n/2}\sqrt{n}x)^{1/n}$ при $0 \leqslant x \leqslant k^{n/2}t/\sqrt{n}$, $u(x;t) = 0$ при $x > k^{n/2}t/\sqrt{n}$.

**Задача 10.** *К какому уравнению для функции $u(x;t)$ приводит условие совместности уравнений*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -a\lambda^{-1}e^{u} + a\lambda^{-1}e^{-u}\varphi^2,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda + \frac{\partial u}{\partial x}\varphi - \lambda\varphi^2?$$

**Решение.** Продифференцировав первое уравнение по $x$, а второе — по $t$, получим два выражения для смешанной производной $\varphi$:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} = -a\lambda^{-1}e^{u}\frac{\partial u}{\partial x} - a\lambda^{-1}e^{-u}\frac{\partial u}{\partial x}\varphi^2 + 2a\lambda^{-1}e^{-u}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\varphi + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - 2\lambda\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Подставив в правые части этих равенств выражения для $\varphi'_x$ и $\varphi'_t$ из условия и приравняв эти правые части, после упрощений получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = -4a\,\mathrm{sh}\,u.$$

**Ответ.** $u''_{xt} = -4a\,\mathrm{sh}\,u$.

**Задача 11.** *Докажите, что $L_3(0;1) \subset L_2(0;1)$. (Не забудьте показать, что отношение строгое, то есть названные множества не совпадают.)*

**Решение.** Достаточно показать, что из сходимости интеграла, определяющего норму в $L_3(0;1)$, следует сходимость интеграла, соответствующего норме в $L_2(0;1)$. А это вытекает из того, что, в силу неравенства Гёльдера,

$$\|f\|_{L_2(0;1)} = \sqrt{\int\limits_0^1 f^2 dx} \leqslant \sqrt{\|1\|_{L_p(0;1)} \|f^2\|_{L_q(0;1)}}$$

при произвольных $p$ и $q$, удовлетворяющих условиям $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $1/p + 1/q = 1$. Выбирая $q = 3/2$, $p = 3$, получим требуемое: $\|f\|_{L_2(0;1)} \leqslant \|f\|_{L_3(0;1)}$.

Поясним, что указанное отношение является строгим, поскольку, например, $f(x) = x^{-5/12}$ находится в $L_2(0;1)$, но не в $L_3(0;1)$.

**Задача 12.** *Пусть $u(x;t) \in X_T = C^1\left[0;T;H_0^1(\Omega)\right)$, где $\Omega$ — ограниченное подмножество $\boldsymbol{R}^3$ с достаточно гладкой границей. Обозначим $\Phi = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}$, $W = \|u'_t\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u'_t\|^2_{L_2(\Omega)}$. Докажите, что ${\Phi'}^2 \leqslant 4\Phi W$.*

**Решение.** Оценка следует из неравенств Коши–Буняковского–Шварца. Действительно,

$$\left|\frac{\Phi'}{2}\right| = \left|\int\limits_\Omega \left(uu'_t + u'_x u''_{xt} + u'_y u''_{yt} + u'_z u''_{zt}\right) dxdydz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega \left|uu'_t + u'_x u''_{xt} + u'_y u''_{yt} + u'_z u''_{zt}\right| dxdydz \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega \sqrt{S_1}\sqrt{S_2} dxdydz \leqslant \sqrt{\int\limits_\Omega S_1 dxdydz \int\limits_\Omega S_2 dxdydz} =$$

$$= \sqrt{\Phi W},$$

где $S_1 = u^2 + {u'_x}^2 + {u'_y}^2 + {u'_z}^2$, $S_2 = {u'_t}^2 + {u''_{xt}}^2 + {u''_{yt}}^2 + {u''_{zt}}^2$. Таким образом, $|\Phi'/2| \leqslant \sqrt{\Phi W}$, что равносильно требуемому:

$${\Phi'}^2 \leqslant 4\Phi W.$$

**Задача 13.** *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + au + (\lambda, \nabla)u^2 = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x;0) = u_0(x) \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

*где* $u = u(x;t)$, $x \in \Omega$, $\Omega$ *— ограниченное подмножество* $\boldsymbol{R}^3$ *с достаточно гладкой границей*[56], $t > 0$ $a = \mathrm{const} \in \boldsymbol{R}$, $\lambda = \mathrm{const} \in \boldsymbol{R}^3$. *Покажите, что обобщенное решение этой задачи из класса* $C^1\left[0;\ T; H_0^1(\Omega)\right)$ *не разрушится ни при каком конечном* $T$.

**Решение.** Запишем интегральное тождество, определяющее обобщённое решение задачи:

$$\int\limits_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + au + (\lambda, \nabla)u^2 \right) w dx = 0$$

(для всех $w(\cdot) \in H_0^1(\Omega)$ и для всех $t \in [0;T)$). Положив в нём $w = u$, после несложных преобразований получим «первое энергетическое тождество»:

$$\Phi' = 2a\|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

где $\Phi = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}$ (поясним, что $\int_\Omega u(\lambda, \nabla)u^2 dx = 0$). Отсюда следует, что

$$\Phi' \leqslant 2a\Phi \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-2at}\Phi\right) \leqslant 0,$$

а следовательно,

$$e^{-2at}\Phi(t) - e^{-2a\cdot 0}\Phi(0) \leqslant 0 \Leftrightarrow \Phi(t) \leqslant \Phi(0)e^{2at}.$$

Из этого соотношения видно, что $\Phi(t)$ (а следовательно, и $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$) имеет конечное значение при любом конечном $t$. Значит, решение не разрушится, **что требовалось доказать**.

[56] Здесь и далее в задачах на оценки времени существования решения имеется в виду, что выполнены условия теоремы Соболева о вложении пространства $H_0^1(\Omega)$ в соответствующее задаче $L_p(\Omega)$ (с. 102).

**Задача 14.** *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \mu(x)u^3 = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x;0) = u_0(x) \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

*где* $u = u(x;t)$, $x \in \Omega$, $\Omega$ *— ограниченное подмножество* $\boldsymbol{R}^3$ *с достаточно гладкой границей,* $t > 0$, $\mu(x) \in L_4(\Omega)$, *причём* $\mu(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \Omega$. *На каком временном промежутке заведомо существует её решение из класса* $C^1\left[0;\ T; H_0^1(\Omega)\right)$? *(Начальные данные считать нетривиальными.)*

**Решение.** Подобно тому, как было сделано в предыдущей задаче, составим первое энергетическое тождество:

$$\Phi' = 2\int_\Omega \mu u^4 dx. \tag{17.3}$$

Применим неравенство Гёльдера, заметив, что $4^{-1} + (4/3)^{-1} = 1$:

$$\Phi' \leqslant 2\|\mu\|_{L_4(\Omega)}\|u^4\|_{L_{4/3}(\Omega)} = 2\|\mu\|_{L_4(\Omega)}\|u\|^4_{L_{16/3}(\Omega)}.$$

К последнему выражению применима теорема вложения Соболева, следовательно,

$$\Phi' \leqslant 2\|\mu\|_{L_4(\Omega)}C^4_{16/3}\|u\|^4_{H_0^1(\Omega)} \leqslant 2C^4_{16/3}\|\mu\|_{L_4(\Omega)}\Phi^2,$$

где $C_{16/3}$ — наилучшая постоянная вложения $H_0^1(\Omega)$ в $L_{16/3}(\Omega)$. Приведём неравенство к виду

$$\Phi^{-2}\Phi' \leqslant 2C^4_{16/3}\|\mu\|_{L_4(\Omega)},$$

а затем проинтегрируем его почленно от 0 до $t$:

$$-\Phi^{-1}(t) + \Phi^{-1}(0) \leqslant 2C^4_{16/3}\|\mu\|_{L_4(\Omega)}t.$$

Это неравенство равносильно следующему:

$$\Phi \leqslant \left(\Phi^{-1}(0) - 2C^4_{16/3}\|\mu\|_{L_4(\Omega)}t\right)^{-1}, \tag{17.4}$$

поскольку при нетривиальных начальных данных $\Phi(0) > 0$, а из (17.3) видно, что $\Phi(t)$ — неубывающая функция от времени, и следовательно, она нигде не обратится в 0.

Из (17.4) вытекает, что $\Phi(t)$ (а следовательно, и $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$) имеет конечное значение при любом
$t < T_1 = (2C_{16/3}^4\|\mu\|_{L_4(\Omega)}\Phi(0))^{-1}$, тогда как при $t \geqslant T_1$ конечность $\Phi(t)$ не гарантирована.

**Ответ**[57]**.** Решение заведомо существует при $t < T_1 = (2C_{16/3}^4\|\mu\|_{L_4(\Omega)}\Phi(0))^{-1}$.

**Задача 15.** *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + u^3 + u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x;0) = u_0(x) \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

*где* $u = u(x;t)$, $x \in \Omega$, *где* $\Omega$ *— ограниченное подмножество* $\boldsymbol{R}^3$ *с достаточно гладкой границей,* $t > 0$. *К какому моменту времени заведомо разрушится её решение из класса* $C^1\left[0;\ T; H_0^1(\Omega)\right)$? *(Начальные данные считать нетривиальными.)*

**Решение.** Запишем интегральное тождество, определяющее обобщённое решение:

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + u^3 + u\right) w dx = 0 \,\forall w \in H_0^1(\Omega),\ \forall t > 0.$$

Положив в нём $w = u$ и $w = u'_t$, придём соответственно к первому и второму энергетическим тождествам:

$$-\frac{\Phi'(t)}{2} + \|u\|_{L_4(\Omega)}^4 + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0,$$

где $\Phi = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2$, и

$$-W + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|u\|_{L_4(\Omega)}^4 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0,$$

[57]Величину $\Phi(0)$ считаем известной, поскольку она очевидным образом выражается через начальные данные.

где $W = \|u_t'\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u_t'\|^2_{L_2(\Omega)}$. Выразив $\|u\|^4_{L_4(\Omega)}$ из первого тождества и подставив во второе, придём к равенству

$$W = \frac{\Phi''}{8} + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega 2uu_t' dx \leqslant \int\limits_\Omega \left(\frac{u^2}{\varepsilon} + \varepsilon {u_t'}^2\right) dx \leqslant \frac{\Phi}{\varepsilon} + \varepsilon W,$$

где $\varepsilon$ — пока произвольный положительный параметр. Следовательно,

$$W \leqslant \frac{\Phi''}{8} + \frac{\Phi}{4\varepsilon} + \frac{\varepsilon W}{4} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) W \leqslant \frac{\Phi''}{8} + \frac{\Phi}{4\varepsilon}.$$

Пусть $0 < \varepsilon < 4$, что обеспечивает положительность коэффициента при $W$ в полученном неравенстве. Сопоставим это неравенство с результатом задачи 6 (с. 181):

$$\Phi'^2 \leqslant 4\Phi W \leqslant 4\Phi\frac{\Phi''/8 + \Phi/(4\varepsilon)}{1 - \varepsilon/4},$$

что равносильно соотношению

$$\Phi\Phi'' - (1+\alpha)\Phi'^2 + \frac{2}{\varepsilon}\Phi^2 \geqslant 0,$$

где $1 + \alpha = 2 - \varepsilon/2$, то есть $\alpha = 1 - \varepsilon/2$. Пусть $\alpha > 0 \Leftrightarrow \varepsilon < 2$. Введём новую функцию $z(t)$ по правилу $\Phi = z^{-1/\alpha}$. Тогда после упрощений неравенство станет линейным:

$$z'' \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} z.$$

Коэффициент в правой части, очевидно, положителен — обозначим его через $k^2$ ($k > 0$). Положим $z(t) = v(t)e^{-kt}$. После упрощений получим:

$$v'' - 2kv' \leqslant 0 \Leftrightarrow (v'e^{-2kt})' \leqslant 0.$$

Проинтегрируем от 0 до $t$:

$$v' \leqslant v'_0 e^{2kt}$$

(нижний индекс 0 означает начальный момент времени). Ещё раз проинтегрируем:

$$v \leqslant \left(v_0 - \frac{v'_0}{2k}\right) + \frac{v'_0}{2k}e^{2kt}.$$

Вернёмся к переменной $z$, учитывая, что $v' = (z' + kz)e^{kt}$:

$$z \leqslant \frac{kz_0 - z'_0}{2k}e^{-kt} + \frac{kz_0 + z'_0}{2k}e^{kt}.$$

Теперь вернёмся к переменной $\Phi$, учитывая, что $z' = -\alpha\Phi^{-\alpha-1}\Phi'$:

$$\Phi \geqslant \frac{\left(2ke^{kt}\right)^{1/\alpha}}{\left((k\Phi_0^{-\alpha} + \alpha\Phi_0^{-\alpha-1}\Phi'_0) + (k\Phi_0^{-\alpha} - \alpha\Phi_0^{-\alpha-1}\Phi'_0)e^{2kt}\right)^{1/\alpha}}.$$

Эти переходы корректны, поскольку функция $\Phi$ в начальный момент не равна нулю в силу нетривиальности начальных данных, а в последующие моменты не равна нулю в силу своего неубывания, вытекающего из первого энергетического тождества.

Таким образом, $\Phi$ удалось оценить снизу дробью, в которой числитель всегда принимает конечные ненулевые значения, а знаменатель, как легко проверить, положителен в окрестности нуля и равен нулю при

$$t = T_2 = \frac{1}{2k}\ln\frac{k\Phi_0^{-\alpha} + \alpha\Phi_0^{-\alpha-1}\Phi'_0}{\alpha\Phi_0^{-\alpha-1}\Phi'_0 - k\Phi_0^{-\alpha}} = \frac{1}{2k}\ln\frac{k\Phi_0 + \alpha\Phi'_0}{\alpha\Phi'_0 - k\Phi_0}.$$

Величина $\Phi_0$ выражается через начальные данные очевидным образом, а $\Phi'_0$ можно выразить через начальные данные с помощью первого энергетического тождества, значит, эти величины можно считать известными. А параметры $\alpha$ и $k$ зависят от произвольного $\varepsilon \in (0; 2)$.

А именно, $\alpha = 1 - \varepsilon/2$, $k = \sqrt{\alpha/(1-\alpha)}$. При $\varepsilon \in (0;2)$ параметр $\alpha$ принимает значения из интервала $(0;1)$. Поэтому можно выразить $T_2$ через единственный произвольный параметр $\alpha \in (0;1)$:

$$T_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \ln \frac{\frac{\Phi_0'}{\Phi_0} + \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}}{\frac{\Phi_0'}{\Phi_0} - \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}}$$

(формула корректна при условии $\Phi_0'/\Phi_0 - 1/\sqrt{\alpha(1-\alpha)} > 0$, то есть при этом ограничении существует положительное значение $T_2$). Возьмём для простоты среднее значение: $\alpha = 1/2$, чему соответствует

$$T_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{\Phi_0' + 2\Phi_0}{\Phi_0' - 2\Phi_0}$$

(формула корректна при $\Phi_0' - 2\Phi_0 > 0$).

Отметим, что полученную оценку можно усовершенствовать. С одной стороны, можно минимизировать её по $\alpha \in (0;1)$, что даст значение, наиболее близкое к точному времени разрушения $T$. С другой стороны, приближая $\alpha$ к нулю или к единице, мы можем сделать выражение $1/\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$ сколь угодно близким к нулю, а значит, множество начальных данных, соответствующее условию $\Phi_0'/\Phi_0 - 1/\sqrt{\alpha(1-\alpha)} > 0$, — более широким.

**Ответ.** Решение заведомо разрушится к моменту $t = T_2 = 0,5\ln((\Phi_0' + 2\Phi_0)/(\Phi_0' - 2\Phi_0))$ (при условии на начальные данные $\Phi_0' - 2\Phi_0 > 0$).

**Задача 16.** *Покажите (формально), что задача Коши (12.1)*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \alpha\Delta u + \beta u^3 = 0; \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

*сводится к интегральному уравнению (12.3):*

$$\hat{u}(p,t) = \hat{u}_0(p)e^{-K(p)t} + \frac{\beta}{1+|p|^2}\int\limits_0^t e^{-K(p)(t-\tau)}\,d\tau \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbf{R}^N}\int\limits_{\mathbf{R}^N} \hat{u}(p-q,\tau)\hat{u}(q-r,\tau)\hat{u}(r,\tau)\,dq\,dr,$$

*где* $K(p) = \alpha|p|^2/(1+|p|^2)$.

**Решение.** Применим преобразование Фурье к левым и правым частям уравнения и равенства для $t = 0$ в задаче Коши и воспользуемся тем, что, во-первых, $\mathcal{F}[\Delta u] = -|p|^2\mathcal{F}[u]$, во-вторых,

$$\mathcal{F}\left[u^3\right] = \int\limits_{\mathbf{R}^N}\int\limits_{\mathbf{R}^N} \hat{u}(p-q,\tau)\hat{u}(q-r,\tau)\hat{u}(r,\tau)\,dq\,dr.$$

Уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(1+|p|^2\right)\hat{u}\right) + \alpha|p|^2\hat{u} =$$
$$= \beta\int\limits_{\mathbf{R}^N}\int\limits_{\mathbf{R}^N} \hat{u}(p-q,\tau)\hat{u}(q-r,\tau)\hat{u}(r,\tau)\,dq\,dr.$$

Умножим левую и правую части на $e^{K(p)t}/\left(1+|p|^2\right)$, чтобы в левой части появилась полная производная по $t$, проинтегрируем по времени от 0 до $t$, учитывая, что $\hat{u}(p;0) = \hat{u}_0(p)$, и выразим $\hat{u}$. Получим требуемое равенство. Требовалось вывести его формально[58], поэтому проверять корректность применения этих преобразований не надо.

[58]Напомним, что формальный вывод интегрального уравнения предшествовал определению обобщённого решения.

**Задача 17.** *Выведите (формально) рекуррентную формулу (12.4)*

$$v_0(p,t) = v(p)e^{-K(p)t};$$

$$v_n(p,t) = \frac{\beta}{1+|p|^2}\int\limits_0^t e^{-K(p)(t-\tau)}d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbf{R}^N}\int\limits_{\mathbf{R}^N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} v_{j-1}(p-q,\tau)v_{k-j}(q-r,\tau)v_{n-k}(r,\tau)\,dq\,dr$$

$(\forall n\in \boldsymbol{N})$ *из интегрального уравнения (12.3)*

$$\hat{u}(p,t) = \hat{u}_0(p)e^{-K(p)t} + \frac{\beta}{1+|p|^2}\int\limits_0^t e^{-K(p)(t-\tau)}\,d\tau\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbf{R}^N}\int\limits_{\mathbf{R}^N}\hat{u}(p-q,\tau)\hat{u}(q-r,\tau)\hat{u}(r,\tau)\,dq\,dr,$$

*где* $K(p) = \alpha|p|^2/(1+|p|^2)$.

**Решение.** Применим метод возмущений: пусть $\hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n+1}v_n(p,t)$, $\hat{u_0}(p) = \varepsilon v(p)$. Подставим эти выражения в интегральное уравнение:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n+1}v_n(p,t) = \varepsilon v(p)e^{-K(p)t}+$$

$$+\frac{\beta}{1+|p|^2}\int\limits_0^t e^{-K(p)(t-\tau)}d\tau\int\limits_{\mathbf{R}^N}\int\limits_{\mathbf{R}^N}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{2n+1}v_n(p-q,\tau)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k+1}v_k(q-r,\tau)\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{2m+1}v_m(r,\tau)dqdr.$$

Пусть положительный параметр $\varepsilon$ достаточно мал, чтобы интегрирование и суммирование можно было менять местами (обосновывать его существование здесь не требуется). Придём к уравнению

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{2s+1} v_s(p,t) = \varepsilon v(p) e^{-K(p)t} +$$

$$+\frac{\beta}{1+|p|^2} \sum \varepsilon^{2n+2k+2m+3} \int\limits_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbf{R}^N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} v_n(p-q,\tau) v_k(q-r,\tau) v_m(r,\tau) dq dr,$$

где сумма без пределов означает суммирование по всем неотрицательным $n$, $k$, $m$. Воспользуемся методом неопределённых коэффициентов. Получим, что $\varepsilon^1$ соответствует равенство

$$v_0(p,t) = \varepsilon v(p) e^{-K(p)t},$$

а $\varepsilon^{2s+1}$ при любом $s \in \mathbf{N}$ — равенство

$$v_s(p,t) = \frac{\beta}{1+|p|^2} \sum \int\limits_0^t e^{-K(p)(t-\tau)} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbf{R}^N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} v_n(p-q,\tau) v_k(q-r,\tau) v_m(r,\tau) dq dr,$$

где индексы суммирования удовлетворяют условию $2n+2k+2m+3 = 2s+1 \Leftrightarrow n+k+m = s-1$. Положим $m = (s-\alpha) \in [0; s-1]$. Тогда $\alpha \in [1; s]$. Затем положим $k = (\alpha - \beta) \in [0; \alpha - 1]$, откуда $\beta \in [1; \alpha]$. Следовательно, $n = \beta - 1$, и $\sum = \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{\alpha}$. Переобозначая индексы, получим требуемую рекуррентную формулу.

**Задача 18.** *Какому инфинитезимальному оператору соответствует преобразование на плоскости*

$$\overline{x} = e^{2a} x, \ \overline{y} = e^{3a} y?$$

**Решение.** Непосредственным вычислением получаем, что

$$\xi = \frac{d}{da}\left(e^{2a}x\right)\Big|_{a=0} = 2x,\ \eta = \frac{d}{da}\left(e^{3a}y\right)\Big|_{a=0} = 3y.$$

**Ответ.** $X = 2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y}$.

**Задача 19.** *Какому преобразованию на плоскости соответствует инфинитезимальный оператор*

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}?$$

*Каковы его инварианты?*

**Решение.** Для восстановления преобразования по оператору надо решить следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{da} = \overline{y}; \\ \dfrac{d\overline{y}}{da} = \overline{x}; \\ \overline{x}\big|_{a=0} = x; \\ \overline{y}\big|_{a=0} = y. \end{cases}$$

из уравнений легко найти, что $\overline{x} = c_1 \operatorname{ch} a + c_2 \operatorname{sh} a$, $\overline{y} = c_1 \operatorname{sh} a + c_2 \operatorname{ch} a$. С учётом начальных условий: $\overline{x} = x \operatorname{ch} a + y \operatorname{sh} a$, $\overline{y} = x \operatorname{sh} a + y \operatorname{ch} a$. Найдём инвариант из уравнения $XI = 0$. Его характеристическое уравнение $dx/y = dy/x$ даёт $x^2 - y^2 = c$. Следовательно, $I = f(x^2 - y^2)$, где $f(\cdot)$ — произвольная функция одного аргумента, является инвариантом общего вида.

**Ответ.** Преобразование: $\overline{x} = x \operatorname{ch} a + y \operatorname{sh} a$, $\overline{y} = x \operatorname{sh} a + y \operatorname{ch} a$, инварианты: $I = f(x^2 - y^2)$, где $f(\cdot)$ — произвольная функция одного аргумента.

**Задача 20.** *С помощью групповой теории подберите интегрирующий множитель для уравнения*

$$2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$$

*и решите это уравнение.*

**Решение.** Для построения интегрирующего множителя достаточно знать оператор преобразования, относительно которого уравнение инвариантно. Попробуем подобрать масштабирование переменных, не меняющее вид уравнения. Пусть $\overline{x} = xe^{ka}$, $\overline{y} = ye^{la}$. Тогда уравнение в новых переменных

$$2\overline{x}\overline{y}d\overline{x} + (\overline{y}^2 - 3\overline{x}^2)d\overline{y} = 0$$

можно переписать в виде

$$2e^{2ka+la}xydx + (e^{2la}y^2 - 3e^{2ka}x^2)e^{la}dy = 0.$$

Для того чтобы оно совпало с исходным, достаточно взять $k = l = 1$. Тогда преобразованию будет соответствовать оператор

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Применив теорему Ли, построим интегрирующий множитель:

$$\mu = \frac{1}{y^3 - x^2y}.$$

Умножив на него, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0,$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{y^3 - x^2y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^3 - x^2y}. \tag{17.5}$$

Из первого равенства (17.5) несложно получить, что $u = -\ln|x^2 - y^2| + k(y)$, где $k(\cdot)$ — произвольная функция одного аргумента. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 - y^2} + k'(y).$$

С учётом второго равенства (17.5) получим:

$$\frac{2y}{x^2-y^2}+k'(y)=\frac{y^2-3x^2}{y^3-x^2y},$$

откуда $k(y)=3\ln|y|$ с точностью до постоянной интегрирования. Таким образом, общим решением уравнения будет

$$u\equiv -\ln|x^2-y^2|+3\ln|y|=\text{const},$$

откуда, потенцируя, получим неявную формулу:

$$\frac{y^3}{x^2-y^2}=c.$$

**Ответ.** $y^3/(x^2-y^2)=c$.

**Задача 21.** *С помощью групповой теории подберите интегрирующий множитель для уравнения*

$$(x^2+1)(2xdx+\cos ydy)=2x\sin ydx$$

*и решите это уравнение.*

**Решение.** Для начала упростим уравнение, перейдя к переменным $t=x^2+1$, $s=\sin y$:

$$(t-s)dt+tds=0.$$

Легко заметить, что уравнение в новых переменных инвариантно относительно преобразования $\overline{t}=te^a$, $\overline{s}=se^a$, которому соответствуют $\xi=t$, $\eta=s$. Отсюда получаем интегрирующий множитель Ли вида $\mu=1/t^2$. Умножим на него левую и правую части уравнения и сгруппируем его следующим образом:

$$\frac{tdt}{t^2}+\frac{tds-sdt}{t^2}=0,$$

откуда

$$\ln|t|+\frac{s}{t}=C.$$

Выразим $s$ и вернёмся к первоначальным обозначениям: $\sin y = \left(x^2+1\right)\left(C - \ln\left(x^2+1\right)\right)$.

**Ответ.** $\sin y = \left(x^2+1\right)\left(C - \ln\left(x^2+1\right)\right)$.

**Задача 22.** *Решите уравнение*

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

*с помощью канонических переменных.*

**Решение.** Данное уравнение является преобразованным уравнением из задачи 20. В ходе её решения было показано, что уравнение допускает оператор

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Канонические переменные находятся из условий $Xt = 1$ и $Xu = 0$. Пусть для простоты $t$ зависит только от $x$, тогда первое условие можно записать в виде $xt'(x) = 1$. Ему удовлетворяет $t = \ln|x|$. Легко показать, что второму условию удовлетворяет $u = y/x$. Перейдя к новым переменным и упростив уравнение, получим:

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^3 - u}{3 - u^2}.$$

Интегрирование даст

$$\ln\left|\frac{u^3}{u^2 - 1}\right| = Ce^{-t},$$

откуда легко перейти к исходным переменным.

**Ответ.** $y^3/(x^2 - y^2) = c$.

**Задача 23.** *Какие инфинитезимальные операторы допускает уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + u?$$

**Решение.** Запишем уравнение в виде $F \equiv uu''_{x^2} + {u'_x}^2 + u - u'_y = 0$. Условие инвариантности здесь будет иметь вид

$$\begin{cases} \underset{2}{X}F \equiv \zeta \dfrac{\partial F}{\partial u} + \zeta_1 \dfrac{\partial F}{\partial u'_x} + \zeta_2 \dfrac{\partial F}{\partial u'_y} + \zeta_{11} \dfrac{\partial F}{\partial u''_{x^2}} = 0, \\ \hfill F = 0 \end{cases}$$

(другие слагаемые в первом соотношении равны нулю). Подставим в первое равенство выражения для коэффициентов (15.2), затем подставим вместо $u'_y$ соответствующее выражение из второго равенства. Сгруппируем результат по разным произведениям производных $u$. Равенство должно выполняться тождественно, следовательно, каждый коэффициент равен нулю. Приходим к системе:

$$\begin{cases} 1: & \zeta - \zeta'_y - u(\zeta'_u - \eta'_y) + u^2\eta'_u + u\zeta''_{x^2} - u^2\eta''_{x^2} = \\ & = 0; \\ u'_x: & 2\zeta'_x - 2u\eta'_x + \xi'_y + u\xi'_u + u(2\zeta''_{ux} - \xi''_{x^2}) - \\ & - 2u^2\eta''_{ux} = 0; \\ {u'_x}^2: & 2(\zeta'_u - \xi'_x) - \zeta'_u + \eta'_y - u\eta''_{x^2} + u(\zeta''_{u^2} - 2\xi''_{ux}) - \\ & - u^2\eta''_{u^2} = 0; \\ u'_x u''_{x^2}: & - 2u\eta'_x - 2u\xi'_u - 2u^2\eta''_{ux} = 0; \\ {u'_x}^3: & - 2\eta'_x - \xi'_u - 2u\eta''_{ux} - u\xi''_{u^2} = 0; \\ {u'_x}^2 u''_{x^2}: & - u^2\eta''_{u^2} - u\eta'_u = 0; \\ {u'_x}^4: & - \eta'_u - u\eta''_{u^2} = 0; \\ u''_{x^2}: & \zeta - u(\zeta'_u - \eta'_y) + 2u^2\eta'_u - u^2\eta''_{x^2} + \\ & + u(\zeta'_u - 2\xi'_x) - u^2\eta'_u = 0; \\ {u''_{x^2}}^2: & 0 = 0; \\ u''_{xy}: & - 2u\eta'_x = 0; \\ u'_x u''_{xy}: & - 2u\eta'_u = 0. \end{cases}$$

Из последних двух равенств видно, что $\eta = \eta(y)$ (то есть имеется зависимость только от $y$). Тогда равенство, соответствующее $u'_x u''_{x^2}$, упростится до $\xi'_u = 0$, то есть $\xi$ не зависит от $u$. Некоторые равенства будут выполняться тождественно, и систему можно будет переписать в более простом виде:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x;y); \\ \eta = \eta(y); \\ \zeta - \zeta'_y - u\zeta'_u + u\eta'_y + u\zeta''_{x^2} = 0; \\ 2\zeta'_x + \xi'_y + 2u\zeta''_{ux} - u\xi''_{x^2} = 0; \\ \zeta'_u + u\zeta''_{u^2} - 2\xi'_x + \eta'_y = 0; \\ \zeta + u\eta'_y - 2u\xi'_x = 0. \end{cases}$$

Выразим $\zeta$ из последнего уравнения: $\zeta = u(2\xi'_x - \eta'_y)$. Тогда предпоследнее выполняется тождественно. Четвёртое равенство приведём к виду

$$7u\xi''_{x^2} + \xi'_y = 0.$$

Здесь линейная функция от $u$ тождественно равна нулю ($\xi$ от $u$ не зависит). Значит, оба коэффициента равны нулю: $\xi''_{x^2} = \xi'_y = 0$. Поэтому $\xi = c_1x + c_2$, где $c_{1;2}$ — произвольные постоянные. Тогда третье уравнение можно упростить до

$$\eta''(y) + \eta'(y) = 0 \Leftrightarrow \eta = c_3e^{-y} + c_4.$$

При так определённой функции $\eta(\cdot)$ получим, что $\zeta = u(2c_1 + c_3e^{-y})$.

Таким образом, приходим к следующим коэффициентам оператора $X$:

$$\xi = c_1x + c_2,\ \eta = c_3e^{-y} + c_4,\ \zeta = u(2c_1 + c_3e^{-y}).$$

Полагая по очереди каждый из произвольных параметров равным единице (а остальные — нулю), получим, что уравнение допускает следующие операторы:

$$\begin{aligned} X_1 = x\tfrac{\partial}{\partial x} + 2u\tfrac{\partial}{\partial u};\ X_2 = \tfrac{\partial}{\partial x}; \\ X_3 = e^{-y}\tfrac{\partial}{\partial y} + ue^{-y}\tfrac{\partial}{\partial u};\ X_4 = \tfrac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{17.6}$$

**Ответ.** Уравнение допускает операторы, перечисленные в (17.6).

**Задача 24.** *Какие инфинитезимальные операторы допускает уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = f(u),$$

*где $f(\cdot)$ — произвольная (фиксированная) нелинейная функция одного аргумента.*

**Решение.** Воспользуемся условием инвариантности. После упрощений система для $\xi(\cdot)$, $\eta(\cdot)$, $\zeta(\cdot)$ сведётся к следующей:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x); \\ \eta = \eta(y); \\ \zeta = cu + A(x;y); \\ A''_{xy} - cuf'(u) - Af'(u) + \\ \quad +(c - \xi'_x - \eta'_y)f(u) = 0, \end{cases} \tag{17.7}$$

где $\xi(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$ — произвольные функции одного аргумента, $A(\cdot)$ — произвольная функция двух аргументов, $c$ — произвольная постоянная. Последнее уравнение системы имеет вид $\sum_{k=1}^{4} P_k(x;y)Q_k(u) = 0$, где $P_1(x;y) = A''_{xy}$, $Q_1(u) = 1$, $P_2(x;y) = -c$, $Q_2(u) = uf'(u)$, $P_3(x;y) = -A$, $Q_3(u) = f'(u)$, $P_4(x;y) = c - \xi'_x - \eta'_y$, $Q_4(u) = f(u)$. Ограничимся рассмотрением случаев, когда функции $Q_{1;2;3;4}(u)$ линейно независимы, и когда какие-то две из них пропорциональны[59].

- Пусть $Q_{1;2;3;4}(u)$ линейно независимы. Тогда для тождественного выполнения последнего уравнения системы все коэффициенты $P_{1;2;3;4}(x;y)$ должны быть равны нулю. Из системы в этом случае легко получить, что $\zeta = 0$, $\xi = c_1 x + c_2$, $\eta = -c_1 y + c_3$. По-

[59] Полный разбор подобных функциональных уравнений приведён в [30, п. 4.5.].

лагая последовательно каждую произвольную постоянную равной единице (а другие — нулю), получим, что исходное уравнение допускает следующие операторы:

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y};\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x};\ X_3 = \frac{\partial}{\partial y}. \qquad (17.8)$$

- Пусть $Q_2$ пропорционально $Q_1$, то есть $uf'(u) = k \Leftrightarrow f(u) = k\ln|u| + k_1$ (здесь и далее $k$, $k_1$ — произвольные постоянные). Последнее уравнение (17.7) приведём к виду

$$A''_{xy} - ck - Ak/u + (c - \xi'_x - \eta'_y)k\ln|u| + (c - \xi'_x - \eta'_y)k_1 = 0.$$

Оно должно выполняться тождественно по $u$, следовательно, коэффициенты при $u^{-1}$, $\ln|u|$ и свободный член должны быть равны нулю:

$$\begin{cases} 1 : A''_{xy} - ck + (c - \xi'_x - \eta'_y)k_1 = 0; \\ u^{-1} :\ -Ak = 0; \\ \ln|u| : k(c - \xi'_x - \eta'_y) = 0. \end{cases}$$

Так как функция $f(\cdot)$ нелинейна, то параметры $k$ и $k_1$ не равны нулю. Поэтому из данной системы вытекает, что $A = 0$, $c = 0$, $\xi'_x + \eta'_y = 0$. С учётом (17.7) получим такой же результат, как в предыдущем случае: $\xi = c_1x + c_2$, $\eta = -c_1y + c_3$, $\zeta = 0$, чему соответствуют те же операторы (17.8).

- Пусть $Q_2$ пропорционально $Q_4$, то есть $uf'(u) = kf(u) \Leftrightarrow f(u) = k_1u^k$. В этом случае последнее уравнение (17.7) примет вид

$$A''_{xy} - ck_1ku^k - Ak_1ku^{k-1} + (c - \xi'_x - \eta'_y)k_1u^k = 0.$$

Оно распадётся на следующие равенства:

$$\begin{cases} 1: A''_{xy} = 0; \\ u^k: -ck_1k + k_1(c - \xi'_x - \eta'_y) = 0; \\ u^{k-1}: -Ak_1k = 0. \end{cases}$$

После упрощений получим:

$$\xi = c_1x + c_2,\ \eta = (c(1-k) - c_1)y + c_3,\ \zeta = cu.$$

Полагая последовательно каждую произвольную постоянную равной единице (а другие — нулю), получим, что исходное уравнение допускает те же операторы (17.8) и оператор

$$X_4 = (1-k)y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (17.9)$$

- Пусть $Q_3$ пропорционально $Q_4$, то есть $f'(u) = kf(u) \Leftrightarrow f(u) = k_1e^{ku}$. Последнее уравнение (17.7) примет вид

$$A''_{xy} - ck_1kue^{ku} - Ak_1ke^{ku} + (c - \xi'_x - \eta'_y)k_1e^{ku} = 0.$$

Рассуждая аналогично предыдущим случаям, получим, что $\xi = \xi(x)$ и $\eta = \eta(y)$ — произвольные функции одного аргумента, а $\zeta = -(\xi'(x) + \eta'(y))/k$, откуда получим допускаемый оператор

$$X = \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(y)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\xi'(x) + \eta'(y)}{k}\frac{\partial}{\partial u} \qquad (17.10)$$

(содержащий как частные случаи операторы (17.8)).

- Оставшиеся случаи (пропорциональность между $Q_3$ и $Q_1$, $Q_4$ и $Q_1$, $Q_3$ и $Q_2$) дают постоянную или линейную функцию $f(\cdot)$, что не соответствует условию.

**Ответ.** В общем случае, уравнение допускает операторы (17.8). Кроме того, при $f(u) = k_1 u^k$ оно допускает оператор (17.9), а при $f(u) = k_1 e^{ku}$ — оператор (17.10) (частными случаями которого являются (17.8)).

**Задача 25.** *Покажите, что уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{17.11}$$

*допускает операторы*

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3u\frac{\partial}{\partial u};\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x};\ X_3 = y\frac{\partial}{\partial y} - 2u\frac{\partial}{\partial u};$$
$$X_4 = \frac{\partial}{\partial y};\ X_5 = y\frac{\partial}{\partial u};\ X_6 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

**Решение. Первый способ.** Подобно тому, как было сделано в двух предыдущих задачах, используем условие инвариантности и получим тот же список операторов, который указан в условии.

**Второй способ.** Покажем, что уравнение допускает $X_1$ (другие операторы рассматриваются аналогично). Несложно показать, что этому оператору соответствует следующее семейство преобразований:

$$\overline{x} = xe^a;\ \overline{y} = y;\ \overline{u} = ue^{3a}. \tag{17.12}$$

Запишем уравнение для преобразованных переменных:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2} - \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2} = 0.$$

Перейдём от переменных $(\overline{x}; \overline{y}; \overline{u})$ к переменным $(x; y; u)$ по правилам (17.12) и после сокращений получим уравнение (17.11).

**Задача 26.** *Известно, что уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{17.13}$$

*допускает оператор*

$$X = -\frac{xu}{2}\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial u}.$$

*С помощью этого оператора найдите инвариантные решения указанного уравнения.*

**Решение.** С помощью сооношения

$$XI = 0 \Leftrightarrow -\frac{xu}{2}\frac{\partial I}{\partial x} + y\frac{\partial I}{\partial u} = 0$$

найдём инварианты оператора $X$:

$$I_1 = y;\ I_2 = 4y\ln|x| + u^2.$$

Значит, для построения инвариантных решений следует использовать предварительную форму

$$I_2 = f(I_1) \Leftrightarrow 4y\ln|x| + u^2 = f(y),$$

где $f(\cdot)$ — функция одного аргумента, подлежащая определению. Выразим $u$, ограничившись рассмотрением квадратного корня с плюсом:

$$u = \sqrt{f(y) - 4y\ln|x|}.$$

Подставим это выражение в уравнение (17.13). После упрощений получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $f(y)$:

$$yf'(y) - f(y) = -2y.$$

Несложно убедиться, что его общее решение имеет вид

$$f(y) = y(C - 2\ln|y|)$$

с произвольной поятоянной $C$. Следовательно, инвариантным решением будет

$$u = \sqrt{y(C - \ln(x^4y^2))}.$$

**Ответ.** $u = \sqrt{y(C - \ln(x^4y^2))}.$

**Задача 27.** *Известно, что уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^u \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

*допускает операторы*

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial u}.$$

*С помощью линейной комбинации этих операторов постройте инвариантные решения указанного уравнения.*

**Решение.** Если уравнение допускает операторы $X_{1;2}$, то допускает и их линейную комбинацию

$$X = X_1 + aX_2 = t\frac{\partial}{\partial t} + (a+1)x\frac{\partial}{\partial x} + 2a\frac{\partial}{\partial u}$$

с произвольным ненулевым параметром $a$. Этот оператор имеет инварианты $I_1 = xt^{-a-1}$ и $I_2 = u - 2a\ln|t|$. Значит, следует искать инвариантные решения в виде $I_2 = f(I_1) \Leftrightarrow u = 2a\ln|t| + f(xt^{-a-1})$. Для определения функции $f(\cdot)$ подставим это выражение в исходное уравнение. После упрощений придём к уравнению для $f(z)$:

$$\begin{aligned}\left(e^{f(z)}f'(z)\right)' = (a+1)^2z^2f''(z)+\\ +(a+1)(a+2)zf'(z) - 2a.\end{aligned} \qquad (17.14)$$

**Ответ.** $u = 2a\ln|t| + f(xt^{-a-1})$, где функция $f(\cdot)$ определяется уравнением (17.14), $a$ — произвольная ненулевая постоянная.

**Задача 28.** *Известно, что уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

*допускает оператор*

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 3u\frac{\partial}{\partial u}.$$

*С помощью этого оператора внесите постоянные в следующие решения уравнения:*

1. *решение, полученное методом мультипликативного разделения переменных (ограничиться рассмотрением степенных функций от $x$ и $y$),*
2. *решение — многочлен по $x$ (результат задачи №6).*

**Решение.** Несложно показать, что названному оператору соответствует следующее преобразование:

$$\begin{cases} \overline{x} = xe^a; \\ \overline{y} = y; \\ \overline{u} = ue^{3a}. \end{cases} \tag{17.15}$$

Теперь воспользуемся этой информацией применительно к двум названным видам точных решений.

1. Рассмотрим метод мультипликативного разделения переменных. Условию соответствуют функции вида $u = Ax^\mu y^\nu$. Подставим эту предварительную форму в уравнение:

   $$A^2\mu^2(\mu - 1)x^{2\mu-3}y^{2\nu} + A\nu(\nu - 1)x^\mu y^{\nu-2} = 0.$$

   Для тождественного выполнения равенства при ненулевом $A$ необходимо, чтобы показатели степеней $x$ и $y$ в обоих слагаемых были равны: $2\mu - 3 = \mu$, $2\nu = \nu - 2$, то есть $\mu = 3$, $\nu = -2$. При таких показателях упростим равенство: $A = -1/3$. Приходим к решению

   $$u = -\frac{x^3y^{-2}}{3}. \tag{17.16}$$

   Уравнение инвариантно относительно преобразования (17.15), следовательно,

   $$\overline{u} = -\frac{\overline{x}^3\overline{y}^{-2}}{3}$$

будет решением такого же уравнения, где к каждой переменной приписана черта. Подставляя сюда выражения (17.15), а затем упрощая, получим такое же семейство решений (17.16). Значит, это решение инвариантно относительно данного преобразования, и предложенный метод не позволяет внести постоянную.

2. Рассмотрим решение, полученное в задаче №6 (многочлен по $x$):

$$\begin{aligned} u = -x^3y^{-2}/3 + c_0x^2y^3 - 2c_0^2xy^8/27+ \\ +c_0^3y^{13}/1053 + c_1y + c_2 \end{aligned} \tag{17.17}$$

(с произвольными постоянными $c_{0;1;2}$). Уравнение инвариантно относительно преобразования (17.15), следовательно, приписав черты к каждой переменной в (17.17), получим решение такого же уравнения, где к каждой переменной приписана черта. Переходя теперь к переменным без черты по формулам (17.15), а затем выражая $u$, получим семейство решений, содержащее ещё и произвольный параметр $a$:

$$u = -\frac{x^3y^{-2}}{3} + c_0e^{-a}x^2y^3 - \frac{2c_0^2e^{-a}xy^8}{27} + \frac{c_0^3y^{13}}{1053} + c_1y + c_2.$$

**Ответ.** В первом случае метод не позволяет внести постоянную, поскольку решение инвариантно относительно данного преобразования. Во втором случае: $u = -x^3y^{-2}/3 + c_0e^{-a}x^2y^3 - 2c_0^2e^{-2a}xy^8/27 + c_0^3y^{13}/1053 + c_1y + c_2$, $c_{0;1;2}, a \in \mathbf{R}$.

**Задача 29.** *При каких значениях параметров $a$, $b$, $c$ уравнение*

$$u''(z) - au(z)u'(z) = bu^2(z) + cz^3$$

*удовлетворяет тесту Пенлеве? (Хотя бы одно из чисел $a$ и $b$ не равно нулю.) При этих $a$, $b$ и $c$ найдите представление решения в виде ряда Лорана до членов, содержащих произвольные коэффициенты.*

**Решение.** Рассмотрим сначала $a \neq 0$.

Во-первых, найдём начальный член разложения: $u = A_0 t^{-p}$, где $t = z - z_0$, $p \in \mathbf{N}$, а $z_0$ — произвольная комплексная постоянная. Несложно показать, что ведущими членами (то есть пропорциональными наибольшим по модулю отрицательным степеням $t$) будут $u''$ и $auu'$. Они будут «уравновешиваться» при $p = 1$, $A_0 = -2/a$.

Во-вторых, определим, какие члены ряда Лорана могут быть произвольными. Для этого подставим в уравнение[60] двучлен $u = A_0 t^{-p} + A_m t^{m-p}$. После упрощений, пренебрегая членами, содержащими $A_m$ в степенях больше первой, получим: $m^2 - m - 2 = 0$, откуда $m = -1$ или $m = 2$. Значит, разложение Лорана, содержащее явно члены с произвольными постоянными, должно иметь вид

$$u = -\frac{2}{a} t^{-1} + A_1 + A_2 t + O(t^2).$$

В-третьих, подставим это выражение в уравнение[61] и сгруппируем его по степеням $t$. Оно должно выполняться тождественно, следовательно, все коэффициенты равны нулю. Приходим к системе:

$$\begin{cases} t^{-2}: \quad -2A_1 = \dfrac{4b}{a^2}; \\ t^{-1}: \quad 0 = -\dfrac{4bA_1}{a}. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдём: $A_1 = -2b/a^2$. Упростим второе: $bA_1 = 0$. Таким образом, возможно два вари-

[60] Здесь всеми членами, кроме ведущих, можно пренебречь.
[61] Теперь берём полное исходное уравнение, то есть не пренебрегаем никакими членами.

анта. Если $b = 0$, то и $A_1 = 0$, а коэффициент $A_2$ будет произвольным. Тогда уравнение удовлетворяет тесту Пенлеве, причём

$$u = -\frac{2}{a}t^{-1} + A_2 t + O(t^2),$$

где $A_2$ — произвольный. Если же $b \neq 0$, то приходим к противоречию, и уравнение не удовлетворяет тесту Пенлеве.

Рассмотрим теперь $a = 0$. В этом случае ведущими членами будут $u''$ и $bu^2$. Рассуждая по аналогии со случаем $a \neq 0$, получим предварительную форму решения

$$u = \frac{6}{b}t^{-2} + A_1 t^{-1} + A_2 + A_3 t + A_4 t^2 + A_5 t^3 + A_6 t^4 + O(t^5),$$

а затем получим следующие выражения для коэффициентов: $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, $A_4 = -cz_0^3/10$, $A_5 = -cz_0^2/2$, $0A_6 = 3cz_0$. Значит, $A_6$ будет произвольным тогда и только тогда, когда $c = 0$, а решение будет иметь вид

$$u = \frac{6}{b}t^{-2} + A_6 t^4 + O(t^5).$$

**Ответ.** Первый случай ($a \neq 0$): если $b = 0$, то уравнение проходит тест, причём $u = -2t^{-1}/a + A_2 t + O(t^2)$, где $A_2$ — произвольный коэффициент, иначе — не проходит. Второй случай ($a = 0$): если $c = 0$, то уравнение проходит тест, причём $u = 6t^{-2}/b + A_6 t^4 + O(t^5)$, где $A_6$ — произвольный коэффициент, иначе — не проходит. (Здесь $t = z - z_0$, $z_0$ — произвольная постоянная.)

**Задача 30.** *Преобразуйте уравнение*

$$u^2\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} - u\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 =$$
$$= u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

*к линейному с помощью надлежащей замены переменной $u = f(v)$.*

**Решение.** Подставим предлагаемую формулу в уравнение и сгруппируем его следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\left[f^2(v)f'''(v) - 3f(v)f'(v)f''(v) + 2f'^3(v)\right] v'_t {v'_x}^2 + \\
&+2\left[f^2(v)f''(v) - f(v)f'^2(v)\right] v'_x v''_{xt} + \\
&+\left[f^2(v)f''(v) - f(v)f'^2(v)\right] v'_t v''_{x^2} + f^2(v)f'(v)v'''_{x^2t} = \\
&= f^2(v)f'(v)(v'_x + v'_t)
\end{aligned}$$

Заметим, что если каждое из выражений в квадратных скобках будет равно нулю, то уравнение можно будет сократить на $f^2(v)f'(v)$, и оно станет линейным. Значит, надо наложить следующие условия на $f(\cdot)$:

$$\begin{cases} f^2(v)f'''(v) - 3f(v)f'(v)f''(v) + 2f'^3(v) = 0; \\ f^2(v)f''(v) - f(v)f'^2(v) = 0. \end{cases}$$

Несложно убедиться, что общим решением второго уравнения системы будет семейство функций $f(v) = c_1 e^{c_2 v}$ — эти функции удовлетворяют и первому уравнению. Возьмём для простоты $f(v) = e^v$ и придём к линейному уравнению:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

**Ответ.** Замена $f(v) = e^v$ даёт линейное уравнение $v'''_{x^2t} = v'_x + v'_t$.

**Задача 31.** *Преобразуйте уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 \tag{17.18}$$

*к линейному методами группового анализа.*

**Решение.** Можно показать, что это уравнение допускает следующие операторы:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = -\tfrac{ux}{2}\tfrac{\partial}{\partial x} + y\tfrac{\partial}{\partial u};\\
&X_2 = \tfrac{\partial}{\partial u};\\
&X_3 = \left(y^2 - \tfrac{y}{2} - \tfrac{u^2}{4}\right)x\tfrac{\partial}{\partial x} + y^2\tfrac{\partial}{\partial y} + yu\tfrac{\partial}{\partial u};\\
&X_4 = xy\tfrac{\partial}{\partial x} + y\tfrac{\partial}{\partial y} + \tfrac{u}{2}\tfrac{\partial}{\partial u};\\
&X_5 = \tfrac{\partial}{\partial y};\\
&X_6 = x\tfrac{\partial}{\partial x};\\
&X_\infty = b(u;y)\tfrac{\partial}{\partial x},
\end{aligned}
\tag{17.19}
$$

где $b(\cdot)$ — произвольное решение линейного уравнения

$$\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial^2 b}{\partial u^2} + b. \tag{17.20}$$

Попробуем свести исходное уравнение к линейному такого же вида. Рассмотрим (17.20), переобозначив $b$ и $u$ соответственно через $u$ и $x$. Можно показать, что оно допускает следующие операторы:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = y\tfrac{\partial}{\partial x} - \tfrac{xu}{2}\tfrac{\partial}{\partial u};\\
&X_2 = \tfrac{\partial}{\partial x};\\
&X_3 = xu\tfrac{\partial}{\partial x} + y^2\tfrac{\partial}{\partial y} + \left(y^2 - \tfrac{y}{2} - \tfrac{x^2}{4}\right)u\tfrac{\partial}{\partial u};\\
&X_4 = \tfrac{x}{2}\tfrac{\partial}{\partial x} + y\tfrac{\partial}{\partial y} + yu\tfrac{\partial}{\partial u};\\
&X_5 = \tfrac{\partial}{\partial y};\\
&X_6 = u\tfrac{\partial}{\partial u};\\
&X_\infty = q(x;y)\tfrac{\partial}{\partial u},
\end{aligned}
\tag{17.21}
$$

где $q(\cdot)$ — произвольное решение уравнения

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + q,$$

аналогичного (17.20). Заметим, что список операторов (17.19) совпадёт с (17.21), если поменять ролями $x$ и $u$, то есть принять $x$ за функцию от $u$ и $t$.

Проверим, что такое преобразование линеаризует (17.18). Рассмотрим тождество

$$x = x(u; t). \tag{17.22}$$

Продифференцируем его по $x$:

$$1 = x'_u u'_x \Rightarrow u'_x = \frac{1}{x'_u}.$$

Продифференцируем ещё раз по $x$:

$$0 = x''_{u^2} {u'_x}^2 + x'_u u''_{x^2} \Rightarrow u''_{x^2} = -\frac{x''_{u^2}}{{x'_u}^3}.$$

Теперь продифференцируем (17.22) по $y$:

$$0 = x'_u u_y + x'_y \Rightarrow u'_y = -\frac{x'_y}{x'_u}.$$

Подставив найденные производные функции $u$ в (17.18) и упростив, получим линейное уравнение:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + x.$$

**Ответ.** Поменяв ролями $x$ и $u$, получим линейное уравнение $x'_y = x''_{u^2} + x$.

# Глава XVIII. Задачи для самостоятельного решения

Задачи в этой главе подобраны в соответствии с темами теоретического курса следующим образом:

- математическое моделирование: 1–2;
- точные решения, их применение и контрпримеры: 3–9;
- вопросы локальной и глобальной разрешимости: 10–14;
- групповой анализ: 15–23;
- анализ Пенлеве: 24–25;
- линеаризация заменой переменных: 26.

## § 1. Условия задач

**Задача 1.** *Выведите (4.14) из (4.13), то есть уравнение*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\Delta^2 u + \Delta u + \Delta_{p_1} u\right) + \Delta u + \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u ds - \Delta_{p_2} u = 0$$

*из системы*

$$\begin{cases} \operatorname{div}\overline{D} = -4\pi n; \\ \overline{D} = \overline{E} + 4\pi\overline{P}; \\ \frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div}\overline{J}; \\ \overline{P} = -a_1\Delta\overline{E} + a_2|\overline{E}|^{p_1-2}\overline{E}; \\ \overline{J} = \sigma_0(1 - |\overline{E}|^{p_2-2})\overline{E} + \int_0^t h(t-s)\overline{E}(x;s)ds. \end{cases}$$

**Задача 2.** *Выразите* $\eta_0$ *из (6.5), то есть решите относительно* $\eta_0$ *уравнение*

$$\int\limits_{-\eta_0}^{\eta_0} \left(\frac{\sigma}{2a^2(\sigma+2)}(\eta_0^2 - \eta^2)\right)^{1/\sigma} d\eta = Q.$$

**Задача 3. а).** *Проверьте, что (6.7) — решение (6.6), то есть функция*

$$u = \begin{cases} u_0 t^{1/\sigma}\left(1 - \frac{x}{x_0(t)}\right)^{1/\sigma}, \ 0 \leqslant x < x_0(t); \\ 0, \ x \geqslant x_0(t), \end{cases}$$

*где* $x_0(t) = v_0 t$, $v_0 = \sqrt{a^2 u_0^\sigma/\sigma}$, *действительно является решением задачи*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right), \ t > 0, \ x > 0; \\ u(x;0) = 0; \\ u(0;t) = u_0 t^{1/\sigma}. \end{cases}$$

**б).** *Проверьте, что (6.9) — решение (6.8), то есть функция*

$$u(x,t) = \begin{cases} A_0(T-t)^{-1/\sigma}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{2/\sigma}, & 0 \leqslant x < x_0, \\ 0, & x \geqslant x_0, \end{cases}$$

*где* $x_0 = \sqrt{2A_0^\sigma a^2(\sigma+2)/\sigma}$, $A_0 = \mathrm{const} > 0$, $T = \mathrm{const} > 0$, *действительно является решением зада-*

*чи*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right), \ 0 < t < T < \infty, \ x > 0, \\ u(x,0) = A_0 T^{-1/\sigma}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{2/\sigma}, \ x > 0, \\ u(0,t) = A_0 (T-t)^{-1/\sigma}, \ 0 < t < T, \end{cases}$$

**Задача 4.** *Найдите решения типа бегущей волны уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^n \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

**Задача 5.** *Найдите автомодельные решения уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^n \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

*(возможно выражение решения через решение некоторого обыкновенного дифференциального уравнения).*

**Задача 6. а).** *Найдите точные решения уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^n \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

*методом мультипликативного разделения переменных.*

**б).** *Такой же вопрос для уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + u.$$

**Задача 7. а).** *Найдите точные решения уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^k \ (k = \mathrm{const})$$

*методом аддитивного разделения переменных.*

**б).** *Такой же вопрос для уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda u} \frac{\partial u}{\partial x}\right) + b$$

*(параметры постоянны).*

**в).** *Найдите точные решения уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

*методом аддитивного разделения переменных, считая слагаемое, зависящее от $x$, многочленом.*

**Задача 8.** *Найдите точные решения уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

*являющиеся многочленами от $y^{-1}$ (с коэффициентами, зависящими от $x$).*

**Задача 9. а).** *Покажите, что уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (2x^2 + t^2)e^u$$

*не инвариантно относительно преобразования $\overline{t} = Ct$, $\overline{x} = C^k x$, $\overline{u} = C^m u$ ни при каких $k$ и $m$, но имеет нетривиальные автомодельные решения.*

**б).** *Покажите, что уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u^2$$

*не инвариантно относительно преобразования $\overline{x} = x + k_1 a$, $\overline{y} = y + k_2 a$, $\overline{u} = u$ ($k_{1;2} = \mathrm{const} \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$), но имеет нетривиальные решения типа бегущей волны.*

**Задача 10.** *Докажите, что $L_p(0;1) \subset L_q(0;1)$ при $\infty > p > q \geqslant 1$. (Не забудьте показать, что отношение строгое, то есть названные множества не совпадают.)*

**Задача 11.** *Пусть $u(x;t) \in X_T = C^1\left[0;T;H_0^1(\Omega)\right)$, где $\Omega$ — ограниченное подмножество $\boldsymbol{R}^3$ с достаточно гладкой границей. Обозначим $\Phi = a\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + b\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}$,*

$W = c\|u'_t\|^2_{L_2(\Omega)} + d\|\nabla u'_t\|^2_{L_2(\Omega)}$, *где* $a$, $b$, $c$, $d$ *— положительные постоянные. Докажите, что существует такая положительная постоянная* $k$, *что* $\Phi'^2 \leqslant k\Phi W$.

**Задача 12.** *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + au - bu^3 = 0, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x;0) = u_0(x) \in H^1_0(\Omega), \end{cases}$$

*где* $u = u(x;t)$, $x \in \Omega$, $\Omega$ *— ограниченное подмножество* $\boldsymbol{R}^3$ *с достаточно гладкой границей,* $t > 0$, $a = \mathrm{const} \in \boldsymbol{R}$, $b = \mathrm{const} \in \boldsymbol{R}_+$. *Покажите, что обобщённое решение этой задачи из класса* $C^1\left[0;\ T; H^1_0(\Omega)\right)$ *не разрушится ни при каком конечном* $T$.

**Задача 13. а).** *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + u^3 + u = 0, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x;0) = u_0(x) \in H^1_0(\Omega), \end{cases}$$

*где* $u = u(x;t)$, $x \in \Omega$, $\Omega$ *— ограниченное подмножество* $\boldsymbol{R}^3$ *с достаточно гладкой границей,* $t > 0$. *На каком временном промежутке заведомо существует её решение из класса* $C^1\left[0;\ T; H^1_0(\Omega)\right)$*?*

**б).** *Такой же вопрос для задачи*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + u^3 = f(x), \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x;0) = u_0(x) \in H^1_0(\Omega), \end{cases}$$

*где* $f(\cdot) \in L_2(\Omega)$, *причём* $8C_4^4\|f\|^2_{L_2(\Omega)} < 1$.

**Задача 14. а).** *Рассмотрим задачу*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \mu(x)u^3 = 0, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x;0) = u_0(x) \in H^1_0(\Omega), \end{cases}$$

*где* $u = u(x;t)$, $x \in \Omega$, $\Omega$ *— ограниченное подмножество* $\boldsymbol{R}^3$ *с достаточно гладкой границей,* $t > 0$, $\mu(x) \in L_4(\Omega)$, *причём* $\mu(x) \geqslant 0$ $\forall x \in \Omega$. *К какому моменту времени заведомо разрушится её решение из класса* $C^1\left[0;\ T; H_0^1(\Omega)\right)$? *(Начальные данные считать нетривиальными.)*

**б).** *Такой же вопрос для задачи*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + u^3 = f(x), \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(x;0) = u_0(x) \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

*где* $u = u(x;t)$, $x \in \Omega$, $\Omega$ *— ограниченное подмножество* $\boldsymbol{R}^3$ *с достаточно гладкой границей,* $t > 0$, $f(\cdot) \in L_2(\Omega)$.

**Задача 15. а).** *Какому инфинитезимальному оператору соответствует преобразование Галилея*

$$\overline{x} = x + ay, \ \overline{y} = y?$$

**б).** *Такой же вопрос для преобразования Лоренца:*

$$\overline{x} = x \operatorname{ch} a + y \operatorname{sh} a, \ \overline{y} = y \operatorname{ch} a + x \operatorname{sh} a.$$

**Задача 16. а).** *Какому преобразованию на плоскости соответствует оператор*

$$X = 3x\frac{\partial}{\partial x} + 5y\frac{\partial}{\partial y}?$$

*Каковы его инваранты?*

**б).** *Такой же вопрос для оператора*

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}.$$

**в).** *Такой же вопрос для оператора*

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

**Задача 17. а).** *С помощью групповой теории подберите интегрирующий множитель для уравнения*

$$3x^3ydx + (x^4 + 4y^4)dy = 0$$

*и решите это уравнение.*

**б).** *Такой же вопрос для уравнения*

$$2xydx + 3(x^2 + y^6)dy = 0.$$

**в).** *Такой же вопрос для уравнения*

$$y^2dx + (xy + \operatorname{tg}(xy))dy = 0.$$

**г).** *Такой же вопрос для уравнения*

$$y^2dx + (e^x - y)\,dy = 0.$$

**Задача 18. а).** *Решите уравнение*

$$y' = -\frac{x^4 + 4y^4}{3x^3y}$$

*с помощью канонических переменных.*

**б).** *Такой же вопрос для уравнения*

$$y' = -\frac{2xy}{3(x^2 + y^6)}.$$

**Задача 19. а).** *Какие инфинитезимальные операторы допускает уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^n \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

*где* $n = \mathrm{const} \neq 0$*?*

**б).** *Такой же вопрос для уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

*где* $a = \mathrm{const} \neq 0.$

**в).** *Такой же вопрос для уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

**Задача 20. а).** *Какие инфинитезимальные операторы допускает уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

*где $f(\cdot)$ — произвольная (фиксированная) функция одного аргумента, отличная от постоянной.*

**б).** *Такой же вопрос для уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

**Задача 21. а).** *Известно, что уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin u$$

*допускает оператор*

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

*Найдите инвариантные решения этого уравнения.*

**б).** *Такой же вопрос для уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (18.1)$$

*с оператором*

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial u}.$$

**в).** *Такой же вопрос для уравнения (18.1) с оператором*

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

**Задача 22. а).** *Известно, что уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + u \tag{18.2}$$

*допускает операторы*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = e^{-y}\frac{\partial}{\partial y} + ue^{-y}\frac{\partial}{\partial u}.$$

*С помощью линейной комбинации этих операторов постройте инвариантные решения указанного уравнения.*

**б).** *Такой же вопрос для уравнения (18.2) с операторами*

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u},\ X_2 = e^{-y}\frac{\partial}{\partial y} + ue^{-y}\frac{\partial}{\partial u}$$

*(ограничиться рассмотрением случая $x > 0$.)*

**Задача 23.** *Известно, что уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

*допускает оператор*

$$X = y\frac{\partial}{\partial y} - 2u\frac{\partial}{\partial u}.$$

*С помощью этого оператора внесите постоянные*[62] *в следующие решения уравнения:*

1. *решение, полученное методом мультипликативного разделения переменных (построенное в ходе решения разобранной задачи №28 на с. 202),*

2. *решение — многочлен по $y^{-1}$ (результат задачи №8 на с. 213).*

[62]Напомним, что имеется в виду построение по одному решению семейства решений с произвольным параметром.

**Задача 24.** *Покажите, что уравнение*

$$u'''(z) - 6u(z)u'(z) - zu'(z) - 2u(z) = 0$$

*удовлетворяет тесту Пенлеве. Найдите представление решения в виде ряда Лорана до членов, содержащих произвольные коэффициенты.*

**Задача 25.** *При каких значениях параметров $a$, $b$, $c$ уравнение*

$$u'''(z) = u^2(z) + au(z) + bz + c$$

*удовлетворяет тесту Пенлеве? При этих $a$, $b$ и $c$ найдите представление решения в виде ряда Лорана до членов, содержащих произвольные коэффициенты.*

**Задача 26. а).** *Преобразуйте уравнение*

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

*к линейному с помощью надлежащей замены переменной $u = f(v)$.*

**б).** *Такой же вопрос для уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

*где $\varphi(\cdot)$ — произвольная (фиксированная) функция одного аргумента.*

## § 2. Ответы и указания

**1. Указание.** Подставьте $\overline{P}$ из четвёртого уравнения во второе, затем — $\overline{D}$ из второго в первое, затем — $n$ из первого и $\overline{J}$ из пятого подставьте в первое. Перейдите к потенциалу $u$ по правилу $\overline{E} = -\nabla u$. Масштабируйте потенциал и вектор пространственных переменных так, чтобы коэффициенты стали единичными.

**2. Указание.** Выразите интеграл через $B$-функцию. **Ответ.**
$\eta_0 = (Q/B(1/\sigma+1;1/2))^{\sigma/(\sigma+2)} \left(2a^2(\sigma+2)/\sigma\right)^{1/(\sigma+2)}$.

**3 (а, б). Указание.** Достаточно выполнить непосредственную подстановку.

**4. Ответ.** $u(x;t) = f(x-at)$, где функция одного аргумента $f(z)$ определяется неявной формулой $f^{n+1} - a^2(n+1)f - (c_1z+c_2) = 0$, $a$ — произвольная ненулевая постоянная, $c_{1;2}$ — произвольные постоянные.

**5. Ответ.** $u(x;t) = t^{2\beta+1}f(xt^\beta)$, где функция одного аргумента $f(z)$ определяется уравнением $(2\beta+1)f + \beta zf' = (f^nf')'$, а $\beta$ — произвольная постоянная. В частности, при $\beta=-1$ в уравнении можно понизить порядок, проинтегрировав его почленно: $-zf = f^nf'+c$.

**6. а). Ответ.**
$u(x;t) = \left[\left(c_2 + nx/\sqrt{2(n+2)}\right)^2/(c_1-nt)\right]^{2/n}$. **б). Указание.** Пусть $u(x;t) = f(x)g(t)$. Приведите уравнение к виду $(g'(t)-g(t))/g^2(t) = (f(x)f'(x))'/f(x)$. **Ответ.** $u(x;t) = f(x)/\left(c_1e^{-t}-c_3\right)$, где функция $f(\cdot)$ определяется равенством ${f'}^2(x) = 2c_3f(x)/3 + c_2f^{-2}(x)$ (в частности, при $c_2=0$ имеется решение в виде элементарной функции: $f(x) = c_3(x+c_4)^2/6$).

**7. а). Ответ.** $u(x;t) = c_3^{1/k}x^2/2 + c_1x + c_3t + c_2$. **б). Указание.** Пусть $u(x;t) = f(x)+g(t)$. Приведите уравнение к виду $e^{-\lambda g(t)}(g''(t)-b) = a\left(e^{\lambda f(x)}f'(x)\right)'$. **Ответ.** $u(x;t) = \ln\left(c_3\lambda x^2/(2a) + c_1x + c_2\right)/\lambda + g(t)$, где функция $g(\cdot)$ определяется равенством ${g'}^2(t) = 2bg(t) + 2c_3e^{\lambda g(t)}/\lambda$. **в). Ответ.** $u(x;t) = c_1x + c_1^2t + c_2$.

**8. Ответ.** $u = -(x^3/3 + c_2x^2/c_1 + c_2^2x/c_1^2 + c_2^3/(3c_1^3))y^{-2} + (c_1x+c_2)y^{-1}$.

**9. а). Указание.** Отсутствие инвариантности легко доказать от противного. Автомодельное решение можно искать в виде $u(x;t) = f(z)$, $z = xt$. Таким решением будет, например, $u(x;t) = -2\ln(C - xt/\sqrt{2})$. **б). Указание.** Отсутствие инвариантности легко доказать от противного. С другой стороны, уравнение имеет решение типа бегущей волны вида $u(x;y) = f(x+y)$, где функция $f(z)$ определется уравнением $f''(z) + zf'(z) = f^2(z)$.

**10. Указание.** Рассуждение аналогично решению разобранной задачи 11 (с. 180). В качестве контрпримера подходит $f(x) = x^{-(p+q)/(2pq)}$.

**11. Указание.** Рассуждение аналогично решению разобранной задачи 12 (с. 181). Подходит $k = 4\max(a/c;\ b/d)$.

**12. Указание.** Как и в разобранной задаче 13 (с. 182), покажите, что $\Phi(t) \leqslant \Phi(0)e^{2at}$.

**13. а). Указание.** Получите дифференциальное неравенство $\Phi' \leqslant 2C_4^4\Phi^2 + 2\Phi$, затем перейдите к переменной $y = 1/\Phi$. **Ответ.** Решение заведомо существует при $t < T_1 = \ln\left(1 + 1/(C_4^4\Phi(0))\right)/2$. **б). Указание.** Получите дифференциальное неравенство

$$\frac{\Phi'}{\Phi^2 + \frac{\Phi}{2C_4^4} + \frac{\|f\|^2_{L_2(\Omega)}}{2C_4^4}} \leqslant 2C_4^4.$$

Проинтегрировав его, получите соотношение $\Phi \leqslant L_1(\mathrm{tg}(L_2(t)))$, где $L_{1;2}$ — линейные функции, и найдите наименьшее положительное $t$, при котором правая часть обращается в бесконечность. Смотрите также [5], [36, гл. 7, §4]. **Ответ.** Решение заведомо существует при $t < T_1 = (\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,z_0)/R$, где $z_0 = (4C_4^4\Phi(0) + 1)/R$, $R = \sqrt{8C_4^4\|f\|^2_{L_2(\Omega)} - 1}$.

**14. а). Указание.** Рассуждения аналогичны решению разобранной задачи 15 (с. 184). **Ответ**[63]**.** Решение

[63] Величину $\Phi(0)$ считаем известной, поскольку она очевидным образом выражается через начальные данные.

заведомо разрушится не позже $t = T_2 = \Phi(0)/\left(2\int_\Omega \mu u_0^4 dx\right)$. **б). Указание.** Смотрите [36, гл. 7, §4]. **Ответ.** Решение заведомо разрушится не позже $t = T_2 = 4\Phi(0)/\sqrt{R}$, где $R = 4\left(\|u_0\|^4_{L_4(\Omega)} - \int_\Omega f u_0 dx\right)^2 - 4\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\Phi(0)$. Оценка корректна при $\|u_0\|^4_{L_4(\Omega)} > 4\int_\Omega f u_0 dx$ и $\|u_0\|^4_{L_4(\Omega)} > \int_\Omega f u_0 dx + \|f\|_{L_2(\Omega)}\sqrt{\Phi(0)/3}$.

**15. а). Ответ.** $X = y\frac{\partial}{\partial x}$. **10. б). Ответ.** $X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

**16. а). Ответ.** Преобразование: $\overline{x} = xe^{3a}$, $\overline{y} = ye^{5a}$, инварианты: $I = f(|y|^3/|x|^5)$, где $f(\cdot)$ — произвольная функция одного аргумента. **б). Ответ.** Преобразование: $\overline{x} = x/(1-ax)$, $\overline{y} = y/(1-ay)$, инварианты: $I = f(1/y - 1/x)$, где $f(\cdot)$ — произвольная функция одного аргумента. **в). Ответ.** Преобразование: $\overline{x} = x/(1-ax)$, $\overline{y} = y/(1-ax)$, инварианты: $I = f(y/x)$, где $f(\cdot)$ — произвольная функция одного аргумента.

**17. а). Указание.** Уравнение инвариантно относительно преобразования $\overline{x} = xe^a$, $\overline{y} = ye^a$, поэтому подходит интегрирующий множитель $\mu = 1/(x^4y+y^5)$ (постоянный коэффициент отброшен). **Ответ.** $(x^4+y^4)^3y^4 = c$. **б). Указание.** Уравнение инвариантно относительно преобразования $\overline{x} = xe^{3a}$, $\overline{y} = ye^a$, поэтому подходит интегрирующий множитель $\mu = 1/(3x^2y+y^7)$ (постоянный коэффициент отброшен). **Ответ.** $(3x^2+y^6)y^3 = c$. **в). Указание.** Уравнение инвариантно относительно преобразования $\overline{x} = xe^a$, $\overline{y} = ye^{-a}$, поэтому подходит интегрирующий множитель $\mu = -1/(y\,\mathrm{tg}(xy))$. **Ответ.** $y\sin(xy) = c$. **г). Указание.** Уравнение инвариантно относительно преобразования $\overline{x} = x+a$, $\overline{y} = ye^a$, поэтому подходит интегрирующий множитель $\mu = 1/(ye^x)$. **Ответ.** $\ln|y| - ye^{-x} = c$ и $y = 0$.

**18. а). Указание.** В качестве канонических переменных подходят $t = \ln|x|$, $u = y/x$. **Ответ.** $y = \pm x\sqrt{-\left(\sqrt{7}\operatorname{tg}\alpha + 3\right)/8}$, где $\alpha = \sqrt{7}\ln|x|/3 + C$. **б). Указание.** В качестве канонических переменных подходят $t = \ln|x|/3$, $u = x/y^3$. **Ответ.** $(3x^2 + y^6)y^3 = c$.

**19. а). Ответ.** В общем случае: $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}$, $X_4 = \frac{nx}{2}\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}$. Кроме того, при $n = -4/3$ уравнение допускает оператор $X_5 = -x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xu\frac{\partial}{\partial u}$. **б). Ответ.** $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}$, $X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{xu}{2a^2}\frac{\partial}{\partial u}$, $X_5 = u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_6 = xt\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{t}{2} + \frac{x^2}{4a^2}\right)u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_\infty = b(x;t)\frac{\partial}{\partial u}$, где $b(\cdot)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности $b'_t = a^2 b''_{x^2}$. **в). Ответ.** $X_1 = xt\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{t}{2} + \frac{x^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial u}$, $X_2 = \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t}$, $X_3 = \frac{\partial}{\partial t}$, $X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial u}$, $X_5 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_6 = \frac{\partial}{\partial u}$, $X_\infty = b(x;t)e^u\frac{\partial}{\partial u}$, где $b(\cdot)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности $b'_t = b''_{x^2}$.

**20. а). Ответ.** В общем случае: $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}$. Кроме того, при $f(u) = e^u$ уравнение допускает оператор $Y = x\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial u}$, при $f(u) = u^k$ — смотрите ответ к предыдущей задаче (пункт а). **б). Ответ.** В общем случае: $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}$. Кроме того, при $f(u) = e^u$ уравнение допускает оператор $Y = x\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial u}$, при $f(u) = u^k$ ($k \neq 0$, $k \neq -4/3$, $k \neq -4$) — оператор $Z = kx\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u}$, при $f(u) = u^{-4/3}$ — операторы $T_1 = 2x\frac{\partial}{\partial x} - 3u\frac{\partial}{\partial u}$ и $T_2 = x^2\frac{\partial}{\partial x} - 3xu\frac{\partial}{\partial u}$, при $f(u) = u^{-4}$ — операторы $S_1 = 2x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}$ и $S_2 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tu\frac{\partial}{\partial u}$.

**21. а). Ответ.** $u = f(x^2 + y^2)$, где $f(\cdot)$ — функция одного аргумента, определяемая уравнением $4zf''(z) + 4f'(z) = \sin f(z)$. **б). Ответ.** $u = xy + c_1 y + c_2$. **в). Ответ.** Два семейства решений: $u = c_1 x + c_2 y$ и $u = cy - x^3 y^{-2}/3$.

**22. а). Ответ.** Два семейства решений: $u = c_1 e^y$ и

$u = e^y f(ae^y - x)$, где функция $f(z)$ определяется неявной формулой $f - c_1 \ln|f + c_1| = az + c_2$, $a$ — произвольный параметр. **б). Ответ.** $u = \exp(2a\exp(y) + y)f(a\exp(y) - \ln x)$, где функция $f(z)$ определяется уравнением $a(2f(z) + f'(z)) = \exp(2z)(f'^2(z) + f(z)f''(z) + f(z)f'(z))$, $a$ — произвольный параметр.

**23. Ответ.** В первом случае метод не позволяет внести постоянную, поскольку решение инвариантно относительно данного преобразования. Во втором случае: $u = -(x^3/3 + c_2x^2/c_1 + c_2^2x/c_1^2 + c_2^3/(3c_1^3))y^{-2} + (c_1x + c_2)y^{-1}e^a$, $c_{1;2}, a \in \mathbf{R}$.

**24. Ответ.** $u = 2t^{-2} - z_0/6 + A_4t^2 + z_0t^3/18 + A_6t^4 + O(t^5)$, где $A_{4;6}$ — произвольные. (Здесь $t = z - z_0$, $z_0$ — произвольная постоянная.)

**25. Ответ.** При условии $2b^2 + c = 0$ уравнение проходит тест, причём $u = -12t^{-2} - a + bt + A_4t^2 + (cz_0 - ab)t^3/6 + A_6t^4 + O(t^5)$, где $A_{4;6}$ — произвольные, иначе — нет. (Здесь $t = z - z_0$, $z_0$ — произвольная постоянная.)

**26. Ответ.** Замена $f(v) = \sqrt[3]{v}$ даёт линейное уравнение $v''_{xy} = 0$. **б). Ответ.** Замена $u = f(v)$, где функция $f(\cdot)$ определяется квадратурной формулой $\int e^{\int \varphi(f)df} df = -v$, даёт линейное уравнение $v'_t = v''_{x^2}$.

# Что читать дальше?

Особо отметим некоторые книги, которые можно рекомендовать для дальнейшего систематического изучения нелинейных дифференциальных уравнений.

- В книге [30] обсуждаются разнообразные методы построения точных решений уравнений в частных производных. Даны основы группового анализа и теории Пенлеве. Разобрано множество примеров, предлагаются задачи для самостоятельного решения.

- В книге [19] дан обзор математических моделей, сводящихся к нелинейным уравнениям в частных производных. Подробно обсуждаются приёмы, связанные с теорией Пенлеве. Большое внимание уделено «интегрируемым» уравнениям, то есть таким, для которых удаётся построить решение задачи Коши при начальных данных довольно общего вида. В частности, обсуждаются теория солитонов и обратная задача рассеяния. Кроме того, рассматривается ряд методов построения точных решений, применимых и к неинтегрируемым уравнениям.

- В книге [11] выводится ряд дифференциальных уравнений, описывающих разнообразные явления. Обсуждаются методы исследования, входящие в традиционные курсы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, кроме того, большое внимание уделяется групповому анализу. Предлагаются задачи для самостоятельного решения.

- Книга [14] посвящена методу Пенлеве, применяемому как к обыкновенным дифференциальным уравнениям, так и к уравнениям в частных производных. Обсуждаются и методы построения точных решений для уравнений, не являющихся «интегрируемыми».

- Справочник [29] содержит точные решения большого количества нелинейных уравнений в частных производных.

- В книге [24] выводится и анализируется ряд линейных и нелинейных уравнений в частных производных. В частности, с помощью точных решений объясняются некоторые физические эффекты.

- Книга [36] посвящена неклассическим уравнениям соболевского типа. Даётся вывод некоторых уравнений. Обсуждаются линейные уравнения, порождающие обобщённые аналитические функции (подобно тому, как уравнение Лапласа связано с системой Коши–Римана и классическими аналитическими функциями). Основное внимание уделяется нелинейным уравнениям, а именно, исследованию глобальной и локальной по времени разрешимости и оценкам времени существования решений. Рассматриваются и некоторые численные методы.

- В книге [15] рассмотрены неклассические нелокальные по времени (то есть содержащие интегральные по времени операторы) уравнения. Проанализирована разрешимость локально по времени, сделаны оценки времени существования решений.

- Книги [35, 17, 18] представляют собой углублённые курсы функционального анализа и его применения к нелинейным дифференциальным уравнениям. Методы функционального анализа позволяют эффективно исследовать вопросы глобальной и локальной по времени разрешимости и делать оценки времени существования решений.
- Книга [44] посвящена асимптотикам решений нелинейных уравнений в частных производных. Предложена классификация нелинейностей по влиянию на асимптотическое поведение решений. Исследованы случаи малых и немалых (в смысле некоторых норм) начальных данных.
- Групповому анализу посвящены книги [26, 27] и трёхтомник [20, 21, 22], написанный создателем группового анализа — С. Ли.
- В книге [34] рассмотрены основные подходы к построению математических моделей. Построены и проанализированы модели, описывающие разнообразные явления физики, биологии, экономики. Уделено внимание моделированию сложных и трудноформализуемых объектов: например, проанализированы вопросы распределения власти в иерархии, безопасности ядерного реактора и математической реставрации Тунгусского феномена. Предлагаются задачи для самостоятельного решения.

# Литература

[1] *Аристов А.И.* Асимптотика при больших временах решения задачи Коши для уравнения соболевского типа с аналитической нелинейностью. Сборник статей молодых учёных ф-та ВМК МГУ. 2009, с. 17–22.

[2] *Аристов А.И.* Исследование качественных свойств решений одного нелинейного соболевского уравнения. Сборник статей молодых учёных ф-та ВМК МГУ. 2010, с. 11–22.

[3] *Аристов А.И.* Асимптотика при больших временах решения задачи Коши для уравнения соболевского типа с кубической нелинейностью. Дифференциальные уравнения. 2010, том 46, №9, с. 1354–1358.

[4] *Аристов А.И.* О задаче Коши для уравнения соболевского типа с квадратичной нелинейностью. Известия РАН. Серия математическая. 2011, том 75, №5, с. 3–18.

[5] *Аристов А.И.* О начально-краевой задаче для одного нелинейного неоднородного уравнения соболевского типа. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012, том 52, №10, с. 1855–1865.

[6] *Аристов А.И.* О точных решениях одного неклассического уравнения в частных производных. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015, том 55, №11, с. 1870–1875.

[7] *Аристов А.И.* О точных решениях одного неклассического нелинейного уравнения четвёртого порядка. Математические заметки. 2019, том 105, выпуск 4, с. 506–517.

[8] *Воркуев Б.Л.* Количественные методы исследования в микро- и макроэкономике. М., ТЕИС, 2007.

[9] *Ерофеенко В.Т., Козловская И.С.* Уравнения с частными производными и математические модели в экономике. М., УРСС, 2004.

[10] *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Факториал, 1997.

[11] *Ибрагимов Н. Х.* Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. М., Физматлит, 2012.

[12] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2006.

[13] *Конотоп В.В., Шишмарёв И.А.* Об асимптотике решений обобщённого уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова при больших временах. Дифференциальные уравнения, 1998, том 34, №5, с. 668–681.

[14] *Конт Р.М., Мюзетт М.* Метод Пенлеве и его приложения. М.–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.

[15] *Корпусов М.О.* Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М., УРСС, 2010.

[16] *Корпусов М.О.* О мгновенном разрушении решений эволюционных задач на полупрямой. Известия РАН. Серия математическая. 2018, том 82, №5, с. 61–77.

[17] *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике. Геометрические и топологические свойства линейных пространств. М., КРАСАНД, 2011.

[18] *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике. Методы исследования нелинейных операторов. М., КРАСАНД, 2011.

[19] *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. Издательский дом «Интеллект», Долгопрудный, 2010 (или 2008).

[20] *Ли С.* Симметрии дифференциальных уравнений. Том 1: Лекции о дифференциальных уравнениях с известными инфинитезимальными преобразованиями. М.–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.

[21] *Ли С.* Симметрии дифференциальных уравнений. Том 2: Лекции о непрерывных группах

с геометрическими и другими приложениями. М.–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.

[22] *Ли С.* Симметрии дифференциальных уравнений. Том 3: Геометрия контактных преобразований. М.–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.

[23] *Ломов И.С.* Обобщённые функции в задачах математической физики. М., Макс-Пресс, 2021.

[24] *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.

[25] *Масленникова В.Н.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., Изд-во РУДН, 1997.

[26] *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.

[27] *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., Мир, 1989.

[28] *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. М., издательство Московского университета, 1990.

[29] *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М., Физматлит, 2002.

[30] *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., Физматлит, 2005.

[31] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М., Наука, 1984.

[32] *Рабинович М.И.* Автоколебания распределённых систем. Известия вузов. Радиофиз. 1974, том 17, №4, с. 477–510.

[33] *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., Наука, 1987 г.

[34] *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. М., Физматлит, 2005 г.

[35] *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О.* Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. М., Научный мир, 2008 г.

[36] *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., Физматлит, 2007 г.

[37] *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики. Известия АН СССР. Серия математическая. 1954, №18.

[38] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., Изд-во МГУ, Изд-во «Наука», 2004.

[39] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления (том I). М., Физматлит, Лаборатория знаний, 2003.

[40] *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.

[41] *Чеканский А.Н., Фролова Н.Л.* Микроэкономика. Промежуточный уровень: учебник. М., ИНФРА-М, 2005.

[42] *Черемных Ю.Н.* Микроэкономика. Продвинутый уровень: учебник. М., ИНФРА-М, 2008.

[43] *Шишмарёв И.А.* Об одном нелинейном уравнении типа Соболева. Дифференциальные уравнения, 2005, т. 41, номер 1, с. 138-140.

[44] *Hayashi N., Kaikina E., Naumkin P., Shishmarev I.* Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations. Berlin; Heidelberg, 2006.

[45] *Mochizuki K., Shishmarev I.A.* Large time asymptotics of small solutions to generalized Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation. Funkcialaj Ekvacioj. Том 44, №1, 2001 г., с. 99–117.

[46] *Naumkin P., Shishmarev I.* Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves. Providence. AMS. 1994. V. 133.

*Учебное издание*

**Аристов** Анатолий Игоревич

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

Учебное пособие

*Электронное издание сетевого распространения*
Художественное оформление *Ю. Н. Симоненко*
Макет утвержден 25.08.2023. Изд. № 12501

Издательство Московского университета

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com
http: // msupress.com. Отдел реализации:
тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com

Книга отражает содержание курса «Нелинейные дифференциальные уравнения». В издании выводится ряд нелинейных уравнений в частных производных, моделирующих разнообразные процессы. Разбираются эффективные методы исследования уравнений. Предложены задачи с решениями, задачи для самостоятельного решения и обзор литературы.

МГУ
Издательство Московского университета
ISBN 978-5-19-011917-6
9 785190 119176