Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова

А. В. Домрина

Числовые и функциональные ряды в математическом анализе

Издательство Московского университета

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова

Библиотека
факультета ВМК
МГУ

А. В. Домрина

Числовые и функциональные ряды в математическом анализе

Методическое пособие

Издательство Московского университета • 2023

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Д66

Печатается по решению Редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова

Рецензент:
Е. А. Григорьев — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова

Домрина, А. В.

Д66 Числовые и функциональные ряды в математическом анализе: методическое пособие. — Москва : Издательство Московского университета, 2023. — 54, [1] с. — Электронное издание сетевого распространения. — (Библиотека факультета ВМК МГУ).

ISBN 978-5-19-011912-1 (e-book)

При составлении пособия использован многолетний опыт преподавания курса математического анализа на факультете ВМК МГУ. В первой, теоретической главе даны формулировки основных определений и подробный разбор стандартных задач, на основе которых строится большая часть примеров. Вторая глава состоит из 20 вариантов контрольных работ различной сложности. Третья глава включает решение части задач из вариантов второй главы с указанием типичных ошибок и недочетов. Четвертая глава содержит ответы к вариантам из второй главы.

Книга предназначена для студентов, изучающих числовые и функциональные ряды, а также для преподавателей, ведущих практические занятия.

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-19-011912-1
(e-book)

Оглавление

Предисловие

Данное пособие написано на основе многолетнего опыта преподавания курса математического анализа на факультете ВМК МГУ. Оно содержит 20 вариантов контрольных работ по теме “Числовые и функциональные ряды”. При составлении вариантов учитывались основные “болевые точки” — типичные ошибки и заблуждения студентов, изучающих теорию рядов. Пособие состоит из четырех глав. В первой главе содержатся необходимые теоретические сведения: формулировки основных утверждений и подробный разбор стандартных задач, на основе которых строится большая часть примеров из данного раздела математического анализа. Вторая глава состоит из 20 вариантов контрольных работ, немного различающихся по сложности. Третья глава содержит решение части задач из вариантов второй главы с указанием на типичные ошибки и недочеты. Четвертая глава содержит ответы к вариантам из второй главы. Пособие ориентировано на студентов и преподавателей математического, физического и инженерно-физического профилей.

Автор выражает сердечную благодарность своим коллегам — Е. А. Григорьеву за полезные замечания и предложения, способствовавшие улучшению рукописи, и А. Б. Будаку за внимание и помощь в организационных вопросах.

Глава 1

Необходимые теоретические сведения

1.1 Определение числового ряда, необходимое условие сходимости, критерий Коши

Определение. *Числовым рядом* называется выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1.1}$$

где a_n — числа, называемые *членами ряда*. Величины $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbf{N}$, называются *частичными суммами ряда* (1.1). Если последовательность $\{S_n\}$ сходится к числу S, то ряд (1.1) называется *сходящимся*, число S называют его суммой и пишут $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если же последовательность $\{S_n\}$ не сходится к конечному пределу, то ряд (1.1) называется *расходящимся*.

Из определения следует, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Свойство линейности. *Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и λ, μ — произвольные числа, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ сходится и справедливо равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Отметим также, что сумма сходящегося и расходящегося рядов является расходящимся рядом.

Необходимое условие сходимости ряда. *Если ряд* (1.1) *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Критерий Коши сходимости ряда. *Ряд* (1.1) *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\epsilon > 0$ *существует номер* $N \in \mathbf{N}$ *такой, что для любых* $n \geqslant N$ *и* $p \in \mathbf{N}$ *справедлива оценка*

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon.$$

Пример 1. Исследовать на сходимость геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}, \quad b_1 \neq 0.$$

Решение. При $|q| \geqslant 1$ нарушается необходимое условие сходимости ряда, поскольку $|b_1 q^{n-1}| \geqslant |b_1| > 0$.

При $|q| < 1$ имеем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_1 q^{k-1} = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

Таким образом, ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$.

Ответ. Ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$, сумма ряда равна $\frac{b_1}{1-q}$.

Замечание. В примере 1 ряд сходится тогда и только тогда, когда выполнено необходимое условие сходимости. Однако это условие не является достаточным в общем случае.

Пример 2. Показать, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, хотя для него выполнено необходимое условие сходимости.

Решение. Необходимое условие сходимости выполнено, поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Расходимость ряда следует из отрицания критерия Коши. Действительно, беря $\epsilon = \frac{1}{2}$ и для любого $N \in \mathbb{N}$ полагая $n = p = N$, имеем

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geqslant \frac{p}{n+p} = \frac{1}{2} = \epsilon.$$

Мы воспользовались тем, что сумма выше содержит p слагаемых, минимальное из которых равно $\frac{1}{n+p}$.

1.2 Ряды с неотрицательными членами, признаки сравнения, Даламбера, Коши, Раабе, Гаусса, интегральный признак сходимости

Признак сравнения. *Пусть, начиная с некоторого номера* $n_0 \in \mathbf{N}$, *выполняется оценка* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. *Тогда из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *из расходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Следствие. *Если числа* a_n, b_n *положительны начиная с некоторого* $n_0 \in \mathbf{N}$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0, \tag{1.2}$$

то есть $a_n \sim cb_n$, *то ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Замечание. Из следствия выше получаем, что ряды, члены которых образуют две эквивалентные положительные последовательности, сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера. *Пусть* $a_n > 0$ *для всех* n *и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится при* $q < 1$ *и расходится при* $q > 1$.

Признак Коши (радикальный). *Пусть* $a_n \geqslant 0$ *и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится при* $q < 1$ *и расходится при* $q > 1$.

Признак Раабе. *Пусть для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $p > 1$ и расходится, если $p < 1$.

Признак Гаусса. *Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ отношение $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ имеет вид*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\epsilon}},$$

где $\epsilon > 0$, λ, μ — фиксированные числа и последовательность $\{\gamma_n\}$ ограничена (то есть $\frac{\gamma_n}{n^{1+\epsilon}} = O\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right)$).

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\lambda > 1$ или при $\lambda = 1$, $\mu > 1$ и расходится при $\lambda < 1$ или $\lambda = 1$, $\mu \leqslant 1$.

Интегральный признак сходимости. *Пусть $f(x)$ — положительная монотонно убывающая функция на промежутке $[m, +\infty)$ для некоторого натурального m. Тогда ряд $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int_m^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

Пример 3. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Решение. При $p \leqslant 0$ ряд расходится, ибо не выполнено необходимое условие сходимости, $\frac{1}{n^p} \geqslant 1$. При $p > 0$ функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ — положительная и монотонно убывающая на луче $[1, +\infty)$, тем самым, согласно интегральному признаку сходимости, ряд сходится одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$, который, в свою очередь, сходится $\iff p > 1$.

Ответ. Ряд сходится $\iff p > 1$.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \ln^b n}$.

Решение. Положим $a_n = \frac{1}{n^a \ln^b n}$. Если $b = 0$, то ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ сходится при $a > 1$ и расходится при $a \leqslant 1$ согласно примеру выше.

Пусть $b \neq 0$. Так как для любого $\delta > 0$ предел $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\delta} = 0$, то начиная с некоторого номера $n_0(\delta) \geqslant 2$ имеем

$$\frac{1}{n^{a+|b|\delta}} \leqslant \frac{1}{n^a \ln^{|b|} n} \leqslant a_n \leqslant \frac{\ln^{|b|} n}{n^a} \leqslant \frac{1}{n^{a-|b|\delta}}.$$

Если $a > 1$, то число $p = a - |b|\delta > 1$ для достаточно малых δ. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится, то ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ также сходится по признаку сравнения.

Если $a < 1$, то число $p = a + |b|\delta < 1$ для достаточно малых δ. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ расходится, то ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ также расходится по признаку сравнения.

Если $a = 1$, то при $b \leqslant 0$ имеем $a_n \geqslant \frac{1}{n}$, поэтому ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ расходится. При $b > 0$, числа a_n положительны и монотонно убывают, следовательно, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ сходится одновременно с интегралом $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^b x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^b}$, который сходится при $b > 1$.

Ответ. При $a > 1$ ряд сходится при любом b, при $a < 1$ ряд расходится при любом b, при $a = 1$ ряд сходится при $b > 1$ и расходится при $b \leqslant 1$.

1.3 Ряды с членами произвольного знака, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле-Абеля

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то его называют *сходящимся условно*.

Абсолютно сходящиеся ряды сходятся.

Признак Лейбница. *Пусть числа p_n положительны и монотонно сходятся к нулю. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} p_n = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \ldots$$

сходится.

Пример 5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

Решение. При $p \leqslant 0$ ряд расходится, так как нарушено необходимое условие сходимости. При $p > 0$ последовательность $\frac{1}{n^p}$ монотонно сходится к нулю, поэтому ряд сходится по признаку Лейбница.

Ряд сходится абсолютно $\iff p > 1$ (см. пример 3).

Ответ. Ряд сходится абсолютно при $p > 1$, условно при $0 < p \leqslant 1$ и расходится при $p \leqslant 0$.

Признак Дирихле-Абеля сходимости числового ряда. *Для сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *достаточно выполнения одной из двух пар условий:*

I. *а) последовательность* $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ *частичных сумм ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ограничена,*

б) последовательность $\{b_n\}$ *монотонно сходится к нулю.*

II. *а) ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится,*

б) последовательность $\{b_n\}$ *монотонна и ограничена.*

Пример 6. Получить не зависящие от n оценки для частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ в случаях:

a) $a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
b) $a_n = \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$;
c) $a_n = \cos nx$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$;
d) $a_n = (-1)^n \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$;
e) $a_n = (-1)^n \cos nx$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}\}$.

Решение В случае a) имеем

$$a_{4n+1} = a_{4n+4} = 1, \quad a_{4n+2} = a_{4n+3} = -1, \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Поэтому $S_n \in \{1, -1, 0\}$, следовательно, $|S_n| \leqslant 1$.

В случае b) при $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, все $S_n = 0$.

Иначе $\sin(x/2) \neq 0$, поэтому

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin kx \sin(x/2)}{2\sin(x/2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k-1/2)x - \cos(k+1/2)x}{2\sin(x/2)} =$$

$$= \frac{\cos(x/2) - \cos(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}.$$

Таким образом, $|S_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

В случае c) величина $\sin(x/2) \neq 0$, поэтому

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\cos kx \sin(x/2)}{2\sin(x/2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k+1/2)x - \sin(k-1/2)x}{2\sin(x/2)} =$$

$$= \frac{\sin(n+1/2)x - \sin(x/2)}{2\sin(x/2)}.$$

Таким образом, $|S_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

В случае d) при $x = \pi(1+2k)$, $k \in \mathbb{Z}$, все $S_n = 0$. Для остальных значений параметра x сделаем замену $y = x+\pi$. Имеем $\sin(y/2) = \cos(x/2) \neq 0$. Так как $\sin ky = (-1)^k \sin kx$, то $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \sin ky$. Рассуждая аналогично b), получаем $|S_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(y/2)|} = \frac{1}{|\cos(x/2)|}$.

В случае e) как и в случае d) полагаем $y = x + \pi$. Далее рассуждая аналогично c), получаем $|S_n| \leqslant \frac{1}{|\cos(x/2)|}$.

Ответ a) $|S_n| \leqslant 1$;

b) если $x \in \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, то $S_n = 0$; если $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, то $|S_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$;

c) $|S_n| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$;

d) если $x \in \{\pi(1+2k), k \in \mathbb{Z}\}$, то $S_n = 0$; если $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}\}$, то $|S_n| \leqslant \frac{1}{|\cos(x/2)|}$;

e) $|S_n| \leqslant \frac{1}{|\cos(x/2)|}$.

Пример 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$, $x \in (0, 2\pi)$.

Решение 1) При $x = \pi$ имеем $\sin nx = 0$, $\cos nx = (-1)^n$, поэтому первый из рядов сходится абсолютно для любого p, второй сходится абсолютно при $p > 1$ и условно при $p \in (0, 1]$ (см. пример 5).

2) Рассмотрим случай $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Пусть $p \leqslant 0$. Так как $x \neq \pi$, то последовательности $\dfrac{\sin nx}{n^p}$, $\dfrac{\cos nx}{n^p}$ не сходятся к нулю, поэтому оба ряда расходятся, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

Пусть $p > 0$. Так как для любого натурального n справедливы оценки (см. пример 6)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)}, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)},$$

а последовательность $\dfrac{1}{n^p}$ монотонно стремится к нулю, то оба ряда сходятся, поскольку для них выполнена первая пара условий признака Дирихле-Абеля.

Исследуем оба ряда на абсолютную сходимость. Если $p > 1$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ (см. пример 3) и оценок

$$\frac{|\sin nx|}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^p}, \qquad \frac{|\cos nx|}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^p},$$

следует абсолютная сходимость исходных рядов.

Если же $p \in (0, 1]$, то из оценок

$$|\sin nx| \geqslant \sin^2 nx = \frac{1 - \cos 2nx}{2}, \quad |\cos nx| \geqslant \cos^2 nx = \frac{1 + \cos 2nx}{2},$$

получаем:

$$\frac{|\sin nx|}{n^p} \geqslant \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos 2nx}{2n^p}, \quad \frac{|\cos nx|}{n^p} \geqslant \frac{1}{2n^p} + \frac{\cos 2nx}{2n^p}.$$

Так как $\sin x \neq 0$, то, заменяя в рассуждениях выше x на $2x$, получаем что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx}{2n^p}$ сходится. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ расходится, оба исходных ряда не являются абсолютно сходящимися, следовательно, они сходятся условно.

Ответ. При $x = \pi$ первый из рядов сходится абсолютно для любого p, второй сходится абсолютно при $p > 1$ и условно при $p \in (0, 1]$. При $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ оба ряда сходятся абсолютно при $p > 1$ и условно при $p \in (0, 1]$.

1.4 Бесконечные произведения

Определение. *Бесконечным произведением* называется выражение

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n. \tag{1.3}$$

Величины $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$, $n \in \mathbf{N}$ называются *частичными произведениями.* Если последовательность $\{P_n\}$ сходится к числу $P \neq 0$, то произведение (1.3) называется *сходящимся*, число P называют его значением и пишут $P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$. Если последовательность $\{P_n\}$ не сходится к конечному пределу, или сходится к нулю, то произведение (1.3) называется *расходящимся.*

Далее считаем, что все множители в бесконечном произведении (1.3) отличны от нуля.

Необходимое условие сходимости бесконечного произведения. *Если произведение* (1.3) *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

Далее считаем, что все множители в бесконечном произведении (1.3) положительны.

Критерий сходимости бесконечного произведения. *Бесконечное произведение* (1.3) *в котором все множители положительны, сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n. \tag{1.4}$$

Поскольку у сходящихся бесконечных произведений общий множитель стремится к единице, будем записывать бесконечное произведение в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n). \tag{1.5}$$

Согласно сказанному выше, мы предполагаем, что $u_n > -1$ для всех натуральных n.

Утверждение 1. *Если, начиная с некоторого номера* n_0, *все числа* u_n *в произведении* (1.5) *одного знака (то есть либо все неотрицательны, либо все неположительны), то бесконечное произведение* (1.5) *сходится в том и только том случае, когда сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

В общем случае справедливо

Утверждение 2. *Пусть* $u_n > -1$ *для всех натуральных* n *и сходится один из рядов* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$. *Тогда сходимость другого ряда необходима и достаточна для сходимости бесконечного произведения* (1.5).

Определение. Бесконечное произведение (1.3) называется *абсолютно сходящимся*, если абсолютно сходится ряд (1.4). Если бесконечное произведение сходится, но не абсолютно, оно называется *условно сходящимся*.

Абсолютно сходящиеся произведения сходятся. Бесконечное произведение (1.5) абсолютно сходится в том и только том случае, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$.

1.5 Равномерная сходимость. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле-Абеля равномерной сходимости, функциональные свойства равномерно сходящихся рядов

Пусть на некотором множестве D задана последовательность функций $\{f_n(x)\}$.

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся* к функции $f(x)$ на множестве D, если для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N = N(\epsilon)$ такой, что для всех $n \geqslant N$ и всех $x \in D$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Утверждение 3 (Супремум-критерий). *Для равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на множестве D необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{1.6}$$

Признак равномерного стремления к нулю функциональной последовательности. *Если последовательность $\{\phi_n(x)\}$ определена на множестве D и существует числовая последовательность $\{p_n\}$ такая, что*

$$|\phi_n(x)| \leqslant p_n \text{ для всех } x \in D, \lim_{n\to\infty} p_n = 0, \tag{1.7}$$

то последовательность $\{\phi_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на множестве D.

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \tag{1.8}$$

члены которого определены на множестве D, называется *равномерно сходящимся* к сумме $S(x)$ на D, если последовательность $\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ его частичных сумм сходится равномерно к $S(x)$ на множестве D.

Отметим, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на равномерную сходимость.

Критерий Коши равномерной сходимости ряда. *Для равномерной сходимости ряда* (1.8) *на множестве D необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовал номер $N = N(\epsilon)$ такой, что для всех $n \geqslant N$, всех натуральных p и всех $x \in D$ выполнялось неравенство*

$$|a_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| < \epsilon.$$

Необходимое условие равномерной сходимости ряда. *Если ряд* (1.8) *сходится равномерно на множестве D, то функциональная последовательность $\{a_n(x)\}$ равномерно сходится к нулю на множестве D.*

Признак Вейерштрасса. *Пусть ряд* (1.8) *определен на множестве D и существует такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, что в каждой точке $x \in D$ выполнена оценка $|a_n(x)| \leqslant p_n$. Тогда ряд* (1.8) *сходится равномерно на множестве D.*

Признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости. *Пусть ряд* (1.8) *и последовательность функций $\{b_n(x)\}$ определены на множестве D. Тогда для равномерной сходимости на множестве D ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

достаточно выполнения одной из двух пар условий:

I. *а) Последовательность частичных сумм ряда* (1.8) *равномерно ограничена на множестве D, то есть существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D$ и всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)| \leqslant M$.*

   б) Последовательность $\{b_n(x)\}$ монотонна в каждой точке $x \in D$ и равномерно сходится к нулю на множестве D.

II. *а) Ряд* (1.8) *сходится равномерно на множестве* D.

б) Последовательность $\{b_n(x)\}$ *монотонна в каждой точке* $x \in D$ *и равномерно ограничена на множестве* D, *то есть существует такое число* $M > 0$, *что для всех* $x \in D$ *и всех* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка* $|b_n(x)| \leqslant M$.

Теорема 1 (Теорема о предельном переходе для функциональных рядов)**.** *Пусть ряд* (1.8) *сходится равномерно на* D *к функции* $S(x)$ *и* x_0 *— предельная точка множества* D. *Если для каждой функции* $a_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ *существует конечный предел* $\lim_{x \to x_0, x \in D} a_n(x) = c_n$, *то*

а) сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$,

б) существует предел $\lim\limits_{x \to x_0, x \in D} S(x)$ *и справедливо равенство*

$$\lim_{x \to x_0, x \in D} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Следствие. *Пусть ряд* (1.8) *сходится на интервале* (a, b) *и все его члены непрерывны на отрезке* $[a, b]$. *Тогда, если ряд расходится хотя бы в одном из концов отрезка* $[a, b]$, *то он сходится неравномерно на интервале* (a, b).

Пример 8. Исследовать на равномерную сходимость на множестве X **ряды** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ **в случаях:**

а) $X = [\delta, 2\pi - \delta]$ **для фиксированного** $\delta \in (0, \pi)$**,**

б) $X = (0, 2\pi)$**.**

Решение. Оба ряда сходятся на интервале $(0, 2\pi)$ (см. пример 7).

а) Покажем, что оба ряда сходятся равномерно. Действительно, беря $M = \frac{1}{\sin(\delta/2)}$ и используя оценки b), c) из примера 6, получаем, что для всех $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ и всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)} \leqslant M, \quad \left| \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)} \leqslant M,$$

поэтому частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$, $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ равномерно ограничены на X. Последовательность $\dfrac{1}{n}$ монотонно сходится к нулю и не зависит от переменной x, поэтому она равномерно сходится к нулю на X. Тем самым оба исходных ряда сходятся равномерно на множестве X, так как они удовлетворяют первой паре условий признака Дирихле-Абеля.

б) Покажем, что оба ряда сходятся неравномерно на интервале $X = (0, 2\pi)$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$. Будем рассуждать как при доказательстве расходимости гармонического ряда с помощью отрицания критерия Коши. Возьмем $\epsilon = \dfrac{1}{4}$. Тогда для любого номера N при $n = p = N$ и $x = \dfrac{\pi}{6n}$ имеем $n + p = 2n$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx}{k} > \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{4} = \epsilon. \tag{1.9}$$

(При доказательстве оценки (1.9) мы пользовались тем, что $\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{k\pi}{6n} \leqslant \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{1}{2} < \sin \dfrac{k\pi}{6n}$ при $n + 1 \leqslant k \leqslant 2n$.)

Неравномерную сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos kx}{k}$ на множестве $X = (0, 2\pi)$ можно доказать совершенно аналогично, но мы приведем рассуждение, опирающееся на следствие теоремы о предельном переходе. Действительно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$ сходится на интервале $(0, 2\pi)$, все члены ряда — непрерывные функции на отрезке $[0, 2\pi]$, а при $x = 0$ этот ряд расходится, так как является гармоническим. Поэтому из следствия теоремы о предельном переходе получаем, что ряд сходится неравномерно на интервале $(0, 2\pi)$.

Ответ. а) оба ряда сходятся равномерно, б) оба ряда сходятся неравномерно.

Теорема 2 (Теорема о непрерывности суммы ряда)**.** *Пусть ряд* (1.8) *сходится равномерно на D к функции $S(x)$ и все функции $a_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывны на множестве D. Тогда $S(x)$ также непрерывна на D.*

Часто бывает нужно исследовать на непрерывность сумму функционального ряда на интервале (a,b), где $-\infty \leqslant a \leqslant b \leq +\infty$. Так как

$$(a,b) = \bigcup_{[\alpha,\beta]\subset(a,b)} [\alpha,\beta], \tag{1.10}$$

то непрерывность суммы ряда на интервале (a,b) следует из ее непрерывности на каждом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. Таким образом, справедливо

Следствие. *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, причем все функции $a_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывны на интервале (a,b). Тогда и сумма данного ряда непрерывна на интервале (a,b).*

Теорема 3 (Теорема о почленном дифференцировании ряда)**.** *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ состоит из дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций и сходится в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ к дифференцируемой функции, причем*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x).$$

Часто бывает нужно исследовать на дифференцируемость сумму функционального ряда на интервале (a,b), где $-\infty \leqslant a \leqslant b \leq +\infty$. Вновь используя представление (1.10), получаем, что дифференцируемость суммы ряда на интервале (a,b) следует из ее дифференцируемости на каждом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. Таким образом, справедливо

Следствие. *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится на интервале (a,b) и состоит из дифференцируемых на этом интервале функций. Если ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$ сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, то сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ дифференцируема на (a,b), причем*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x).$$

Теорема 4 (Теорема о почленном интегрировании ряда)**.** *Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ состоит из интегрируемых на отрезке $[a,b]$ функций и сходится равномерно на $[a,b]$. Тогда его сумма также интегрируема на отрезке $[a,b]$, причем*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x) dx.$$

1.6 Степенные ряды. Определение, формула Коши-Адамара, функциональные свойства степенных рядов, поведение в граничных точках (вторая теорема Абеля)

Определение. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots, \tag{1.11}$$

где коэффициенты c_n, число a, называемое *центром ряда* (1.11) и переменная x являются, вообще говоря, комплексными числами.

Теорема 5 (Теорема Коши-Адамара)**.** *Положим*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{1.12}$$

Тогда степенной ряд (1.11) *сходится абсолютно при* $|x-a| < R$ *и расходится при* $|x-a| > R$*. Число* R *называется радиусом сходимости ряда* (1.11)*, равенство* (1.12) *называется формулой Коши-Адамара.*

Для нахождения радиуса сходимости часто используется следующее

Утверждение 4. *Если существует конечный или бесконечный предел* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$*, то*

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{1.13}$$

Далее считаем, что коэффициенты c_n ряда (1.11), его центр a и переменная x вещественны, а его радиус сходимости R положителен. Тогда справедливы следующие утверждения:

Теорема 6 (Вторая теорема Абеля)**.** *Если степенной ряд* (1.11) *сходится в точке* $a+R$*, то он сходится равномерно на отрезке* $[a, a+R]$*, в частности*

$$\lim_{x\to a+R-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n. \tag{1.14}$$

Если степенной ряд (1.11) *сходится в точке $a-R$, то он сходится равномерно на отрезке $[a-R,a]$, в частности*

$$\lim_{x\to a-R+0}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(-R)^n. \qquad (1.15)$$

Теорема 7 (Теорема о почленном дифференцировании степенного ряда)**.** *Сумма степенного ряда* (1.11) *бесконечно дифференцируема внутри интервала сходимости $|x-a|<R$, причем*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}, \qquad (1.16)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n\right)^{(k)}=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}, \qquad (1.17)$$

где $k\in\mathbb{N}$, $k>1$. Радиусы сходимости рядов в правой части (1.16), (1.17) *тоже равны R.*

Теорема 8 (Теорема о почленном интегрировании степенного ряда)**.** *Внутри интервала сходимости $|x-a|<R$ степенной ряд можно почленно интегрировать, то есть*

$$\int_a^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t-a)^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}. \qquad (1.18)$$

При этом радиус сходимости ряда в правой части (1.18) *тоже равен R.*

Пусть $f(x)$— сумма ряда (1.11). Из соотношений (1.16), (1.17) следует, что

$$c_0=f(a),\quad c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad n=1,2,\ldots$$

Определение. Пусть функция $g(x)$ имеет в точке a производные любого порядка. *Рядом Тейлора функции $g(x)$ с центром в точке a* называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Справедливо

Утверждение 5. *Ряд* (1.11) *является рядом Тейлора своей суммы с центром в точке a.*

1.7 Основные разложения в степенной ряд некоторых элементарных функций

Приведем без доказательства разложения в ряд Тейлора основных элементарных функций.

Экспоненциальная функция.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, -\infty < x < \infty; \tag{1.19}$$

Тригонометрические и гиперболические функции.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, -\infty < x < \infty; \tag{1.20}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, -\infty < x < \infty; \tag{1.21}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, -\infty < x < \infty; \tag{1.22}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, -\infty < x < \infty; \tag{1.23}$$

Биномиальный ряд.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \tag{1.24}$$

Если $m = 0, 1, \dots$, то разложение справедливо при $-\infty < x < \infty$.

В остальных случаях: Если $m \leqslant -1$, то разложение справедливо при $-1 < x < 1$,

Если $-1 < m < 0$, то разложение справедливо при $-1 < x \leqslant 1$,

Если $m > 0$ нецелое, то разложение справедливо при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Пример 9. Разложить функцию $\ln(1+x)$ в ряд по степеням x и найти, где разложение справедливо.

Решение. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, имеем

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n, \quad -1 < t < 1. \tag{1.25}$$

Так как степенной ряд почленно интегрируем внутри интервала сходимости, то при $-1 < x < 1$ справедливо

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \quad (1.26)$$

Поскольку при почленном интегрировании радиус сходимости не меняется, то ряд в правой части (1.26) сходится при $-1 < x < 1$ и расходится при $|x| > 1$. При $x = 1$ ряд в правой части (1.26) сходится по признаку Лейбница. Используя вторую теорему Абеля, имеем

$$\ln 2 = \lim_{x\to 1-0} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

отсюда (1.26) справедливо и при $x = 1$. При $x = -1$ ряд в правой части (1.26) расходится.

Ответ. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots,\ -1 < x \leqslant 1.$

Пример 10. Разложить функцию $\operatorname{arctg} x$ **в степенной ряд по степеням** x **и найти, где разложение справедливо.**

Решение. Заменяя t на t^2 в (1.25), получаем

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}, \quad -1 < t < 1.$$

Рассуждая как в предыдущей задаче, получаем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (1.27)$$

ряд в правой части (1.27) сходится при $-1 < x < 1$ и расходится при $|x| > 1$. При $x = \pm 1$ ряд в правой части (1.27) сходится по признаку Лейбница. Используя вторую теорему Абеля, имеем

$$\operatorname{arctg} 1 = \lim_{x\to 1-0} \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = \lim_{x\to -1+0} \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}.$$

Таким образом, разложение (1.27) справедливо на отрезке $[-1, 1]$.

Ответ. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,\ -1 \leqslant x \leqslant 1.$

Глава 2

Варианты контрольных работ

Задачи, помеченные *, приведены с решениями, которые содержатся в главе 3.

Вариант 1.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n^2}{2\sqrt{n}}$.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{\sin n}{n}\right)e^{\frac{\sin n}{n}}$.

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ на множестве X, где а) $X=[1,2]$, б) $X=[0,+\infty)$.

5. Исследовать функцию $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n\ln n}$ на дифференцируемость на интервале $(0,2\pi)$.

6. Разложить в степенной ряд с центром в нуле функцию

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)\ln(x+2), & x\neq -2,\\ 0, & x=-2.\end{cases}$$

Указать, где разложение справедливо.

Вариант 2.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \sin\dfrac{1}{n}$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n \operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$.

4*. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin\pi nx}{n^2+x^2}$ на множестве X, где а) $X=\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, б) $X=[0,2]$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos^2 nx}{n\ln^2 n}$ и исследовать его сумму на непрерывность во внутренних точках множества X.

6. Разложить функцию $f(x)=(x+1)\sin^3 x$. в степенной ряд с центром в нуле. Указать, где разложение справедливо.

Вариант 3.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n+1}{n(a\ln^3 n+1)}$, $a\geqslant 0$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(\pi\sqrt{n^2+4})\sin\dfrac{1}{n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3*. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a\cos n}{\sqrt{n}}\right)e^{\frac{\cos n}{\sqrt{n}}}$, $|a|\leqslant 1$.

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{xn}}{n^2x^2+1}$ на множестве X, где а) $X=[1,2]$, б) $X=[0,1]$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\dfrac{1}{2^n}\right)^n$ и исследовать его сумму на непрерывность во внутренних точках множества X.

6. Разложить в степенной ряд с центром в точке $a = -1$ функцию $f(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{3x+4}}$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

Вариант 4.

1*. Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!n^{3/2}2^n}{7\cdot 9\cdots(2n+5)}$.

2. Исследовать ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ на множестве X, где а) $X = [-1, 1]$, б) $X = (-\infty, +\infty)$.

5. Исследовать сумму ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx+\frac{1}{n})}{n}$ на непрерывность на интервале $(0, 2\pi)$.

6. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{1-x^4} + \dfrac{2}{3}\operatorname{arctg} x^2$ в степенной ряд с центром в нуле и найти радиус сходимости полученного ряда.

Вариант 5.

1. Исследовать на сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\operatorname{sh}^{\alpha}(\ln n)$.

2. Исследовать ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^{\alpha}+(-1)^n}$.

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x}e^{-\frac{n^2}{x}}$ на множестве X, где а) $X = [1, 2]$, б) $X = (0, +\infty)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2} \sqrt{x + \sin^2 \dfrac{x}{n}}$ и исследовать его сумму на непрерывность на множестве X.

6. Разложить функцию $\dfrac{d^2}{dx^2} \left(x \ln \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2} \right)$ в степенной ряд с центром в нуле и найти множество точек, на котором разложение справедливо.

Вариант 6.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n^2} \right)^{n^5}$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n + \frac{1}{n^2})}{n \ln n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right)$.

4*. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-n^2 x} \cos nx}{\sqrt{n}}$ на множестве X, где а) $X = \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi \right]$, б) $X = (0, \pi]$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{x^n + x^{-n}}}{2^n}$ и исследовать его сумму на непрерывность во внутренних точках X.

6. Разложить функцию $f(x) = \arccos \dfrac{x}{\sqrt{9 + x^2}}$ в степенной ряд с центром в нуле и указать множество сходимости полученного ряда.

Вариант 7.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!} \left(1 - \cos(e^{-\frac{n}{2}}) \right)$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2 + 1} \sin n \operatorname{arctg} n$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^a}{n^a + \cos n}$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{n}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, б) $X = [0, 2\pi]$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 \ln^3(n+1)}$ и исследовать его сумму на дифференцируемость на множестве X.

6. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-x}{x}$ в степенной ряд с центром $a = 1$ и указать радиус сходимости ряда.

Вариант 8.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{11 \cdots (5n+6)}{11 \cdots (6n+5)}}$

2. Исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n^3}{n \ln^2 n}$ на абсолютную и условную сходимость

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} n^{\frac{(-1)^n}{n^a}}$.

4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{\sqrt{n}+x} \sin^2 \frac{x}{n}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = [1, 2]$ б) $X = [2, +\infty)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \cos \frac{1}{n}$ и исследовать его сумму на дифференцируемость на множестве X.

6. Найти множество сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4^n + (-3)^n}{n+1} \cos \frac{1}{n} \right) (x+1)^n$.

Вариант 9.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdots (3n+4)}{n!} \arcsin \frac{1}{2^n}$.

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos^2 n}{n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное

произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos^2 nx}{n^x}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, б) $X = (0, \pi]$.

5. Исследовать на дифференцируемость на интервале $(0, 2\pi)$ сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx \operatorname{arctg} n}{n\sqrt{n}}$.

6. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{4 + (-1)^n 5}{4 + 3(-1)^{n+1}}\right)^n (x+3)^{2n+1}$.

Вариант 10.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n \operatorname{arctg} \dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}\right)$.

4*. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + x\sqrt{n}) \left(1 - \cos \dfrac{1}{nx}\right)$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = (0, 1)$, б) $X = (1, +\infty)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \operatorname{tg} \dfrac{1}{n}$ и исследовать его сумму на дифференцируемость на множестве X.

6. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3 + 4(-1)^n)^n}{n \ln(n+1)} (x-1)^{n^3}$.

Вариант 11.

1*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n^2+n})}{\ln(n+1)}$ на абсолютную и условную схо-

димость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n\ln n}\right)$

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nx}{n}$ на множестве X, где а) $X=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, б) $X=(0,\pi)$.

5. Исследовать на непрерывность сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2n+\sin nx}$ на интервале $X=(0,2\pi)$.

6. Разложить функцию $f(x)=\ln(x+\sqrt{4+x^2})$ в степенной ряд с центром в нуле. Найти множество, на котором разложение справедливо.

Вариант 12.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\dfrac{n+1}{n}}\right)$.

2*. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin^2 n}{n^{\frac{5}{6}}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{n^\alpha}{n^\alpha+\sin n}\right)$

4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}\sin nx$ на множестве X, где а) $X=\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, б) $X=[0,\pi]$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\operatorname{ch} n$ и исследовать его сумму на непрерывность во внутренних точках множества X.

6. Разложить функцию $f(x)=x(1-x)^{-3}$ в степенной ряд с центром в точке $a=-1$ и найти множество, на котором разложение справедливо.

Вариант 13.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^{\sqrt{n}}}$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin n}{n \ln^a n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{an^2 + bn + 1}\right)$, $a, b \geqslant 0$.

4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x \cos nx}{ne^{nx}}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, б) $X = (0, \pi]$.

5. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \cos nx}{\ln(n+1)}$ допускает почленное интегрирование на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ и найти полученный при этом числовой ряд.

6*. Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(x-3)^{3n+1}$.

Вариант 14.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3 + (-1)^n}{2^n}\right) n \ln n$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \dfrac{2}{n}\right)^a$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 + \dfrac{x^n}{n^2 \ln n}\right)$.

4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n+1)x}{n^{\frac{3}{4}}}$ на равномерную сходимость на множестве X где а) $X = \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, б) $X = (0, \pi)$.

5*. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-n^2 x^3}}{n}$ и исследовать его сумму на дифференцируемость на множестве X.

6. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(4+(-1)^n)^n}{n}(x-1)^{2n+1}$.

Вариант 15.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} \ln(1+4^{-n})$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos^3 n}{n \ln n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n^2}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = [-10, 10]$, б) $X = (-\infty, \infty)$.

5. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln^2(n+1)}$ допускает почленное интегрирование на отрезке $[0, 1]$ и найти полученный при этом числовой ряд.

6. Разложить функцию $f(x) = \ln(x^2 + 5x + 6)$ в ряд по степеням $x+1$ и указать, где разложение справедливо.

Вариант 16.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{n+4}{4n+1}}\right)^n$.

2*. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n} + \sin n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^p \ln(n+1)}\right)$.

4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{x}{n+x}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = [0, 1]$, б) $X = [0, +\infty)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-x)^2}$ и исследовать сумму ряда на непрерывность во внутренних точках X.

6. Найти множество X сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+4(-1)^n}{3-2(-1)^n} \sin \frac{1}{n} \right) (x+3)^{4n}.$$

Вариант 17.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{4 \cdot 7 \cdots (3n+4)}{3 \cdot 7 \cdots (4n+3)} \right)^a n^{-p}$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin(\ln^{-1}(2n)) \cos \frac{1}{n}}{\sqrt{n^2-n+1}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \left(\dfrac{|\cos n|}{n} \right) \right)$.

4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n} \operatorname{arctg} \left(n^2 + x^2 \right)$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2} \right]$, б) $X = (0, 2\pi)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ и исследовать его на дифференцируемость во внутренних точках X.

6. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{3-8x}{6x^2-5x+1}$ в степенной ряд по степеням x. Указать, где разложение справедливо.

Вариант 18.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} \right)$.

2*. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{arctg} n^2}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(\ln n)^{\frac{(-1)^n}{n}}$.

4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{n^2x^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X=(0,1)$, б) $X=(1,+\infty)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ и исследовать сумму ряда на дифференцируемость во внутренних точках X.

6. Разложить функцию $f(x)=\dfrac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}$ в ряд по степеням x . Указать, где разложение справедливо.

Вариант 19.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\ln n}$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\sin n}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=2}^{\infty}n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}\sin\dfrac{x}{n}$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X=\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$, б) $X=(0,2\pi)$.

5. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n\ln n}$ и исследовать сумму ряда на дифференцируемость во внутренних точках X.

6*. Разложить функцию $f(x)=x\ln(x+\sqrt{x^2+2})$ в ряд по степеням x . Указать, где разложение справедливо.

Вариант 20.

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(n!)^3}{5\cdot 19\cdots(2n^3+3)}$.

2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\sqrt{\ln^2 n+1}}$ на абсолютную и условную сходимость.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1+x^n)$.

4. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right)$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X=[-100,100]$, б) $X=(-\infty,+\infty)$.

5*. Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-x^2}$ и исследовать сумму ряда на непрерывность во внутренних точках X.

6. Разложить функцию $f(x)=\ln\frac{2x+1}{x+1}$ в степенной ряд с центром $a=1$. Указать, где разложение справедливо.

Глава 3

Разбор части задач второй главы с указанием типичных ошибок и недочетов.

Задача 1 (1, вар. 11). Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}.$$

Решение. Положим $a_n = \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}$. Последовательно получаем

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right),$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{6n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}.$$

Так как $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ при $x \to 0$, то

$$n^2\ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = n^2\left(-\frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = -\frac{1}{6} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Поэтому $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = e^{-\frac{1}{6}} < 1$, тем самым исходный ряд сходится по признаку Коши.

Ответ. Ряд сходится.

Замечание. Иногда из эквивалентности $n \sin \frac{1}{n} \sim 1$ ошибочно выводят $a_n \sim 1^{n^3} = 1$. На самом деле $a_n \sim e^{-\frac{n}{6}}$.

Задача 2 (1, вар. 4). Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n! n^{3/2} 2^n}{7 \cdot 9 \cdots (2n+5)}.$$

Решение. Полагая $a_n = \dfrac{n! n^{3/2} 2^n}{7 \cdot 9 \cdots (2n+5)}$, имеем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^{\frac{3}{2}}(2n+7)}{(n+1)^{\frac{3}{2}} 2(n+1)} = \left(1 + \frac{7}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{5}{2}}.$$

Поскольку $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{5}{2}} = 1 - \dfrac{5}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, имеем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{7}{2n}\right)\left(1 - \frac{5}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

В обозначениях признака Гаусса $\lambda = \mu = 1$, следовательно, исходный ряд расходится.

Ответ. Ряд расходится.

Замечание (Общее замечание к задачам на исследование абсолютной и условной сходимости). Иногда студенты, проверив, что ряд сходится, ошибочно заявляют, что он сходится условно. Это не так! Ряд сходится условно, если он сходится, но не абсолютно.

Задача 3 (2, вар. 12). Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin^2 n}{n^{\frac{5}{6}}}$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение. Пусть $a_n = \dfrac{(-1)^n \sin^2 n}{n^{\frac{5}{6}}}$.

1. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Так как $\sin^2 n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos 2n}{2}$, то $a_n = \frac{1}{2}(b_n + c_n)$, где $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{5}{6}}}$, $c_n = \dfrac{(-1)^{n-1} \cos 2n}{n^{\frac{5}{6}}}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по признаку Лейбница. Для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ представим $c_n = u_n v_n$, где $u_n = (-1)^{n-1}\cos 2n$, $v_n = n^{-\frac{5}{6}}$. Поскольку $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos 2k\right| \leqslant \dfrac{1}{\cos 1}$, $n \in \mathbb{N}$ (см. пример 6 главы 1), частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ограничены в совокупности. Также последовательность $\{v_n\}$ монотонно сходится к нулю, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, так как для него выполнена первая пара условий признака Дирихле-Абеля. Из свойства линейности получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Покажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не является абсолютно сходящимся. Представим $|a_n|$ в виде $|a_n| = \frac{1}{2}(d_n - e_n)$, где $d_n = n^{-\frac{5}{6}}$, $e_n = \dfrac{\cos 2n}{n^{\frac{5}{6}}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ расходится (см. пример 3 главы 1), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ сходится по признаку Дирихле-Абеля (см. пример 7 главы 1). Так как разность расходящегося и сходящегося рядов расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

3. Итак, исходный ряд сходится, но не абсолютно, значит он сходится условно.

Ответ. Ряд сходится условно.

Замечание. Так как ряд в условии задачи 3 имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n p_n$, где $\{p_n\}$ — положительная, сходящаяся к нулю последовательность, то нередко делается вывод, что данный ряд сходится по признаку Лейбница. Но признак Лейбница здесь неприменим, так как последовательность p_n не является монотонной.

Задача 4 (2, вар. 16). Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n} + \sin n}$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение. Пусть $a_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n} + \sin n}$. Применив разложение

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + O(x^2), \qquad x \to 0+0,$$

при $x = \dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ имеем $\left(1 + \dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-1} = 1 - \dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} + O\left(\dfrac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$;

$$a_n = \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\left(1 + \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-1} = \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\left(1 - \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} + O\left(\frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}} - \frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}}\left(1 + O\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)\right).$$

Положим $b_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$, $c_n = b_n - a_n = \dfrac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}}\left(1 + O\left(\dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по признаку Дирихле-Абеля (см. пример 7 главы 1). Так как $c_n \geqslant 0$ для достаточно больших n и $c_n \sim \dfrac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}}$ по признаку сравнения для знакопостоянных рядов.

Представим, как в предыдущей задаче,

$$\frac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{n}} - \frac{\cos 2n}{2\sqrt[3]{n}}.$$

Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[3]{n}}$ расходится (см. пример 3 главы 1). Ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2\sqrt[3]{n}}$ сходится по признаку Дирихле-Абеля (см. пример 7 главы 1). Отсюда ряд $\dfrac{\sin^2 n}{\sqrt[3]{n^2}}$ расходится как разность расходящегося и сходящегося рядов, следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ тоже расходится. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - c_n)$ расходится.

Ответ. Ряд расходится.

Замечание. При решении подобных задач часто из верного заключения $a_n \sim \dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ и сходимости ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$ часто делается неверный (для рядов с членами произвольного знака) вывод о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Мы же при решении предыдущей задачи использовали рассуждение об эквивалентных рядах для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ с **неотрицательными** начиная с некоторого номера n членами.

Задача 5 (2, вар. 18). Исследовать ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \operatorname{arctg} n^2}{\sqrt{n + \frac{1}{n}}}$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение. Пусть $a_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n + \frac{1}{n}}}$, $b_n = \operatorname{arctg} n^2$. Тогда исходный ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

1. Исследуем исходный ряд на сходимость.

а) Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Во-первых, $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right| \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$ (см. пример 6 главы 1). Во-вторых, последовательность $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n+n^{-1}}}\right\}$ монотонно убывает к нулю. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, так как для него выполнена первая пара условий признака Дирихле-Абеля.

б) Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а последовательность $\{b_n\}$ монотонно возрастает к $\dfrac{\pi}{2}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, так как для него выполнена вторая пара условий признака Дирихле-Абеля.

2. Исследуем исходный ряд на абсолютную сходимость. Поскольку $|a_n b_n| = \dfrac{\operatorname{arctg} n^2}{\sqrt{n+n^{-1}}} \sim \dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$ расходится (см. пример 3 главы 1), то исходный ряд не сходится абсолютно.

Ответ. Ряд сходится условно.

Замечание. В предыдущем примере мы показали сходимость исходного ряда в два шага: а), б). Можно было бы доказать его сходимость за один шаг, используя только первую пару условий признака Дирихле-Абеля, а именно, представив общий член ряда в виде $u_n v_n$, где $u_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $v_n = \dfrac{\operatorname{arctg} n^2}{\sqrt{n+n^{-1}}}$. Но тогда потребовалась бы дополнительная проверка монотонности последовательности $\{v_n\}$ начиная с некоторого номера n_0.

Задача 6 (3, вар. 3). Исследовать на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a\cos n}{\sqrt{n}}\right)e^{\frac{\cos n}{\sqrt{n}}}, \quad |a| \leqslant 1.$$

Решение. Пусть $p_n = \left(1-\dfrac{a\cos n}{\sqrt{n}}\right)e^{\frac{\cos n}{\sqrt{n}}}$. Так как

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad x \to 0,$$

то при $x = -\dfrac{a\cos n}{\sqrt{n}}$ имеем

$$\ln p_n = \ln\left(1-\frac{a\cos n}{\sqrt{n}}\right) + \frac{\cos n}{\sqrt{n}} = (1-a)\frac{\cos n}{\sqrt{n}} - \frac{a^2\cos^2 n}{2n} + O\left(\frac{a^3\cos^3 n}{n\sqrt{n}}\right).$$

Если $a = 0$, то $\ln p_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ сходится условно (см. пример 7 главы 1), следовательно, исходное произведение сходится условно.

Если $a \neq 0$, то беря

$$b_n = (1-a)\frac{\cos n}{\sqrt{n}}, \quad c_n = b_n - \ln p_n = \frac{a^2 \cos^2 n}{2n}\left(1 + O\left(\frac{a \cos n}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Поскольку $c_n \geqslant 0$ начиная с некоторого n и $c_n \sim \dfrac{a^2 \cos^2 n}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 n}{n}$ расходится, то расходится и ряд[1] $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n)$ расходится, поэтому исходное произведение также расходится.

Ответ. При $a = 0$ произведение сходится условно, при $0 < |a| \leqslant 1$ произведение расходится.

Замечание. В решении предыдущей задачи, как и при решении задачи 4, недостаточно исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-a)\cos n}{\sqrt{n}}$, эквивалентный ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln p_n$, так как они не являются знакопостоянными.

Задача 7 (4, вар. 2). Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin \pi n x}{n^2 + x^2}$ на множестве X, где а) $X = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, б) $X = (0, 2)$.

Решение. Проверим сначала, что исходный ряд сходится в каждой точке $x \in (0, 2)$. Представим общий член ряда в виде

$$a_n(x) = \frac{n \sin \pi n x}{n^2 + x^2} = u_n(x) v_n(x), \quad u_n(x) = \frac{\sin \pi n x}{n}, \quad v_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + x^2}.$$

---

[1] Расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 n}{n}$ следует из того, что $\dfrac{\cos^2 n}{n} = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{\cos 2n}{2n}$, гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n}{n}$ сходится

Частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x$ ограничены в совокупности:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin \pi k x \right| \leqslant \frac{1}{\sin(\pi x/2)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонно сходится к нулю, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, так как удовлетворяет первой паре условий признака Дирихле-Абеля сходимости числового ряда. Поскольку последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонно стремится к единице, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится, так как для него выполнена вторая пара условий признака Дирихле-Абеля сходимости числового ряда.

а) Покажем, что исходный ряд сходится равномерно на $X = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Рассмотрим сначала ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Рассуждая как в примере 8 главы 1, получаем, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin(\pi k x) \right| \leqslant M = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}, \tag{3.2}$$

Также последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ не зависит от x и монотонно сходится к нулю. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на X, так как он удовлетворяет первой паре условий признака Дирихле-Абеля равномерной сходимости. Так как $v_n(x) = \dfrac{1}{1 + (x/n)^2}$, то $\{v_n(x)\}$ монотонна в каждой точке $x \in X$ и равномерно ограничена ($|v_n(x)| \leqslant 1$). Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на X, так как для него выполнена вторая пара условий признака Дирихле-Абеля равномерной сходимости.

б) Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится неравномерно на $X = (0, 2)$. Будем рассуждать как в примере 8 главы 1. Действительно, беря $\epsilon = \dfrac{1}{12}$, при любом $N \in \mathbb{N}$ для $n = p = N$, $x_n = \dfrac{1}{6n}$ при $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$ справедливы оценки $\sin \pi k x_n > \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{k}{k^2 + x_n^2} > \dfrac{1}{k+1} \geqslant \dfrac{1}{3n}$, поэтому $a_k(x_n) \geqslant \dfrac{1}{6k}$.

Следовательно,

$$a_{n+1}(x_n) + \dots + a_{2n}(x_n) \geqslant \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \geqslant \frac{1}{12} = \epsilon,$$

тем самым ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ не сходится равномерно в силу отрицания критерия Коши.

Ответ. а) сходится равномерно, б) сходится неравномерно.

Замечание. Сравнивая (3.2) и (3.1) мы видим, что оценка (3.2) — **равномерная**, поскольку величина $M = \sqrt{2}$ не зависит от точки $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Оценка (3.1) равномерной не является, поскольку величина $\dfrac{1}{\sin(\pi x/2)}$ уже зависит от точки $x \in (0, 2)$. Более того, эту оценку нельзя сделать равномерной, поскольку $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{1}{\sin(\pi x/2)} = +\infty$. Из дальнейших рассуждений в пункте б) видно, что исходный ряд действительно сходится неравномерно.

Задача 8 (4, вар. 6). Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}} e^{-n^2 x}$ на множестве X, где а) $X = \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, б) $X = (0, \pi]$.

Решение. Покажем, что исходный ряд сходится в каждой точке $x \in (0, \pi]$. Пусть $a_n(x) = \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}} e^{-n^2 x}$. Так как $\sqrt[n]{|a_n(x)|} \leqslant \sqrt[n]{e^{-n^2 x}} \to 0$ при $n \to \infty$, то по признаку Коши исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится абсолютно.

а) Поскольку для всех точек $x \in X = \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ справедлива оценка

$$|a_n(x)| \leqslant e^{-n^2 x} \leqslant e^{-n^2 \pi/2} = c_n,$$

причем $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim\limits_{n \to \infty} e^{-n\pi/2} = 0$, то числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится по признаку Коши, следовательно, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на множестве X по признаку Вейерштрасса.

б) Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится неравномерно на множестве $X = (0, \pi]$. Применим следствие теоремы о предельном переходе для интервала $(a, b) = (0, \pi)$. Так как все члены $a_n(x) = e^{-n^2 x} \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ непрерывны на отрезке $[0, \pi]$, а в точке $x = 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится неравномерно на интервале $(0, \pi)$, а значит и на содержащем его множестве X.

Ответ. а) сходится равномерно, б) сходится неравномерно.

Замечание. Мы показали, что в задаче 8б) отсутствие равномерной сходимости легко вытекает из следствия теоремы о предельном переходе. Это следствие часто применяется на практике: при исследовании равномерной сходимости ряда на интервале полезно посмотреть поведение ряда в граничных точках интервала.

Задача 9 (4, вар. 10). Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + x\sqrt{n}) \left(1 - \cos \dfrac{1}{nx}\right)$ на равномерную сходимость на множестве X, где а) $X = (0, 1)$, б) $X = (1, +\infty)$.

Решение. Пусть $a_n(x) = (1 + x\sqrt{n}) \left(1 - \cos \dfrac{1}{nx}\right)$. Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится при $x > 0$. Последовательно получаем:

$$0 \leqslant 1 - \cos \frac{1}{nx} = 2 \sin^2 \frac{1}{2nx} \leqslant \frac{1}{2n^2 x^2},$$

$$0 \leqslant a_n(x) \leqslant \left(1 + x\sqrt{n}\right) \frac{1}{2n^2 x^2} = \frac{1}{2n^2 x^2} + \frac{1}{2n^{3/2} x}. \tag{3.3}$$

Поскольку ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2 x^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^{3/2} x}$ сходятся (см. пример 3 главы 1), то исходный ряд сходится по прихнаку сравнения.

Покажем, что в случае а) ряд сходится неравномерно. Действительно, поскольку $a_n\left(\frac{1}{n}\right) = (1+n^{-1/2})2\sin^2\frac{1}{2} > 2\sin^2\frac{1}{2}$, нарушается необходимое условие равномерной сходимости: общий член исходного ряда не сходится равномерно к нулю на $(0,1)$.

Покажем, что в случае б) ряд сходится равномерно. Так как при $x > 1$ в силу (3.3) справедлива оценка

$$0 \leqslant a_n(x) \leqslant \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^{3/2}} = c_n$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса на интервале $(1,\infty)$.

Ответ. а) сходится неравномерно, б) сходится равномерно.

Замечание. На примере предыдущей задачи мы видим, что при исследовании ряда на равномерную сходимость бывает полезно проверить, выполнено ли необходимое условие равномерной сходимости. В предыдущей задаче отсутствие равномерной сходимости в случае а) действительно следовало из неравномерного на $(0,1)$ стремления к нулю общего члена. Однако равномерное стремление к нулю общего члена — **только необходимое, но вообще говоря не достаточное** условие равномерной сходимости ряда. Если оно выполнено, то ряд не обязательно сходится (тем более равномерно) на данном множестве. Например, в случае б) задачи 8 справедлива оценка $|a_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, следовательно, $a_n(x)$ равномерно сходится к нулю на множестве $X = (0,\pi]$ (см. достаточное условие равномерной сходимости). Однако ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится неравномерно на X.

Задача 10 (5, вар. 20). Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 - x^2}$ и исследовать сумму ряда на непрерывность на множестве X.

Решение. 1. Покажем, что ряд сходится $\iff$

$$x \in X = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Действительно, ряд не определен в точках $\{\pm 1, \pm 2, \dots\}$. Если же $x \in X$, то все члены ряда $a_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2 - x^2}$ определены в точке x и при $n \geqslant 2|x|$ справедливо:

$$n^2 - x^2 \geqslant \frac{3}{4}n^2, \quad 0 < a_n(x) < \frac{\pi/2}{3n^2/4} = \frac{2\pi}{3n^2},$$

следовательно, исходный ряд сходится.

2. Покажем, что для любого положительного числа M исходный ряд сходится равномерно на любом множестве $X_M = X \cap (-M, M)$. Рассуждая как выше, получаем, что при $x \in X_M$, $n \geqslant 2M$ справедлива оценка $0 < a_n(x) < \dfrac{2\pi}{3n^2}$, следовательно, исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса (мы учли, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на равномерную сходимость).

3. Возьмем любую точку $x \in X$ и число $M > |x|$. Тогда $x \in X_M$. Поскольку все члены исходного ряда непрерывны на X_M и ряд сходится на этом множестве равномерно, то, по теореме о непрерывности суммы функционального ряда, сумма исходного ряда непрерывна на X_M, а значит и в точке x.

Ответ. Ряд сходится на множестве $X = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$. Сумма ряда непрерывна на X.

Замечание. На примере предыдущей задачи видно, что сумма ряда может быть непрерывной и в том случае, если не все условия теоремы о непрерывности суммы ряда выполнены на всем множестве сходимости. Действительно, на множестве $X = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$ ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 - x^2}$ сходится неравномерно, ибо $\displaystyle\sup_{x \in X} \left| \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2 - x^2} \right| = +\infty$, следовательно, общий член ряда не сходится равномерно к нулю, тем самым нарушено необходимое условие равномерной сходимости ряда. Тем не менее, сумма ряда непрерывна на множестве X. Для доказательства используется локальный вариант теоремы о непрерывности: для каждой точки $x \in X$ строится такая ее окрестность (в данном случае это $X_M = X \cap (-M, M)$ для достаточно большого M), в которой ряд сходится равномерно. По теореме о непрерывности сумма исходного ряда непрерывна в этой окрестности, а значит и в точке x.

Задача 11 (5, вар. 14). Найти множество X сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-n^2x^3}}{n}$ и исследовать его сумму на дифференцируемость на множестве X.

Решение. 1. Покажем, что множество сходимости ряда — интервал $(0,+\infty)$. Пусть $a_n(x)=\dfrac{e^{-n^2x^3}}{n}$. Если $x \leqslant 0$, то $a_n(x) \geqslant \dfrac{1}{n}$, значит исходный ряд расходится по признаку сравнения. Если же $x>0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-nx^3}}{\sqrt[n]{n}} = 0,$$

следовательно, исходный ряд сходится по признаку Коши. Таким образом, ряд сходится $\iff$ $x>0$.

2. Пусть $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$. Покажем, что $S(x)$ дифференцируема на интервале $(0,+\infty)$. В силу следствия теоремы о почленной дифференцируемости, нам достаточно показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ сходится равномерно на любом отрезке $[\alpha,\beta]$, где $0<\alpha<\beta<+\infty$. Так как при $x\in[\alpha,\beta]$ справедливы оценки

$$|a_n'(x)| = 3nx^2e^{-n^2x^3} \leqslant 3n\beta^2e^{-n^2\alpha^3} = c_n, \quad n\in\mathbb{N}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n\beta^2}e^{-n\alpha^3} = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится по признаку Коши, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ сходится равномерно на отрезке $[\alpha,\beta]$ по признаку Вейерштрасса.

Ответ. Ряд сходится на множестве $X=(0,+\infty)$, сумма ряда дифференцируема на множестве X.

Задача 12 (6, вар. 13). Найти множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(x-3)^{3n+1}$.

Решение. Исходный ряд сходится $\iff$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-3)^{3n}. \tag{3.4}$$

Сделаем замену $y = (x-3)^3$ и исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} y^n. \qquad (3.5)$$

Пусть $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$. Тогда радиус сходимости ряда (3.5) равен

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2(2n+2)!}{((n+1)!)^2(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{n+1} = 4,$$

следовательно, ряд (3.5) сходится абсолютно при $|y| < 4$ и расходится при $|y| > 4$. При $|y| = 4$ имеем

$$\left| \frac{a_{n+1}y^{n+1}}{a_n y^n} \right| = \frac{2n+2}{2n+1} > 1,$$

таким образом, ряд (3.5) расходится, так как общий член не стремится к нулю. Мы получили, что ряд (3.5) сходится $\iff$ $|y| < 4$. Отсюда ряд (3.4) (а следовательно, и исходный ряд) сходится $\iff$ $|x-3|^3 < 4$, то есть $x \in (3 - \sqrt[3]{4}, 3 + \sqrt[3]{4})$.

Ответ. Множество сходимости ряда — интервал $x \in (3 - \sqrt[3]{4}, 3 + \sqrt[3]{4})$.

Задача 13 (6, вар. 19). Разложить в степенной ряд по степеням x функцию $f(x) = x\ln(x + \sqrt{x^2+2})$. Указать, где разложение справедливо.

Решение. Пусть $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$. Тогда

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Воспользуемся разложением

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} y^n, \qquad (3.6)$$

и учтем, что радиус сходимости ряда в правой части (3.6) равен 1. Беря $y = \dfrac{x^2}{2}$ в разложении (3.6), имеем

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+1/2}(2n)!!} x^{2n}, \qquad (3.7)$$

при этом радиус сходимости ряда в правой части (3.7) равен $\sqrt{2}$. Поскольку при почленном интегрировании радиус сходимости не меняется,

$$\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\ln\sqrt{2}=\int_0^x g'(t)dt=\frac{x}{\sqrt{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+1/2}(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1},$$

$$x\ln(x+\sqrt{x^2+2})=x\ln\sqrt{2}+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+1/2}(2n)!!(2n+1)}x^{2n+2}, \quad (3.8)$$

при этом разложение (3.8) справедливо при $|x|<\sqrt{2}$, а при $|x|>\sqrt{2}$ ряд в правой части расходится. Рассмотрим поведение этого ряда при $|x|=\sqrt{2}$. Он будет сходиться одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+1/2}(2n)!!(2n+1)}2^{n+1}=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n,$$

где $b_n=\sqrt{2}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=\dfrac{3}{2}>1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по признаку Раабе, следовательно, ряд (3.8) сходится абсолютно при $|x|=\sqrt{2}$. Из второй теоремы Абеля и непрерывности функции $f(x)$ при $x=\pm\sqrt{2}$ получаем, что разложение (3.8) справедливо при $|x|\leqslant\sqrt{2}$.

Ответ. $f(x)=x\ln\sqrt{2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+1/2}(2n)!!(2n+1)}x^{2n+2}$, разложение справедливо при $|x|\leqslant\sqrt{2}$.

Глава 4

Ответы

Вариант 1. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится абсолютно. 3. Произведение сходится абсолютно. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится равномерно. 5. Сумма ряда дифференцируема на $(0, 2\pi)$. 6.

$$f(x) = 2\ln 2 + x(\ln 2 + 1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}(n-1)n} x^n, -2 \leqslant x \leqslant 2.$$

Вариант 2. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение расходится. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = \mathbb{R}$, сумма ряда непрерывна на X. 6.

$$(x+1)\sin^3 x = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3 - 3^{2n-1}}{4(2n-1)!} x^{2n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3 - 3^{2n-1}}{4(2n-1)!} x^{2n}, x \in \mathbb{R}$$

Вариант 3. 1. Ряд сходится $\iff$ $a \neq 0$. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится условно при $a = 0$ и расходится при $a \neq 0$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = (-1, 1)$, сумма ряда непрерывна на X. 6.

$$\frac{2x+3}{\sqrt{3x+4}} = 1 + \frac{1}{2}(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} 3^{n-1}(3-2n)(x+1)^n,$$

радиус сходимости ряда равен $\frac{1}{3}$.

Вариант 4. 1. Ряд расходится. 2. Ряд расходится. 3. Произведение сходится абсолютно. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. Сумма ряда непрерывна на $(0, 2\pi)$. 6.

$$\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6n+1}x^{12n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6n+5}x^{12n+10},$$

радиус сходимости ряда равен 1.

Вариант 5. 1. Ряд сходится $\iff$ $\alpha<-2$. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится абсолютно при $\alpha>1$, условно при $\alpha\in(\frac{1}{2},1]$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X=[0,+\infty)$, сумма ряда непрерывна на X. 6.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(16n+12)x^{4n+1},\quad x\in(-1,1).$$

Вариант 6. 1. Ряд сходится. 2 Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится абсолютно при $p>1$, условно при $p\in(\frac{1}{2},1]$. 4а) Ряд сходится равномерно. 4б) Ряд сходится неравномерно. 5. $X=(\frac{1}{4},4)$, сумма ряда непрерывна на X. 6.

$$\arccos\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)3^{2n+1}}x^{2n+1},\quad x\in[-3,3].$$

Вариант 7. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится абсолютно при $\alpha>1$, условно при $\alpha\in(\frac{1}{2},1]$. 4а) Ряд сходится равномерно. 4б) Ряд сходится равномерно. 5. $X=\mathbb{R}$, сумма ряда дифференцируема на X. 6.

$$\operatorname{arctg}\frac{2-x}{x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}(x-1)^{2n+1},$$

радиус сходимости ряда равен 1.

Вариант 8. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится абсолютно. 3. Произведение сходится абсолютно при $\alpha>1$, условно при $\alpha\in(0,1]$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X=(1,+\infty)$, сумма ряда дифференцируема на X. 6. $[-\frac{5}{4},-\frac{3}{4})$.

Вариант 9. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится условно. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. Сумма ряда дифференцируема на $(0,2\pi)$. 6. $\left(-\frac{10}{3},-\frac{8}{3}\right)$.

Вариант 10. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится условно. 4а). Ряд сходится неравномерно. 4б). Ряд сходится равномерно. 5. $X=(0,+\infty)$, сумма ряда дифференцируема на X. 6. $(0,2)$.

Вариант 11. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится условно. 4а) Ряд сходится равномерно. 4б) Ряд сходится неравномерно. 5. Сумма ряда непрерывна на $(0,2\pi)$. 6.

$$\ln(x+\sqrt{4+x^2})=\ln 2+\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{2n+1}(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1},\quad x\in[-2,2].$$

Вариант 12. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится абсолютно при $\alpha>1$, условно при $\alpha\in(\frac{1}{2},1]$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится равномерно. 5. $X=(1,+\infty)$, сумма ряда непрерывна на X. 6.

$$\frac{x}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n-2)}{2^{n+4}}(x+1)^n,\quad x\in(-3,1).$$

Вариант 13. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится абсолютно при $a>1$, условно при $a\leqslant 1$. 3 При $a>0$ произведение сходится абсолютно для любого b, при $a=0$ произведение сходится условно при $b>0$ и расходится при $b=0$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится равномерно. 5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k-1}}{(2k-1)\ln(2k)}$. 6. $(3-\sqrt[3]{4},3+\sqrt[3]{4})$.

Вариант 14. 1. Ряд сходится. 2. Ряд сходится абсолютно при $a>\frac{1}{2}$, условно при $a\in(0,\frac{1}{2}]$. 3. Произведение сходится абсолютно при $|x|\leqslant 1$, расходится при $|x|>1$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = (0, +\infty)$, сумма ряда дифференцируема на X. 6. $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Вариант 15. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится условно. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 - e^{-n}(1+n)}{n^2 \ln^2(n+1)}$. 6.

$$\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)(x+1)^n, \quad x \in (-2, 0].$$

Вариант 16. 1. Ряд сходится. 2. Ряд расходится. 3. Произведение сходится абсолютно при $p > 1$, условно при $p \in [\frac{1}{2}, 1]$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, сумма ряда непрерывна на X. 6. $(-4, -2)$.

Вариант 17. 1. При $a > 0$ ряд сходится для любого p, при $a < 0$ ряд расходится для любого p, при $a = 0$ ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение расходится . 4а). Ряд сходится равномерно. 4б) Ряд сходится неравномерно. 5. $X = \mathbb{R}$, сумма ряда дифференцируема на X. 6.

$$\frac{3 - 8x}{6x^2 - 5x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} + 3^n\right) x^n, \quad x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Вариант 18. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится условно. 4а). Ряд сходится неравномерно. 4б). Ряд сходится равномерно. 5. $X = (0, +\infty)$, сумма ряда дифференцируема на X. 6.

$$\frac{3x + 8}{(2x-3)(x^2+4)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} x^{2n+1}, \quad x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Вариант 19. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение расходится. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится равномерно. 5. $X = (0, +\infty)$, сумма ряда дифференцируема на X. 6.

$$x \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}) = x \ln \sqrt{2} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^{n+1/2} (2n)!! (2n+1)} x^{2n+2},$$

$x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Вариант 20. 1. Ряд расходится. 2. Ряд сходится условно. 3. Произведение сходится абсолютно при $|x| < 1$, расходится при $|x| \geqslant 1$. 4а). Ряд сходится равномерно. 4б). Ряд сходится неравномерно. 5. $X = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1 \pm 2 \ldots\}$, сумма ряда непрерывна на X. 6.

$$\ln \frac{2x+1}{x+1} = \ln \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,(4^n - 3^n)}{n 6^n}(x-1)^n, \quad -\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{5}{2}.$$

Литература

[1] *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. Продолжение курса, М., Изд-во МГУ, 1987.

[2] *Теляковский С. А.,* Курс лекций по математическому анализу. Семестр III -М.: МИАН 2013.

Учебное издание

Домрина Александра Владимировна

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Методическое пособие

Электронное издание сетевого распространения
Художественное оформление *Ю. Н. Симоненко*
Макет утвержден 25.08.2023. Изд. № 12503

Издательство Московского университета

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com
http: // msupress.com. Отдел реализации:
тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com

Пособие предназначено для студентов, изучающих числовые и функциональные ряды, а также для преподавателей, ведущих практические занятия по этому разделу математического анализа. При его составлении использовался многолетний опыт преподавания курса математического анализа на факультете ВМК МГУ.

МГУ
Издательство Московского университета
ISBN 978-5-19-011912-1
9 785190 119121