



ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

А. В. Сету́ха

**МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКЕ**

Учебное пособие

Издательство Московского университета



Библиотека
факультета ВМК
МГУ

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

А. В. Сетуха

**МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКЕ**

Учебное пособие

УДК 517.958(075.8)

ББК 22.1611.12я73

С33

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова*

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Е. Е. Тьртышников — д-р. физ.-мат. наук,
профессор кафедры вычислительных технологий и моделирования
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова, академик РАН

А. Б. Самохин — д-р. физ.-мат. наук,
профессор кафедры прикладной математики
Института информационных технологий ФГБОУВО «МИРЭА —
Российский технологический университет»

Сетуха, А.В.

С33 Метод интегральных уравнений в математической физике: учебное пособие. — Москва : Издательство Московского университета, 2023. — 316 с. : ил. — Электронное издание сетевого распространения — (Библиотека факультета ВМК МГУ).

ISBN 978-5-19-011915-2 (e-book)

ISBN 978-5-19-011945-9 (print)

В учебном пособии рассмотрено применение интегральных уравнений в задачах математической физики. Даны сведения, позволяющие сводить задачи для уравнений в частных производных к интегральным уравнениям. Изложены численные методы решения возникающих интегральных уравнений, показано применение интегральных уравнений при решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца, приложение метода интегральных уравнений к численному решению задач аэродинамики и рассеяния волн.

Книга предназначена для студентов, обучающихся по образовательным программам по направлениям 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (бакалавриат), 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» (магистратура), 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» (аспирантура).

УДК 517.958(075.8)

ББК 22.1611.12я73

ISBN 978-5-19-011911-4
(e-book)

ISBN 978-5-19-011945-9
(print)

© А. В. Сетуха, 2023

© Факультет вычислительной математики

и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова, 2023

© Издательство Московского университета, 2023

Предисловие

В учебном пособии излагаются основные сведения, связанные с применением интегральных уравнений в задачах математической физики. Главная цель данной книги – дать теоретическую базу, которая лежит в основе сведения краевых задач математической физики к интегральным уравнениям, анализа свойств интегральных операторов, входящих в эти уравнения, и построения численных схем решения возникших интегральных уравнений.

В книге излагаются основные сведения из математической теории потенциала, которая лежит в основе построения интегральных представлений для скалярных и векторных полей. Значительный упор сделан на рассмотрение поверхностных потенциалов. Подробно разбираются свойства краевых значений этих потенциалов. Эти свойства используются при сведении краевых задач к так называемым граничным интегральным уравнениям, т.е. уравнениям, которые записываются и решаются на границе области, в которой рассматривается исходная краевая задача.

В современных задачах математического моделирования приходится иметь дело с интегралами от функций, имеющих особенность в точке. При этом в последнее время наряду с интегральными уравнениями, содержащими несобственные абсолютно сходящиеся интегралы (интегралы со слабой особенностью), применяются и интегралы с сильной особенностью – так называемые сингулярные и гиперсингулярные интегралы. Понятие об интегралах такого вида дается в курсе. Показано применение в краевых задачах как классических интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, так и интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода и уравнений с сильной особенностью.

При рассмотрении численных методов решения интегральных уравнений упор сделан на универсальные методы: метод кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций и конечно-элементный вариант метода Галеркина. Их универсальность заключается в том, что они применимы для уравнений с кратными интегралами по областям достаточно общей сложной формы, а также с криволинейными и поверхностными интегралами.

Показано применение интегральных уравнений при решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца. При этом рассмотрены как классический случай, когда задача решается в области, ограниченной замкнутой поверхностью (замкнутой кривой в плоском случае), так и задачи на экране (разрезах), когда краевая задача решается в пространственной области вне поверхности с краем – экраном (вне разомкнутой кривой на плоскости – разреза).

Так же проиллюстрировано приложение метода интегральных уравнений к численному решению некоторых задач аэродинамики и рассеяния волн. Нужно заметить, что методы, основанные на интегральных уравнениях, широко используются в этих и других областях математического моделирования физических процессов. В рамках данного курса не ставится цель дать систематическое изложение всех приложений интегральных уравнений, да это и невозможно в рамках одной книги. По каждому из направлений приложения интегральных уравнений есть обширная специальная литература, небольшой обзор этой литературы дается в книге. При этом материал, данный в настоящей книге должен стать базой для успешного освоения этой литературы, и далее для применения и развития метода интегральных уравнений в задачах математического моделирования.

Материал этой книги написан на основе специальных курсов, читаемых автором на факультете Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова: "Интегральные уравнения математической физики" (для бакалавров), "Метод граничных интегральных уравнений" (для магистров), "Теория потенциала" и "Численный метод интегральных уравнений в краевых задачах" (для аспирантов). Так же частично, материал этой книги охватывает лекционный курс "Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения" читаемый для магистров этого же факультета.

Книга ориентирована на студентов старших курсов бакалавриата и магистратуры, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика», а также студентов и аспирантов, обучающихся по направлениям, связанным с математическим моделированием.

Освоение курса дисциплины предполагает знакомство с курсами: «Математический анализ» (включая такие разделы, как «Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных», «Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных», «Теория функций комплексной переменной»), «Алгебра и геометрия» (такие разделы, как «Матрицы» и «Линейная алгебра»), «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики».

При издании этой книги я большой благодарностью вспоминаю: Лифанова Ивана Кузьмича – своего научного руководителя, который привлек меня к тематике интегральных уравнений и их прило-

жений в задачах математического моделирования, Полтавского Льва Николаевича, общение с которым оказало на меня большое влияние в период начала моей работы в этой тематике, особенно с точки зрения понимания аппарата гипресинулярных уравнений, Захарова Евгения Владимировича, который оказал мне большую помощь при освоении приложений интегральных уравнений к задачам электродинамики. Эти уже ушедшие от нас люди оказали большое влияние на формирование моего понимания излагаемого в книге материала.

Так же хочу выразить признательность Тыртышникову Евгению Евгеньевичу, оказавшему огромную поддержку при становлении читаемых мной курсов на факультете ВМК и формировании их направленности.

Введение

Интегральные уравнения являются важным математическим инструментом, позволяющим решать различные задачи математического моделирования и дополняя в этой области аппарат дифференциальных уравнений.

Как правило, интегральные уравнения успешно применяются в случае, когда удается построить интегральное представление для искомого функций (неизвестных скалярных и векторных полей). В частности, решения ряда краевых задач математической физики удается представить в интегральном виде с интегралами по границе области, в которой решается задача. Пусть, например, неизвестной является функция $u(x)$, которая ищется в некоторой области $\Omega \subset R^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$. Типичной является ситуация, когда удается построить интегральное представление для функции $u(x)$ вида

$$u(x) = \int_{\Sigma} K(x, y)\nu(y)dy, \quad (0.1)$$

где Σ – граница области Ω , $K(x, y)$ – некоторая специально подобранная функция, ν – неизвестная плотность интегрального представления. Если рассматривается задача в области Ω в трехмерном пространстве, множество Σ есть поверхность и интеграл понимается как поверхностный первого рода, если Ω – область на плоскости, то множество Σ есть некоторая кривая, интеграл понимается как криволинейный первого рода. При этом интегральное представление строится таким образом, чтобы за счет выбора функции $K(x, y)$ функция $u(x)$ автоматически удовлетворяла исходным уравнениям рассматриваемой краевой задачи в области Ω . Тогда задача сводится к отысканию неизвестной плотности ν , например, из граничного условия. В результате возникает уравнение по границе области Ω . Основное достоинство такого подхода, называемого методом граничных интегральных уравнений, состоит в том, что при этом, по сути, снижается размерность решаемой задачи. Например, в случае трехмерной области Ω решается поверхностное интегральное уравнение. Особенно заметно это преимущество проявляется при решении внешних задач, когда область решения исходной задачи не ограничена и есть условия на бесконечности. Если задача решается численно

в исходной постановке для функции $u(x)$ в области Ω , для выполнения граничного условия на бесконечности приходится строить расчетную сетку в области больших размеров. При применении метода граничных интегральных уравнений интегральное представление для решения обычно строится так, что бы условие на бесконечности выполнялось автоматически, и мы по-прежнему решаем уравнение на границе Σ .

Возможна так же ситуация, когда в интегральном представлении для функции $u(x)$ множество Σ есть некоторая часть области Ω . В этом случае метод интегральных уравнений на основе рассматриваемого интегрального представления по-прежнему может быть эффективен, если размеры множества Σ малы по сравнению с размерами области Ω .

Способы построения интегральных представлений для ряда важных задач математической физики, свойства этих интегральных представлений, необходимые для сведения краевых задач к интегральным уравнениям, а так же методы численного решения возникших уравнений и составляют основное содержание данной книги.

Отметим, также, что при численном решении интегральных уравнений возникает и следующая серьезная проблема. При дискретизации линейных интегральных уравнений возникают системы линейных алгебраических уравнений с заполненными (плотными) матрицами, что мы увидим в главе 4. Это существенное отличие от случая дифференциальных уравнений, дискретизация которых приводит к системам с разреженными матрицами.

Поэтому, на современном этапе применение численных методов, основанных на решении интегральных уравнений, тесно связано с использованием и развитием методов решения систем линейных уравнений. Здесь речь идет как об итерационных методах решения систем линейных уравнений (см. например. [44]), так и о применении в рамках этих методов так называемых быстрых матричных алгоритмов. В таких алгоритмах производится аппроксимация матрицы, требующая вычисления относительно небольшого числа элементов матрицы (либо иного, набора данных, сравнительно небольшого по сравнению с числом элементов матрицы), и позволяющая осуществлять линейные операции над матрицей приближенно в сжатом формате. К таким методам относятся мультипольные методы [58], [53], в которых осуществляется аппроксимация элементов матрицы исходя из конкретного выражения для ее элементов (здесь, хотя и есть некая общая схема построения такого разложения, для каждой конкретной матрицы нужно строить свои формулы для разложения). Другой класс представляют универсальные методы, в которых для построения аппроксимации матрицы конкретный вид элементов не важен: метод Барнса-Хатта [49], метод мозаично-скелетонных аппроксимаций матриц, развитый Е.Е. Тыртышниковым и его учениками [44], [62], [61], метод Н-матриц развиваемый в работах В. Хакбуша [54].

Эти методы в значительной степени ориентированы именно на аппроксимацию интегральных операторов. В данной книге эти методы не рассматриваются, мы только обращаем здесь внимание на их наличие и важность при численном решении систем линейных уравнений, возникающих при дискретизации интегральных уравнений.

В главе 1 книги приводятся основные сведения, связанные с понятием интеграла и интегрального оператора. При этом подробно рассмотрены несобственные абсолютно сходящиеся интегралы различных типов (на отрезке, кратные, криволинейные, поверхностные) от функций, имеющих особенность в одной точке. Именно такой тип интегралов является характерным для интегральных операторов и интегральных уравнений, возникающих в задачах математической физики. К этому классу уравнений относятся классические интегральные уравнения Фредгольма.

Отметим, что в последнее время при решении различных прикладных задач все шире используются интегральные представления неизвестных функций, при которых возникают так называемые сингулярные и гиперсингулярные интегралы. Еще 30-40 лет назад существовала точка зрения, что уравнений с такими интегралами следует избегать. При численном решении различных задач старались уходить к решению уравнений Фредгольма 2-го рода с интегралами от непрерывных функций или с абсолютно сходящимися несобственными интегралами. Для этих уравнений давно существует строгая, хорошо развитая теория, включающая как вопросы разрешимости, так и вопросы обоснования сходимости численных методов. Однако, интегральные представления, приводящие к интегралам с сильной особенностью, часто возникают естественным образом из физических соображений. Кроме того, как будет отмечено в главе 5 (и далее в главах 6-8), граничные интегральные уравнения в форме уравнений Фредгольма 2-го рода не применимы для задач на разрезах и экранах. В этих задачах рассмотрение сингулярных и сильносингулярных интегральных уравнений часто бывает необходимым. С другой стороны, в последнее время теория и численные методы решения таких уравнений активно развиваются, и это нашло отражение в данной книге.

Поэтому в главе 1, так же, вводятся понятия сингулярного интеграла, понимаемого в смысле главного значения, и гиперсингулярного интеграла, понимаемого в смысле конечного значения по Адамару.

В главе 2 рассматриваются основные сведения из математической теории потенциала, под которой понимаются вопросы построения интегральных представлений для функций (скалярных и векторных полей) с помощью интегралов с параметром (например, вида $(0,1)$).

Здесь сначала приводятся формулировки основных интегральных формул векторного анализа: формулы Остроградского-Гаусса, Стокса, Грина (для циркуляции векторного поля), выводятся формулы Грина для дифференциальных операторов 2-го порядка. Далее

вводится понятие потенциалов точечного заряда для уравнений Лапласа и Гельмгольца. С применением формул Грина строится интегральное представление скалярных векторных полей через сумму объемного потенциала и поверхностных потенциалов простого и двойного слоя. Так же в этой главе рассматривается задача о решении неоднородного уравнения Пуассона в неограниченном пространстве – решение такой задачи дается в виде объемного потенциала. Здесь же рассмотрены задачи о восстановлении векторного поля по известным ротору и дивергенции в неограниченном пространстве и ограниченной области.

В главе 3 рассматриваются свойства краевых значений на граничной поверхности потенциалов простого и двойного слоев для уравнений Лапласа и Гельмгольца, а также их градиентов. Эти вопросы являются основой для сведения краевых задач для этих уравнений к граничным интегральным уравнениям. Дается строгий вывод всех основных формул для краевых значений рассматриваемых потенциалов и их градиентов.

Здесь следует отметить, что в классической учебной литературе традиционно рассматриваются краевые значения потенциалов простого и двойного слоя и нормальная производная потенциала простого слоя, причем, как правило, для случая размещения потенциала на гладкой замкнутой поверхности (кривой в плоском случае). Например, эти вопросы подробно изложены в книгах [43], [7]. В данной книге здесь воспроизведены классические рассуждения из этих учебников.

Более сложным вопросом является поведение краевых значений градиентов поверхностных потенциалов. В книге отдельно рассмотрены плоский и пространственный случаи.

В плоском случае анализ градиентов потенциалов основан на аналогии с интегралом Коши на комплексной плоскости и применении теории функций комплексной переменной. В книге доказаны формулы Сохоцкого для краевых значений интеграла Коши. Далее вывод формул для краевых значений градиентов потенциалов простого и двойного слоя в случае уравнения Лапласа осуществлен на основе связи этих потенциалов с интегралом Коши. Отметим, что подробное изложение теории краевых значений интеграла Коши можно найти в книгах [30], [11].

В пространственном случае за основу анализа краевых значений градиентов потенциалов взято изложение из книги [23]. Однако, есть некоторые важные отличия и дополнения. В книге [23] основной упор сделан на рассмотрение потенциалов для уравнения Гельмгольца в приложении к краевым задачам в области с гладкой замкнутой границей. Поэтому, рассматриваются только потенциалы на замкнутой поверхности. В настоящей книге рассмотрен общий случай кусочно-гладкой поверхности, которая может быть как замкнутой, так и разомкнутой с краем. В частности здесь получено выражение

для градиента потенциала двойного слоя с постоянной плотностью в виде векторного поля, индуцируемого вихревой нитью, размещенной на краю поверхности. Это выражение далее используется при построении некоторых численных методов (см. метод вихревых рамок, разделы 5.5, 6.5 и 7.4).

Известные формулы для краевых значений градиента потенциала двойного слоя содержат выражение этих значений через производную плотности по длине дуги в плоском случае, и через поверхностный градиент этой плотности в пространственном случае. Достаточно специфическим материалом, содержащимся в настоящей книге, является вывод формул для краевых значений градиента потенциала двойного слоя (как в плоском, так и в трехмерном случае) в виде выражения непосредственно через плотность этого потенциала с интегралом, понимаемым в смысле конечного значения по Адамару. В плоском случае такое представление рассматривалось Лифановым И.К. [26]. В пространственном случае такая формула, по существу, была получена в книге Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. [5]. Однако, в последней книге формула получена внутри достаточно длинного и громоздкого доказательства другого утверждения (см. §4.1 из [5]). В настоящей книге приведено другое доказательство этой формулы, надейсь более простое в понимании. Эти формулы важны, в частности, для сведения краевых задач Неймана на разрезе или экране к гиперсингулярным граничным интегральным уравнениям (см. разделы 5.4, 5.5, 6.5 и 7.4.).

В главе 4 дается понятие об уравнениях Фредгольма и на конструктивном уровне формулируются некоторые численные методы решения интегральных уравнений. Сначала здесь приводятся уравнения Фредгольма 1-го и 2-го рода и формулируются теоремы Фредгольма, которые дают условия разрешимости уравнений Фредгольма 2-го рода. Далее излагаются метод кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций и конечно-элементный вариант метода Галеркина. Эти методы обладают достаточной универсальностью, в том смысле, что применимы для решения уравнений с интегралами по множествам различной структуры. В частности с точки зрения решения граничных интегральных уравнений важны случаи уравнений на кривой или на поверхности. Рассмотрены некоторые аспекты аппроксимации кривых и поверхностей системами ячеек.

Показано, что оба рассматриваемых численных метода приводят к системам линейных алгебраических уравнений, вычисление коэффициентов которых сводится к вычислению интегралов по ячейкам разбиения. Рассмотрены вопросы вычисления таких интегралов, в частности в случае, когда подынтегральная функция может иметь слабую особенность.

Так же в этой главе рассмотрен вопрос о численном решении интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в случае, когда уравнение не является однозначно разрешимым, следовательно, имеются

условие разрешимости на правую часть. Рассмотрен метод введения регуляризирующих переменных и записи дополнительных уравнений (соотношений) для получения однозначно разрешимой системы уравнений.

В главе 5 рассмотрено приложение метода граничных интегральных уравнений к решению краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца.

Сначала рассмотрены краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнений Лапласа и Гельмгольца в области, границей которой является замкнутая поверхность (кривая в плоском случае). В этом случае описан классический подход, при котором решение ищется в виде поверхностного потенциала, причем задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода на границе области. Такие уравнения описаны в основной литературе по уравнениям математической физики, например, в [43], [7].

В настоящей книге, так же, описаны подробности реализации численных методов решения возникающих уравнений на основе численных схем, рассмотренных в главе 4.

Более специфический класс задач представляют плоские задачи на разрезе и пространственные задачи на экране.

В главе 5 в разделе 5.3 рассмотрено решение пространственной краевой задачи Дирихле на экране сведением задачи к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода. В разделе 5.4 рассмотрено численное решение плоской краевой задачи Неймана на разрезе двумя способами: путем сведения к сингулярному и гиперсингулярному интегральным уравнениям на отрезке. В разделе 5.5 рассмотрено численное решение трехмерной краевой задачи Неймана на экране путем сведения к гиперсингулярному интегральному уравнению. И в плоском и в пространственном случае в гиперсингулярном интегральном уравнении интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару.

В главе 6 описываются некоторые приложения метода интегральных уравнений к задачам аэродинамики. Здесь рассмотрено решение плоской задачи об обтекании профиля крыла и пространственной задачи об обтекании крыла конечного размаха потоком идеальной несжимаемой жидкости в так называемой безотрывной постановке. Дается изложение метода дискретных вихрей и метода вихревых рамок, в основе которых лежит решение граничных интегральных уравнений. Так же дан небольшой обзор основной литературы по приложению вихревых методов к задачам аэродинамики.

В главе 7 рассматривается приложение метода граничных интегральных уравнений к задачам рассеяния звуковых волн в монохроматическом случае. Рассмотрены задачи рассеяния заданной первичной волны на идеально жестком и идеально мягком телах. По сути здесь решаются внешние краевые задачи Неймана и Дирихле для однородного уравнения Гельмгольца, рассмотренные в главе 5.

Приводятся численные схемы решения указанных задач с применением метода граничных интегральных уравнений.

В главе 8 рассматривается приложение метода интегральных уравнений к задачам рассеяния электромагнитных волн в монохроматическом случае. Здесь ставятся краевые задачи для уравнений Максвелла, записанных для пространственных составляющих электрического и магнитного полей при монохроматической зависимости от времени. Вводятся выражения для электрического и магнитного полей через поверхностные токи. Приводятся примеры численных схем, позволяющих решать задачу рассеяния на идеально проводящем теле, ограниченном замкнутой поверхностью, и на системе идеально проводящих таких тел и экранов. В первом случае задача сводится к численному решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Во втором случае возникает граничное интегральное уравнение с сильной особенностью. Эти примеры есть только некоторое введение в области приложения интегральных уравнений к задачам электромагнитного рассеяния. Для более подробного знакомства с этой областью дается небольшой обзор задач электродинамики, где применим метод интегральных уравнений, и соответствующей литературы.

Глава 1

Интегралы и интегральные операторы

1.1 Интегралы по различным областям интегрирования

Напомним некоторые основные сведения, связанные с интегралами: кратными, криволинейными и поверхностными первого рода.

1.1.1 Кратные интегралы. Будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_n)$ – точки в арифметическом пространстве R^n . Пусть D – некоторое подмножество пространства R^n , f – некоторая функция, заданная на множестве D .

Будем обозначать

$$\int_D f(x)dx = \int \dots \int_D f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n \quad (1.1)$$

– кратный интеграл, понимаемый как интеграл по Риману. Реально мы будем рассматривать такие интегралы для случаев $n = 1, 2, 3$. При этом будем считать, что множество D измеримо, понимая его измеримость в смысле меры Жордана [20, глава 10, §2,3], [24, т.2, глава 6, §44], [22, глава 5, §3, п.4].

Напомним, что в одномерном случае ($n = 1$), если множество D есть отрезок, то его мера есть его длина, интеграл является обычным определенным интегралом. Если множество D есть система отрезков, то его мера есть суммарная длина этих отрезков.

В двумерном случае ($n = 2$) под мерой множества D понимается его площадь, в трехмерном случае ($n = 3$) – его объем.

Напомним кратко основные идеи введения понятия кратного интеграла по произвольному измеримому ограниченному множеству. Здесь можно выделить два основных подхода.

Первый подход состоит в том, чтобы сначала ввести понятие кратного интеграла по n -мерному параллелепипеду, а затем ввести

понятие меры множества и интеграла по измеримому множеству.

Под n -мерным параллелепипедом понимается множество точек

$$P = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in [a_1, b_1], x_2 \in [a_2, b_2], \dots, x_n \in [a_n, b_n]\},$$

$[a_i, b_i], i = 1, \dots, n$ – некоторые отрезки на числовой оси.

Будем использовать единый термин параллелепипед, понимая, что при $n = 1$ это есть отрезок, при $n = 2$ – прямоугольник. При этом под мерой параллелепипеда понимается его объем (длина отрезка при $n = 1$, площадь прямоугольника при $n = 2$):

$$\mu(P) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Вводится понятие разбиения параллелепипеда P на систему параллелепипедов, под которым понимается система множеств $T_p = \{P_i\}, i = 1, \dots, N$, где каждое из множеств P_i есть параллелепипед, $\bigcup_{i=1}^N P_i = P$, и при $i \neq j$ пересечение параллелепипедов P_i и P_j может содержать только их граничные точки. Диаметром такого разбиения называется наибольший из диаметров множеств P_i . При этом напомним, что диаметром множества D называется число:

$$D = \sup_{x, y \in D} |x - y|. \quad (1.2)$$

Далее вводится понятие отмеченного разбиения $\tilde{T} = \{(P_i, x^i)\}$, которое возникает, если на каждом параллелепипеде P_i , входящем в разбиение T_p , выбрать точку $x^i \in P_i$.

Теперь пусть $f(x)$ – функция, заданная на параллелепипеде P .

Интегральной суммой называется число

$$S(f, \tilde{T}) = \sum_{i=1}^N f(x^i) \mu_i, \quad (1.3)$$

где μ_i – мера множества P_i , под которой в данном случае понимается объем параллелепипеда P_i . После этого вводится понятие интеграла от функции f по параллелепипеду $D = P$ как:

$$\int_D f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} S(f, \tilde{T}), \quad (1.4)$$

где h есть диаметр разбиения \tilde{T} .

Отметим, что в последней формуле предел берется по параметру h , а функция $S(f, \tilde{T})$ под знаком предела зависит (при фиксированной функции f) от выбора отмеченного разбиения \tilde{T} . Поэтому понятие предела здесь нуждается в пояснении:

$$I = \lim_{h \rightarrow 0} S(f, \tilde{T}),$$

если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого разбиения \tilde{T} , диаметр которого подчинен оценке $h < h_0$, выполнено неравенство $|I - S(f, \tilde{T})| < \varepsilon$.

1.1 Интегралы по различным областям интегрирования

Затем вводится понятие меры ограниченного множества через определенный интеграл. Если D есть ограниченное множество в пространстве R^n , то можно построить n -мерный параллелепипед P такой, что $D \subset P$ и определить меру множества D как

$$\mu(D) = \int_P \chi_D(x) dx, \quad \chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases},$$

функция $\chi_D(x)$ называется характеристической функцией множества. Множество называется измеримым, если записанный интеграл существует. Интеграл (1.1) в этом случае вводится как

$$\int_D f(x) dx = \int_P \chi_D(x) f(x) dx.$$

При этом доказывается, что факт существования интеграла и его значение не зависят от выбора параллелепипеда P .

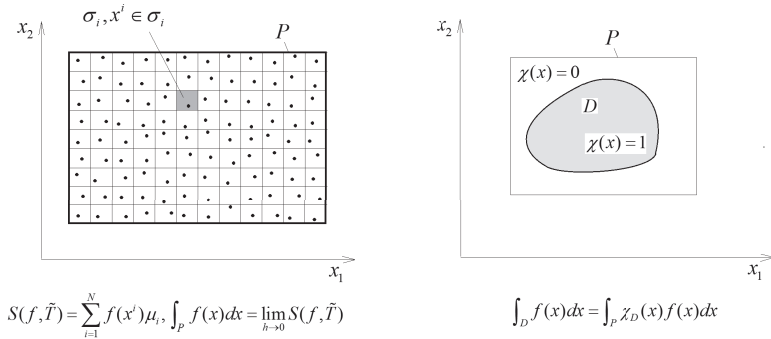


Рис. 1.1: К определению интеграла, первый подход

Второй подход состоит в том, чтобы сначала ввести понятие меры множества по Жордану, а затем сразу строить понятие интеграла на произвольном множестве через понятия разбиения множества и интегральной суммы.

Предположим, что мы ввели меру Жордана для множеств (без использования понятия интеграла – см. [20, глава 10, §2,3], [24, т.2, глава 6, §44], [22, глава 5, §3, п.4]).

Пусть D – измеримое множество в пространстве R^n (мы подразумеваем, что измеримое множество ограничено).

Определение 1.1. Разбиением измеримого множества D будем называть систему его подмножеств (ячеек разбиения) $\sigma_i, i = 1, \dots, N$, таких, что:

– каждое из множеств σ_i есть измеримое подмножество множества D ;

- $D = \cup_{i=1}^N \sigma_i$,
- $\sigma_i \cap \sigma_j$ есть множество нулевой меры при $i \neq j$.

Пусть $T = \{\sigma_i\}$, $i = 1, \dots, N$, – разбиение множества D . Так же, как и для разбиения параллелепипеда на систему параллелепипедов, вводятся понятия:

- диаметр разбиения – наибольший из диаметров ячеек σ_i , где диаметр ячейки вводится по формуле (1.2);
- отмеченное разбиение $\tilde{T} = \{(\sigma_i, x^i)\}$, $i = 1, \dots, N$, как совокупность ячеек разбиения σ_i и точек $x^i \in \sigma_i$.

Для функции $f(x)$, заданной на множестве D и отмеченного разбиения \tilde{T} вводится интегральная сумма по формуле (1.3), где μ_i – мера ячейки σ_i . Наконец, интеграл (1.1) от функции $f(x)$ по множеству D вводится по формуле (1.4), в которой через \tilde{T} обозначены разбиения множества D .

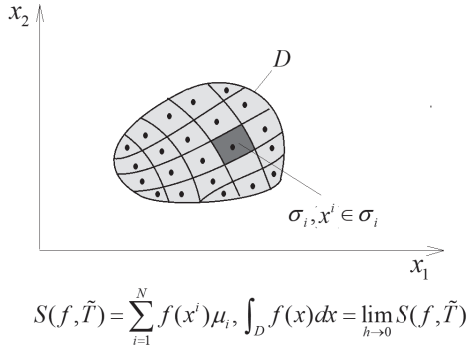


Рис. 1.2: К определению интеграла, второй подход

Оба описанных подхода равносильны. Отметим, что если взять классические курсы математического анализа, то в [21, глава 3, §1,4] описаны оба указанных подхода, в [19, глава 11] использован 1-й подход, в [24, т.2, глава 6, §44, п.3] использован 2-й подход.

Отметим, что мы ввели определение 1.1 разбиения и интеграла – формула (1.4), не только для напоминания, но и поскольку формула (1.4) дает способ приближенного вычисления интеграла. Мы будем использовать эти определения в дальнейшем.

Напомним также, что ограниченное множество измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда его граница имеет меру нуль по Жордану, а интеграл (1.1) по измеримому множеству D существует тогда и только тогда, когда функция f ограничена и множество ее точек разрыва функции имеет меру нуль по Лебегу [19, глава 11, §1,

п.2]. В частности если функция непрерывна и ограничена на измеримом множестве D , то интеграл (1.1) существует.

1.1.2 Криволинейные интегралы. Если множество D есть кривая на плоскости или в пространстве, а f – некоторая функция, заданная на этой кривой, обозначим

$$\int_D f(x) dx = \int_D f(x_1, \dots, x_n) ds \quad (1.5)$$

– криволинейный интеграл первого рода (интеграл по длине дуги).

Напомним основные факты, связанные с понятиями «кривая» и «криволинейный интеграл» (подробно понятие криволинейного интеграла вводится, например, в [21, глава 4], [24, т.2, глава 6, §47]).

Элементарной кривой называется образ непрерывного инъективного отображения (вложения) окружности или отрезка в пространство. Это означает, что такая кривая задается как множество точек $x = u(t)$, $t \in [a, b]$, где $u(t)$ – непрерывная функция. Эта кривая может быть разомкнутой или замкнутой. В случае разомкнутой кривой мы предполагаем, что $u(t_1) \neq u(t_2)$ при $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$ (т.е. имеется взаимно однозначное соответствие между точками кривой и точками отрезка $[a, b]$).

В случае замкнутой кривой можно построить такую параметризацию, что $u(t_1) = u(t_2)$ при $t_1 = a, t_2 = b$ и $u(t_1) \neq u(t_2)$ для любых других пар значений $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$ (можно считать, что t есть параметр, откладываемой на окружности).

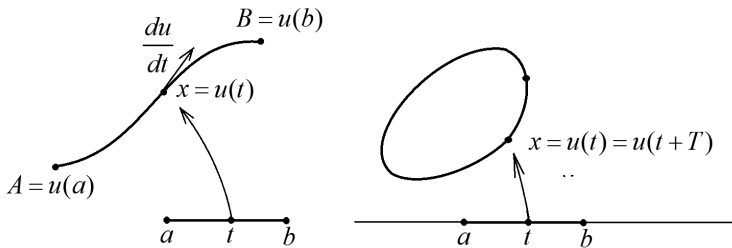


Рис. 1.3: Параметризация кривой. Слева – разомкнутая кривая. Справа – замкнутая кривая

Разомкнутая элементарная кривая считается гладкой класса C^k , $k = 1, 2, \dots$, если ее можно параметрически задать так, что функция u удовлетворяет условию: $u \in C^k[a, b]$ (функция u k – раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$) и при этом ее производная удовлетворяет условию: $du/dt \neq 0$ для всех точек отрезка $[a, b]$. Замкнутая кривая считается гладкой класса C^k , $k = 1, 2, \dots$, если ее

можно параметрически задать так, что функция u , определенная на отрезке $[a, b]$, может быть продолжена до периодической функции с периодом $T = b - a$, удовлетворяющей условиям $u \in C^k[\mathbb{R}]$, $du/dt \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Если D есть элементарная кривая, заданная параметрически в виде зависимости $x = u(t)$, $t \in [a, b]$, то криволинейный интеграл (1.5) можно ввести как определенный интеграл по параметру t :

$$\int_D f(x) dx = \int_D f(u(t)) |du/dt| dt \quad (1.6)$$

Кривую L будем называть кусочно-гладкой, если ее можно представить в виде объединения конечного числа гладких разомкнутых кривых (компонент) L_m , $m = 1, \dots, M$, так, что две различные компоненты не могут иметь общих точек, за исключением точек, которые являются концами одновременно каждой из этих кривых.

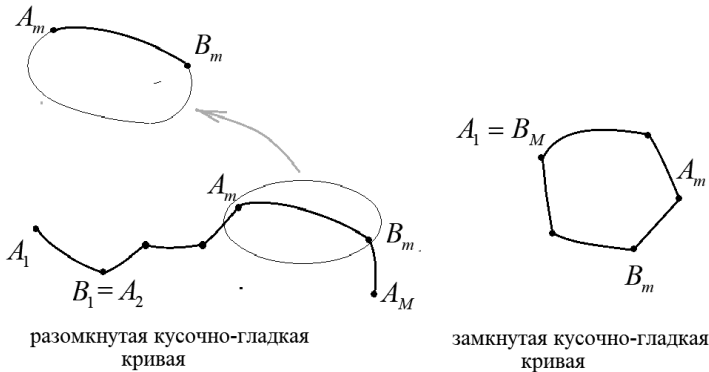


Рис. 1.4: Кусочно-гладкие кривые

Пусть компонента L_m , имеет концы в точках A_m и B_m , $m = 1, \dots, M$. Кусочно-гладкая кривая называется простой, если эти компоненты L_m связаны соотношениями: A_1, \dots, A_M – различные точки, $B_m = A_{m+1}$, $m = 1, \dots, M - 1$ (начало следующей кривой совпадает с концом предыдущей); $B_M \neq A_1$ в случае разомкнутой кривой; $B_M = A_1$ в случае замкнутой кривой, и никакие две разные компоненты не могут иметь других точек пересечения. Интеграл по кусочно-гладкой кривой L равен сумме интегралов по ее компонентам:

$$\int_L f(x) dx = \sum_{m=1}^M \int_{L_m} f(x) dx, \quad (1.7)$$

1.1 Интегралы по различным областям интегрирования

на каждой из компонент L_m , $m = 1, \dots, M$ применима формула (1.6).
Сделаем еще одно предположение.

Предположение 1.1. *Говоря, о кусочно-гладкой кривой класса C^k будем предполагать, что каждая ее гладкая разомкнутая компонента L_m , $m = 1, \dots, M$, является частью некоторой гладкой замкнутой кривой L_m^0 . При этом, рассматривая разомкнутую гладкую кривую класса C^k , также будем считать, что она является частью некоторой гладкой замкнутой кривой класса C^k .*

1.1.3 Поверхностные интегралы 1-го рода. Задание поверхностей.

А) Общее понятие гладкой поверхности. Здесь сразу обратим внимание на то, что работа с поверхностными интегралами в значительной мере связана со свойствами поверхностей и их параметризацией. Приведем некоторые ключевые сведения и понятия, связанные с поверхностями, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть V есть область на плоскости R^2 , S – некоторое подмножество в пространстве R^3 . Отображение φ , ставящее в соответствие каждой точке $u = (u_1, u_2) \in V$ элемент $x \equiv (x_1, x_2, x_3) = \varphi(u) \in S$, есть гомеоморфизм, если отображение φ взаимно однозначно, непрерывно, и обратное отображение также непрерывно. Требование непрерывности прямого и обратного отображения здесь можно сформулировать как условие того, что каждая фундаментальная последовательность элементов множества V переходит в фундаментальную последовательность множества S и наоборот, каждая фундаментальная последовательность множества S является образом фундаментальной последовательности множества V . (см. [21, глава 5, §1]).

Определение 1.2. *Множество Σ в пространстве R^3 называется поверхностью, если для любой точки $z \in \Sigma$ существует трехмерная окрестность этой точки $U(z)$ и гомеоморфизм $\varphi : V \rightarrow S(z)$, где $S(z) = U(z) \cap \Sigma$, $V = V(z)$ – множество точек $u = (u_1, u_2)$ в пространстве R^2 одного из двух следующих видов:*

- вся плоскость R^2 (в этом случае точка называется внутренней точкой поверхности Σ);
- полуплоскость $u_2 \leq 0$ на плоскости R^2 , причем, $z = \varphi(u^0)$, где точка u^0 лежит на границе $u_2 = 0$ полуплоскости V (в этом случае точка z называется краевой точкой поверхности Σ .)

Замечание. Данное определение соответствует определениям из [19, глава 12, §1, п.1 и §3, п.1] для гладкой поверхности без края и с краем.

Множество всех краевых точек поверхности Σ называется краем поверхности. Если поверхность не содержит ни одной краевой точки, то она называется поверхностью без края. Если поверхность без края является компактным множеством в пространстве R^3 , то ее также называют замкнутой (в смысле отсутствия края).

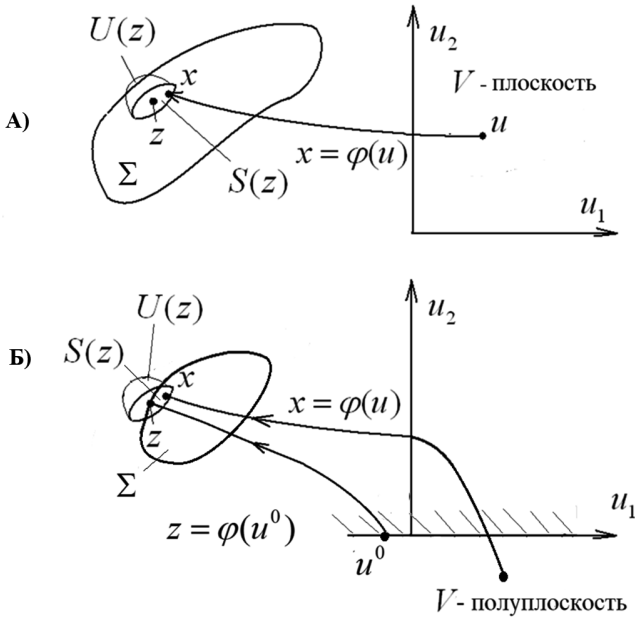


Рис. 1.5: К определению гладкой поверхности. А) точка $z \in \Sigma$ внутренняя. Б) точка $z \in \Sigma$ крайняя

Заметим, что определение понятия поверхность не изменится, если в качестве множества V использовать любое множество на плоскости, гомеоморфное плоскости в случае внутренней точки или полуплоскости $u_1 \leq 0$ в случае краевой точки. Так можно в случае внутренней точки взять множество

$$V = \{u = (u_1, u_2) \mid u_1 \in (-1, 1), u_2 \in (-1, 1)\}$$

– открытый куб, а в случае точки края

$$V = \{u = (u_1, u_2) \mid u_1 \in (-1, 1), u_2 \in (-1, 1]\}$$

– куб, содержащий одну из граней.

Напомним, что для каждой точки $z \in \Sigma$ отображение $\varphi[z] : V \rightarrow S(z)$ называется локальной картой на поверхности Σ , а множество $S(z)$ – областью действия этой карты. Набор локальных карт $\{\varphi_i : V_i \rightarrow S_i(z)\}$, области действия которых покрывают все множество Σ , называется атласом поверхности.

Если множество Σ компактно, то можно выбрать конечный набор карт $\{\varphi_i : V_i \rightarrow S_i(z)\}$, $i = 1, \dots, N$, образующий атлас. Это следует из того, что окрестности $U(z)$ из определения 1.2, построенные для

1.1 Интегралы по различным областям интегрирования

каждой точки $z \in \Sigma$, образуют покрытие множества Σ открытыми множествами, из которого можно выбрать конечное подпокрытие.

Отображение $\varphi : V \rightarrow S(z)$ из определения 1.2 будем называть гладким отображением класса C^m , если функция φ имеет частные производные вплоть до порядка m включительно, непрерывные во всех точках множества V . Гладкое отображение считается невырожденным, если оно в каждой точке $x \in S$ имеет ранг равный 2, т.е. векторы $\partial x / \partial u_i$, $i = 1, 2$, линейно независимы.

Гомеоморфизм $\varphi : V \rightarrow S(z)$, являющийся невырожденным гладким отображением класса C^m , называют диффеоморфизмом класса C^m .

Определение 1.3. (См. [19, глава 12, §1]) Поверхность Σ называется гладкой поверхностью класса C^m , если она обладает атласом, локальные карты которого являются гладкими, невырожденными отображениями класса C^m .

Возьмем точку $z \in \Sigma$ и пусть отображение $\varphi[z] : V \rightarrow S(z)$ есть локальная карта на поверхности Σ . В каждой точке x участка $S(z)$ на поверхности определены независимые касательные векторы $\vec{\tau}_i = \partial x / \partial u_i$, $i = 1, 2$, и единичный вектор нормали

$$\vec{n}(x) = \frac{[\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2]}{|\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2|}. \quad (1.8)$$

Пусть, теперь, $A(G) = \{\varphi_i : V_i \rightarrow S_i, i = 1, \dots, N\}$ есть атлас поверхности Σ . Если при некоторых i и j сегменты S_i и S_j поверхности Σ имеют непустое пересечение $S_{ij} = S_i \cap S_j$, то на участке поверхности S_{ij} действуют обе карты φ_i и φ_j . При этом оба отображения φ_i и φ_j в каждой точке $x \in S_{ij}$ задают одну и ту же касательную плоскость, а орты вектора нормали, задаваемые этими отображениями по формуле (1.8) могут или совпадать, или быть противоположно направленными. Если орты вектора нормали, задаваемые картами φ_i и φ_j на множестве $S_{ij} = S_i \cap S_j$ совпадают, то такие карты называются согласованными.

Атлас $A(\Sigma)$ поверхности Σ называется согласованным, если все его карты попарно согласованы. Если такой атлас существует, то на поверхности Σ можно определить орт вектора нормали $\vec{n}(x)$, являющийся непрерывной функцией от аргумента $x \in \Sigma$.

Поверхность Σ с заданным на ней непрерывным полем вектора нормали $\vec{n}(x)$ называется ориентированной. (Отметим также, что поверхности, на которых можно ввести такое непрерывное поле вектора нормали, называются ориентируемыми. Примером неориентируемой поверхности является так называемый лист Мебиуса [21, глава 5, §1], [19, глава 12, §1]).

Б) Дополнительные пояснения и предположения о поверхностях.

Определение гладкой поверхности, введенное в подпункте А), используется в теоретических разделах математики. Введем некоторые

дополнительные определения и предположения, связанные с поверхностями, которые удобны при работе в задачах математического моделирования и которыми будем пользоваться в этой книге.

Термины атлас и карта поверхности, как легко догадаться, заимствованы из географии, как обобщение понятий географической карты и атласа.

Пример карты на сфере. Если считать поверхность земли приближенно сферой и выколоть из этой сферы одну точку z_0 (полнос), то ее можно задать одной картой с помощью стереографической проекции. Напомним, что для этого нужно взять на сфере точку z диаметрально противоположную с точкой z_0 , и провести через точку z касательную плоскость V . Далее если для каждой точки $u \in V$ провести отрезок в точку z_0 и взять точку $x = \varphi(u)$ пересечения этого отрезка со сферой, то тем самым мы построим отображение плоскости на сферу с выколотой точкой.

Это отображение взаимно однозначно и является картой на всей поверхности. Однако, такая математическая карта не удобна, поскольку множество V , являющееся изображением поверхности, имеет бесконечные размеры. Такое отображение сколь угодно сильно растягивает расстояния на плоскости, по сравнению с расстояниями на сфере, в окрестности полюса (при этом $|\partial x / \partial u_i| \rightarrow 0$ при удалении точки u на бесконечность).

Отметим, что реальные карты земли (на которых вся земля изображается на одной карте) имеют конечные размеры, но на них также всегда есть особые точки – обычно это полюса земли.

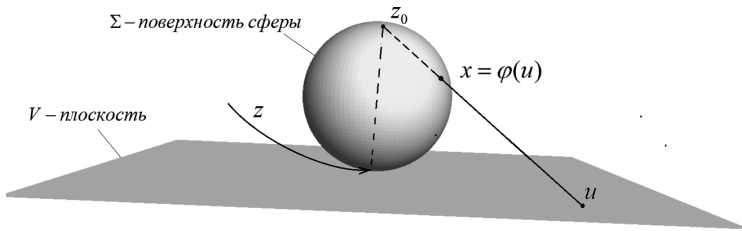


Рис. 1.6: Стереографическая проекция

Пусть Σ – гладкая поверхность в смысле данного выше определения 1.2, $z \in \Sigma$ и $\varphi[z] : V(z) \rightarrow S(z)$ есть локальная карта на поверхности, $V(z)$ есть плоскость или полуплоскость. Тогда мы можем взять участок $V'(z)$, который является замыканием некоторой области на плоскости $V(z)$, и построить на поверхности Σ участок $S'(z) = \varphi(V'(z))$ (т.е. $S'(z)$ есть множество точек $x = \varphi(u)$, $u \in V'(z)$). Тогда сужение функции φ на множество $V'(z)$ есть карта

1.1 Интегралы по различным областям интегрирования

участка $S'(z)$ поверхности Σ , причем, функция φ является гладкой на всем множестве $V'(z)$, включая его границу.

Именно так строятся карты отдельных участков поверхности Земли. Далее можно поставить задачу построения атласа поверхности, составленного из конечного набора таких карт, гладких включая границы.

Отметим, так же, что в современных компьютерных методах описания поверхностей, используемых при решении прикладных задач, обычно используются алгоритмы, в которых поверхность разбивается на части, каждая из которых строится как гладкое отображение простой плоской замкнутой фигуры. И тогда вся поверхность рассматривается как объединение таких элементарных частей. Далее будем исходить такой концепции описания поверхностей.

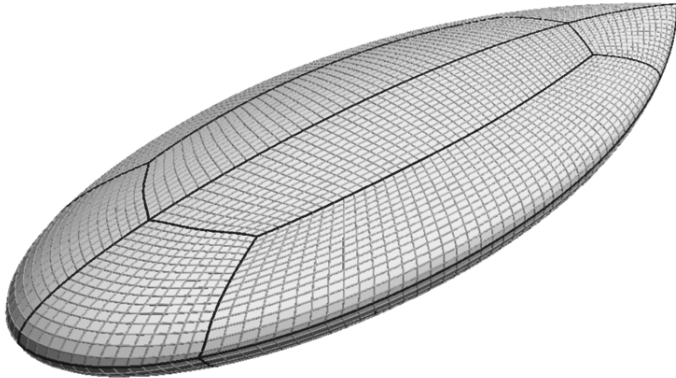


Рис. 1.7: Пример разбиение поверхности на элементарные части

Пусть теперь V – измеримое множество, являющееся замыканием некоторой ограниченной области. Отображение $\varphi : V \rightarrow S(z)$ будем называть гладким отображением класса C^m , если функция φ имеет частные производные вплоть до порядка m включительно, непрерывные во всех точках множества V , и эти частные производные непрерывно продолжаются на границу множества V . По прежнему отображение считается невырожденным, если оно в каждой точке $x \in S$ имеет ранг равный 2, т.е. векторы $\partial x / \partial u_i$, $i = 1, 2$, линейно независимы.

Определение 1.4. Поверхность Σ будем называть элементарной замкнутой поверхностью класса C^m , если существуют измеримое множество V , являющееся замыканием некоторой ограниченной

области V_0 на плоскости R^2 , и гомеоморфизм $\varphi : V \rightarrow \Sigma$, являющийся гладким невырожденным отображением класса C^m ($\varphi : V \rightarrow \Sigma$ есть диффеоморфизм класса C^m).

Краем $\partial\Sigma$ элементарной разомкнутой поверхности будем называть множество точек z этой поверхности, являющихся образами граничных точек множества V , т.е. $\partial\Sigma = \{z \in \Sigma \mid z = \varphi(\xi), \xi \in \partial V\}$.

Другими словами, элементарная разомкнутая поверхность допускает единую гладкую параметризацию: множество всех внутренних точек поверхности описывается одной картой φ , а край этой поверхности возникает как продолжение функции φ на границу ее области определения по непрерывности. Заметим, что элементарная разомкнутая поверхность есть ограниченное множество.

Здесь сделаем важное пояснение. Элементарная разомкнутая поверхность класса C^m в смысле определения 1.4, вообще говоря, может не являться гладкой поверхностью класса C^m в смысле определений 1.2 и 1.3, данных в начале п. 1.1.3. Из определений 1.2 и 1.3 гладкой поверхности можно доказать, что край такой поверхности есть гладкая кривая класса C^m .

В случае же определения 1.4 структура края элементарной разомкнутой поверхности зависит от структуры границы множества V . В частности такие поверхности как треугольник или плоский четырехугольник, помещенные в пространство, мы рассматриваем как элементарные разомкнутые поверхности. В то же время эти поверхности не являются гладкими поверхностями в смысле данного выше определения, из-за наличия угловых точек.

Чтобы не вдаваться в сложные вопросы строгой теории поверхностей, сделаем следующее предположение о тех поверхностях, которые мы будем рассматривать.

Предположение 1.2. *Рассматривая элементарную разомкнутую поверхность Σ класса C^m (в смысле определения 1.4) всегда будем предполагать, что она является частью некоторой гладкой замкнутой поверхности класса C^m (в смысле определений 1.2 и 1.3).*

При этом если $x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$, предполагаем, что у точки x есть окрестность U , которая не имеет общих точек с краем поверхности и разрезается поверхностью на две области U^+ и U^- так, что $U = U^+ \cup U^- \cup (U \cap \Sigma)$, все три множества U^+ , U^- и $U \cap \Sigma$ попарно не пересекаются.

Рассматривая любую гладкую поверхность Σ класса C^m , будем предполагать, что ее можно представить в виде объединения конечного числа элементарных разомкнутых поверхностей Σ_k класса C^m , $k = 1, \dots, M$, так, что при $k \neq l$ поверхности Σ_k и Σ_l не имеют общих внутренних точек.

Определение 1.5. *Кусочно-гладкой поверхностью будем называть множество Σ , которое является объединением конечного числа элементарных разомкнутых поверхностей Σ_k с краем класса C^m , $m \geq$*

1.1 Интегралы по различным областям интегрирования

1, $k = 1, \dots, M$, так, что при $k \neq l$ поверхности Σ_k и Σ_l не имеют общих внутренних точек.

Краем кусочно-гладкой поверхности будем называть множество точек x – крайних точек поверхности Σ , каждая из которых является крайней точкой некоторой компоненты Σ_k и при этом не принадлежит ни одной из других компонент Σ_l , $l = 1, \dots, M$, $l \neq k$.

Если поверхность Σ не имеет точек края, будем называть ее замкнутой.

Пусть Σ – гладкая замкнутая поверхность класса C^m , $m \geq 3$. Сделаем следующие предположения о поверхности Σ .

Каждым точке $z \in \Sigma$ и числу $\delta \in R$ поставим в соответствие точку

$$y = y_\delta(z) \equiv z + \delta \vec{n}(z). \quad (1.9)$$

Пусть

$$\Omega_r = \{y \in R^3 \mid y = y_\delta(z), z \in \Sigma, \delta \in [-r, r]\}, \quad r > 0. \quad (1.10)$$

Предположение 1.3. Существует $r > 0$ такое, что отображение между точками множества Ω_r и парами $(z, r) \in \Sigma \times [-r, r]$ является взаимно однозначным.

С геометрической точки зрения сделанное предположение означает, что для любой точки $y \in \Omega_r$, представляющейся в виде (1.9), δ есть расстояние от этой точки до поверхности Σ , z есть ближайшая к точке y точка на поверхности Σ , и при этом прямая, проведенная через точки z и y ортогональна поверхности Σ в точке z и не имеет других пересечений с поверхностью Σ в окрестности точки y радиуса r .

Лемма 1.1. Пусть Σ – гладкая замкнутая поверхность класса C^m , $m \geq 3$, и пусть Σ^δ , где $\delta \in (-r, r)$ – множество точек y вида (1.9), r – параметр из предположения 1.3. Тогда Σ^δ – гладкая замкнутая поверхность класса C^{m-1} , причем, для нее выполнено предположение 1.2 в части разбиения на элементарные компоненты.

Доказательство. Пусть $\delta \in (-r, r)$.

Сначала докажем, что Σ^δ – гладкая замкнутая поверхность класса C^{m-1} в смысле определений 1.2 – 1.3.

Возьмем достаточно малое число $\varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon < r - |\delta|$. Пусть $y_0 \in \Sigma^\delta$. Эта точка есть образ точки $z_0 \in \Sigma$ при отображении (1.9). Существует окрестность $U(z_0)$ точки z_0 такая, что множество $S(z_0) = U(z_0) \cap \Sigma$ есть образ плоскости V при отображении $\varphi[z_0]: V \rightarrow S(z_0)$, которое есть диффеоморфизм класса C^m .

Далее, для выбранного $\varepsilon > 0$ построим множество $U'(z_0)$, которое есть пересечение множества $U(z_0)$ и ε – окрестности поверхности Σ . Множество $U'(z_0)$ так же есть окрестность точки z_0 , такая, что

$S(z_0) = U'(z_0) \cap \Sigma$. При этом каждая точка $x \in U'(z_0)$ представляется в виде

$$x = z'(x) + \rho(x)\vec{n}(z'(x)), \quad z' \in \Sigma, \quad |\rho| < \varepsilon.$$

Далее, построим множество $U'_\delta(z_0)$, составленное из точек

$$y = z'(x) + \rho(x)\vec{n}(z'(x)) + \delta\vec{n}(z'(x)), \quad \text{где } x \in U'(z_0).$$

Это множество также открыто и легко увидеть, что множество

$$S_\delta(z_0) = U'_\delta(z_0) \cap \Sigma_\delta$$

есть множество точек вида $y = x + \delta\vec{n}(x)$, $x \in S(z_0)$. Но это означает, что пересечение рассматриваемого множества Σ^δ и построенного множества $U'_\delta(z_0)$, являющегося окрестностью точки y_0 , состоит из точек вида

$$y = \varphi_\delta(u) \equiv \varphi(u) + \delta\vec{n}(\varphi(u)).$$

С учетом формулы (1.8) для вектора нормали отображение φ_δ есть диффеоморфизм класса C^{m-1} .

Теперь докажем, что выполнено предположение 1.2, т.е., что поверхность Σ^δ представляется в виде объединения конечного числа элементарных разомкнутых поверхностей.

Исходная поверхность Σ , согласно сделанным предположениям, представляется в виде объединения конечного числа элементарных разомкнутых поверхностей Σ_k , каждая из которых задается параметрически как $z = \varphi_k(\xi)$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in V_k$, V_k – замыкание измеримой области на плоскости. При этом две разные компоненты Σ_k и Σ_j не имеют общих внутренних точек.

Тогда множество Σ^δ также распадается на компоненты Σ_k^δ , каждая из которых есть множество точек вида (1.9), где $z \in \Sigma_k$. Но тогда множество точек Σ_k^δ задается параметрически в виде

$$y = \varphi_k^\delta(\xi) \equiv \varphi_k(\xi) + \delta\vec{n}(\varphi_k(\xi)), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in V_k,$$

причем, функция $\varphi_k^\delta(\xi)$ $k-1$ раз непрерывно дифференцируема. Таким образом, множества Σ_k^δ есть элементарные разомкнутые поверхности класса C^{m-1} .

Лемма доказана.

Лемма 1.2. Для каждой точки $y = y_\delta(z) \in \Sigma^\delta$, определяемой формулой (1.9), вектор $\vec{n}(z)$ – вектор нормали к поверхности Σ , одновременно является и вектором нормали к поверхности Σ^δ в точке y .

Доказательство. На каждой компоненте Σ_k^δ поверхности Σ^δ , заданной параметрически формулой (1.10), касательные векторы определяются формулами

$$\vec{\tau}_1^\delta = \partial\tilde{\varphi}_k(\xi_1, \xi_2, \delta)/\partial\xi_1 \quad \text{и} \quad \vec{\tau}_2^\delta = \partial\tilde{\varphi}_k(\xi_1, \xi_2, \delta)/\partial\xi_2.$$

По построению выполнено соотношение:

$$(y_\delta(z) - z)^2 = \delta^2,$$

1.1 Интегралы по различным областям интегрирования

где $y_\delta(z) = \tilde{\varphi}_k(\xi_1, \xi_2, \delta)$, $z = \varphi_k(\xi_1, \xi_2)$. Дифференцируя последнее равенство по переменной ξ_i , имеем:

$$\left(\frac{\partial y_\delta(z)}{\partial \xi_i} - \frac{\partial z}{\partial \xi_i}, y_\delta(z) - z \right) = 0.$$

Но

$$\partial y_\delta(z) / \partial \xi_i = \tilde{\tau}_i^\delta, \quad \partial z / \partial \xi_i = \tilde{\tau}_i, \quad y_\delta(z) - z = \delta \vec{n}(z)$$

и при этом $(\tilde{\tau}_i, \vec{n}(z)) = 0$. Тогда

$$(\tilde{\tau}_i^\delta, \vec{n}(z)) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Значит, $\vec{n}(z)$ есть вектор нормали к поверхности Σ^δ в точке y , что и требовалось доказать.

Лемма доказана

В) Поверхностные интегралы. Теперь перейдем к рассмотрению поверхностных интегралов. Если множество D есть поверхность $\Sigma = D$, а f – некоторая функция, заданная на этой поверхности, обозначим

$$\int_D f(x) dx = \int_\Sigma f(x_1, x_2, x_3) d\sigma$$

– поверхностный интеграл первого рода (интеграл по площади).

Если поверхность Σ есть элементарная разомкнутая поверхность, с параметризацией, определяемой функцией $\varphi : V \rightarrow \Sigma$, то поверхностный интеграл по этой поверхности можно ввести как двойной интеграл:

$$\int_D f(x) dx = \int_V f(\xi) J(\xi) d\xi, \quad (1.11)$$

где

$$J(\xi) = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right|$$

– функция, которая называется якобиан отображения φ .

Если Σ есть кусочно-гладкая поверхность, являющаяся объединением конечного числа элементарных разомкнутых поверхностей Σ_m , $m = 1, \dots, M$, так, что две различные компоненты не имеют общих внутренних точек, то интеграл по такой поверхности Σ можно представить как сумму интегралов по ее компонентам:

$$\int_\Sigma f(x) dx = \sum_{m=1}^M \int_{\Sigma_m} f(x) dx, \quad (1.12)$$

на каждой из компонент Σ_m , $m = 1, \dots, M$, применима формула (1.11).

Строгая теория поверхностных интегралов дается в курсах математического анализа [21, глава 5], [19, глава 12], [24, §52]. В частности из этой теории следует, что значение интеграла по поверхности Σ не зависит ни от способа ее представления в виде объединения элементарных компонент ни от параметризации этих компонент.

1.1.4 О некоторых общих свойствах интегралов. Пусть D есть множество в пространстве R^n одного из рассмотренных видов: замыкание некоторой ограниченной области в пространстве R^n (при $n = 1$ G есть некоторый отрезок $[a, b]$ на числовой прямой), кусочно-гладкая кривая на плоскости ($n = 2$) или в пространстве ($n = 3$) или кусочно-гладкая поверхность в пространстве ($n = 3$). Во всех описанных случаях множество D предполагаем компактным (замкнутым и ограниченным в пространстве R^n).

Будем называть размерностью множества D число $m = n$ в случае, если D – замыкание области в пространстве R^n , $m = 1$ если D есть кривая на плоскости или в пространстве, и $m = 2$ если D – поверхность в пространстве.

Будем во всех случаях использовать единообразную форму записи

$$\int_D f(x)dx, \quad (1.13)$$

понимая интеграл как кратный (определенный), криволинейный или поверхностный первого рода в зависимости от множества D .

Под измеримым подмножеством множества D будем понимать множество $\sigma \subset D$, такое, что определен интеграл

$$\mu(\sigma) = \int_D \chi_D(x)dx, \quad \chi_\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \in \sigma \\ 0, & x \notin \sigma \end{cases}, \quad (1.14)$$

определяющий меру множества σ , $\chi_\sigma(x)$ – характеристическая функция множества σ .

Для построения численных методов нам понадобятся, также понятие кусочно-непрерывной функции.

Определение 1.6. *Функцию $f(x)$ будем называть кусочно-непрерывной на множестве D , если существует разбиение множества D на систему ячеек σ_i такое, что для каждой из ячеек σ_i можно построить функцию f_i , определенную и непрерывную на замыкании этой ячейки и совпадающую с функцией $f(x)$ при $x \in \sigma_i \setminus \partial\sigma_i$ (здесь если D – замыкание области в R^n , то $\partial\sigma_i$ – граница ячейки σ_i , если D – кривая, то $\partial\sigma_i$ – концы кривой σ_i , если D – поверхность – $\partial\sigma_i$ – край поверхности σ_i).*

Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на множестве D , то интеграл (1.13) существует как сумма интегралов по всем ячейкам σ_i , указанным в определении 1.6.

1.2 Несобственные интегралы с полярной особенностью

1.2.1 Понятие о несобственном интеграле с полярной особенностью. В дальнейшем нас будут интересовать интегралы от функций, имеющих особенность в некоторой точке a множества D . Например, в

1.2 Несобственные интегралы с полярной особенностью

математической физике важную роль играют интегралы вида

$$\int_D \frac{f(x)}{|x-a|^\alpha} dx, \quad (1.15)$$

а также

$$\int_D f(x) \ln|x-a| dx, \quad (1.16)$$

где f – ограниченная интегрируемая функция на множестве D .

Такие интегралы будем понимать как несобственные интегралы в смысле следующего определения.

Определение 1.7. Пусть $u(x)$ – функция, имеющая особенность в точке $a \in D$ и интегрируемая на множестве $D \setminus U(a)$ для любой окрестности $U(a)$ точки a , если только множество $D \setminus U(a)$ измеримо. Будем говорить, что интеграл от функции $u(x)$ по множеству D сходится как несобственный, если существует предел, принимаемый за значение этого интеграла:

$$\int_D u(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{D \setminus U(a)} u(x) dx, \quad (1.17)$$

здесь $U(a)$ – окрестность точки a , h – диаметр окрестности $U(a)$, $D \setminus U$ – разность множеств D и U , причем, рассматриваются все те u только те окрестности, для которых множество $D \setminus U$ измеримо.

Диаметр окрестности U понимается в смысле формулы (1.2). Предел в правой части выражения (1.17) понимается следующим образом:

$$I = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{D \setminus U(a)} u(x) dx$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $h_0 = h_0(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой окрестности $U(a)$ точки a с диаметром h , удовлетворяющим условию $h < h_0$, выполнено условие:

$$\left| \int_{D \setminus U(a)} u(x) dx - I \right| < \varepsilon.$$

Замечание: Здесь мы подразумеваем, что множество D устроено так, что для любого $h > 0$ существует окрестность $U(a)$ с диаметром, меньшим чем h , такая, что множество $D \setminus U$ измеримо. В случае кратных интегралов это свойство, очевидно, выполнено, т.к. например, открытый шар U с центром в точке a и диаметром меньшим h измерим, а тогда множество $D \setminus U$ также измеримо. В случае, если множество D – кривая или поверхность (т.е. если рассматривается криволинейный или поверхностный интеграл), данное свойство будем рассматривать как требование к множеству D .

Заметим, также, что если функция $f(x)$ интегрируема на множестве D и $U(a)$ – окрестность точки a , то функции

$$u(x) = \frac{f(x)}{|x - a|^\alpha} \text{ и } v(x) = f(x) \ln |x - a|,$$

интегрируемы на множестве $D \setminus U(a)$, если это множество измеримо.

Отметим, что в курсах математического анализа несобственный кратный интеграл обычно вводится через понятие исчерпания множества. Данное нами определение 1.7 удобно для анализа интеграла от функции, имеющей особенность в 1-й точке. В приложении 1 к главе 1 показана взаимосвязь этого определения с определением через исчерпание множества, а также с определением несобственного интеграла 2-го рода на отрезке.

Непосредственно из свойств предела следует также важное неравенство: если существуют интегралы

$$\int_D u(x)dx, \quad \int_D w(x)dx,$$

и при этом $u(x) \leq w(x)$, то

$$\int_D u(x)dx \leq \int_D w(x)dx.$$

В частности, если функция $u(x)$ неотрицательна, то интеграл (1.17) так же неотрицателен (если он существует). Также из свойств предела следует, что для любой окрестности $U(a)$ точки a справедливо равенство

$$I - \int_{D \setminus U(a)} u(x)dx = \int_{U(a)} u(x)dx, \quad (1.18)$$

где интеграл по окрестности $U(a)$ понимается как несобственный.

Теорема 1.1. Пусть $u(x)$ – неотрицательная функция, имеющая особенность в точке $a \in D$ и интегрируемая на множестве $D \setminus U(a)$ для любой окрестности $U(a)$ точки a , если только множество $D \setminus U(a)$ измеримо.

В этом случае интеграл (1.17) сходится тогда и только тогда, когда существует константа C такая, что для любой окрестности $U(a)$ точки a выполнено условие

$$\int_{D \setminus U(a)} u(x)dx \leq C \quad (1.19)$$

При этом

$$\int_D u(x)dx = \sup_{U(a)} \int_{D \setminus U(a)} u(x)dx. \quad (1.20)$$

(здесь рассматриваются только окрестности, для которых множество $D \setminus U(a)$ измеримо).

1.2 Несобственные интегралы с полярной особенностью

Доказательство. А) Если интеграл в левой части равенства (1.20) сходится и I – значение этого интеграла, то для любой окрестности $U(a)$ точки a справедлива формула (1.18), где интеграл в правой части неотрицателен. При этом

$$I - \int_{D \setminus U(a)} u(x) dx \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0,$$

h – диаметр окрестности $U(a)$, и для любой окрестности $U(a)$

$$I - \int_{D \setminus U(a)} u(x) dx = \int_{U(a)} u(x) dx \geq 0.$$

Отсюда следуют неравенство (1.19) и равенство (1.20).

Б) Если выполнено условие (1.19), то существует число

$$I = \sup_{U(a)} \int_{D \setminus U(a)} u(x) dx.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U^0(a)$ точки a такая, что

$$I - \int_{D \setminus U^0(a)} u(x) dx < \varepsilon.$$

Далее, найдется $h > 0$ такое, что открытый шар $B(a, h)$ радиуса h с центром в точке a содержится в окрестности $U^0(a)$. Поэтому для любой окрестности $U(a)$, диаметр которой меньше h , выполнено условие $U(a) \subset U^0(a)$. Но тогда для такой окрестности выполнены неравенства:

$$\int_{D \setminus U^0(a)} u(x) dx \leq \int_{D \setminus U(a)} u(x) dx \leq I,$$

и значит

$$\left| I - \int_{D \setminus U(a)} u(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Но это и означает, что рассматриваемый интеграл существует и выполнено условие (1.20).

Теорема доказана.

Теорема 1.2. (Мажорантный признак сходимости интеграла.) Пусть функция $u(x)$ интегрируема на любом измеримом множестве вида $D \setminus U(a)$, где $U(a)$ окрестность точки a , и существует функция $w(x)$ такая, что $|u(x)| \leq w(x)$ при $x \in D$, $x \neq a$, для которой сходится интеграл

$$\int_D w(x) dx.$$

Тогда существует интеграл

$$\int_D u(x) dx.$$

Доказательство. Функцию $u(x)$ можно представить в виде

$$u(x) = u^+(x) - u^-(x),$$

$$u^+(x) = \begin{cases} |u(x)| & \text{при } u(x) \geq 0, \\ 0 & \text{при } u(x) < 0, \end{cases} \quad u^-(x) = \begin{cases} |u(x)| & \text{при } u(x) \leq 0, \\ 0 & \text{при } u(x) > 0. \end{cases}$$

При этом

$$0 \leq u^+(x) \leq |u(x)| \leq w(x), \quad 0 \leq u^-(x) \leq |u(x)| \leq w(x).$$

Тогда для любой окрестности $U(a)$ точки a справедливы неравенства:

$$\int_{D \setminus U(a)} u^\pm(x) dx \leq \int_{D \setminus U(a)} w(x) dx \leq \int_D w(x) dx.$$

Но последний интеграл есть константа, не зависящая от выбора окрестности $U(a)$, т.е. выполнена оценка (1.19). Тогда интегралы

$$\int_D u^\pm(x) dx$$

существует в силу теоремы 1.1 и

$$\int_D u(x) dx = \int_D u^+(x) dx - \int_D u^-(x) dx.$$

Теорема доказана.

Определение 1.8. Интеграл (1.17) называется абсолютно сходящимся, если, сходится интеграл

$$\int_D |u(x)| dx.$$

При этом если сходится интеграл

$$\int_D |u(x)| dx,$$

то интеграл

$$\int_D u(x) dx$$

сходится тем более (достаточно в теореме 1.2 положить $w(x) = |u(x)|$).

Замечание. Специфика определения 1.7 состоит в том, что и, наоборот, из сходимости интеграла

$$\int_D u(x) dx$$

следует сходимость интеграла

$$\int_D |u(x)| dx.$$

Подробнее об этом сказано в приложении 1.

Теперь вернемся к интегралам вида (1.15). Мы укажем диапазоны значений параметра α , для которых указанный интеграл сходится.

1.2 Несобственные интегралы с полярной особенностью

Отметим, что интеграл (1.16) с особенностью типа логарифм сходится для любого множества D , рассматриваемого нами вида. Это следует из того, что в силу мажорантного признака сходимости (теорема 1.2), интеграл (1.16) сходится, если только сходится интеграл со степенной особенностью (1.15) с $f(x) \equiv 1$, хотя бы для некоторого $\alpha > 0$. А последнее будет доказано для всех типов рассматриваемых несобственных интегралов.

1.2.2 Несобственный кратный интеграл с полярной особенностью.

Теорема 1.3. Пусть D – замыкание ограниченной области в пространстве R^n , $f(x)$ – интегрируемая функция на множестве D .

Тогда если $\alpha < n$, то интеграл (1.15) сходится абсолютно.

Доказательство (для $n = 1, 2, 3$). Напомним, что интегрируемая на множестве D функция ограничена на этом множестве. Поэтому, имея мажорантный признак сходимости (теорема 1.2), достаточно рассмотреть интеграл

$$I = \int_D \frac{1}{|x - a|^\alpha} dx.$$

Существование последнего интеграла докажем, применив теорему 1.1.

Пусть $U(a)$ – окрестность точки a . Найдется $h > 0$ такое, что открытый шар $B(h, a)$ (шар радиуса h с центром в точке a) содержится в окрестности $U(a)$. Пусть, также, R – диаметр множества D . Тогда

$$\int_{D/U(a)} \frac{1}{|x - a|^\alpha} dx \leq \int_{h \leq |x - a| \leq R} \frac{1}{|x - a|^\alpha} dx \equiv I(h, R).$$

Далее рассмотрим отдельно случаи $n = 1, 2, 3$ (n – размерность пространства).

В случае $n = 1$ и при $\alpha < n$ имеем:

$$I(h, R) = \int_{-R}^{-h} \frac{dr}{|r|^\alpha} + \int_h^R \frac{dr}{r^\alpha} = 2 \int_h^R \frac{dr}{r^\alpha} = \frac{2}{1 - \alpha} \left((R)^{1-\alpha} - (h)^{1-\alpha} \right),$$
$$I(h, R) \leq \frac{2}{1 - \alpha} R^{1-\alpha}.$$

В случае $n = 2$ перейдем к полярным координатам с центром в точке a и полярной осью, сонаправленной с координатной осью Ox_1 . При этом вектор $x - a$ имеет координаты $x - a = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тогда при $\alpha < n$

$$I(h, R) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_h^R \frac{r dr}{r^\alpha} = \frac{2\pi}{2 - \alpha} \left((R)^{2-\alpha} - (h)^{2-\alpha} \right) \leq \frac{2\pi}{2 - \alpha} R^{2-\alpha}.$$

В случае $n = 3$ перейдем к сферическим координатам с центром в точке a . При этом вектор $x - a$ имеет координаты $x - a =$

$(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta)$, $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Тогда при $\alpha < n$

$$I(h, R) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_h^R \frac{r^2 dr}{r^\alpha} = \frac{4\pi}{3-\alpha} \left((R)^{3-\alpha} - (h)^{3-\alpha} \right),$$

$$I(h, R) \leq \frac{4\pi}{3-\alpha} R^{3-\alpha}.$$

Во всех случаях при условии $\alpha < n$ величина $I(h, R)$ ограничена константой, которая не зависит от выбора окрестности $U(a)$. Тем самым существование интеграла доказано.

Теорема доказана.

1.2.3 Несобственный криволинейный интеграл. Рассмотрим интеграл с полярной особенностью по кривой. Здесь сначала напомним некоторые дополнительные свойства кривых.

Во-первых, напомним, что на любой простой кривой L можно ввести естественный параметр s , т.е. кривую можно задать параметрически, как множество точек вида $x = u(s)$, $s \in [s_1, s_2]$, так, что выполнено условие $|du/ds| = 1$. При этом для любого отрезка $[s', s''] \subset [s_1, s_2]$ длина l дуги, образованной точками $x = u(s)$, $s \in [s', s'']$, определяется равенством $l = s'' - s'$.

Для элементарной кривой L число $r_0 > 0$ будем называть стандартным радиусом, если для любого числа r , удовлетворяющего условию $0 < r < r_0$, и для любой точки $a \in L$ пересечение кривой и замыкания окрестности $U(a, r)$ точки a радиуса r есть шар радиуса r с центром в точке a есть простая разомкнутая кривая. Другими словами, множество точек $x \in L$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| \leq r$ задается параметрически в виде $x = u(s)$, $s \in [s', s'']$, где $[s', s'']$ – некоторый отрезок на числовой прямой.

Если кривая L замкнутая то при выделении такого отрезка $[s', s'']$ мы считаем, что $u(s)$ есть периодическая функция, заданная на всей числовой оси. Естественно, что такой отрезок $[s', s'']$ определен с точностью до периода.

Предположение 1.4. *Всюду далее, рассматривая простую кривую, мы будем предполагать, что для нее существует стандартный радиус $r_0 > 0$.*

(Существование такого стандартного радиуса $r_0 > 0$ для произвольной простой гладкой кривой может быть доказано).

Существование стандартного радиуса обеспечивает корректность определения несобственного интеграла в смысле определения 1.7, гарантируя существование достаточной для выполнения предельного перехода системы окрестностей точки a , таких, что множество

1.2 Несобственные интегралы с полярной особенностью

$D \setminus U(a)$ измеримо. А именно, для любого $h_0 > 0$ найдется окрестность $U(a)$ с диаметром $h < h_0$, для которой множество $D \setminus U(a)$ измеримо. Такой окрестностью является открытый шар $U(a) = B(a, h/2)$ с центром в точке a радиуса $h/2$, где $h < h_0$. При этом множество $D \cap U(a)$ есть простая гладкая разомкнутая кривая с выброшенными концами. Тогда множество $D \setminus U(a)$ измеримо (разность измеримых множеств измеримо).

Далее, пусть L – элементарная разомкнутая кривая, заданная параметрически в виде $x = u(s)$, $s \in [s_1, s_2]$, где s – естественный параметр. Тогда для этой кривой найдется константа $\theta > 0$, такая, что для любых точек $x = u(s_x)$, и $y = u(s_y)$ на этой кривой, $s_x, s_y \in [s_1, s_2]$, выполнено неравенство:

$$|x - y| \leq |s_x - s_y|, \quad |s_x - s_y| \leq \theta |x - y|. \quad (1.21)$$

Первое неравенство следует из следующих формул, при записи в которых мы предположим для определенности, что $s_y \leq s_x$:

$$x - y = \int_{s_y}^{s_x} \frac{du}{ds} ds, \quad |x - y| \leq \int_{s_x}^{s_y} \left| \frac{du}{ds} \right| ds = \int_{s_x}^{s_y} 1 ds = |s_x - s_y|.$$

Для доказательства второго неравенства рассмотрим функцию

$$k(s_x, s_y) = \frac{|u(s_x) - u(s_y)|}{|s_x - s_y|},$$

определенную на множестве $(s_x, s_y) \in [s_1, s_2] \times [s_1, s_2]$, $s_x \neq s_y$.

Справедлива формула:

$$u(s_x) - u(s_y) = (s_x - s_y) \int_0^1 u'(s_y + t(s_x - s_y)) dt, \quad (1.22)$$

где $u'(s) = du/ds$. Тогда

$$k(s_x, s_y) = \left| \int_0^1 u'(s_y + t(s_x - s_y)) dt \right|.$$

Используя последнее выражение, функцию $k(s_x, s_y)$ можно определить до функции, непрерывной на множестве $[s_1, s_2] \times [s_1, s_2]$, которое является компактным в пространстве R^2 . Поэтому она достигает на этом множестве своего минимального значения k_{\min} . Функция $k(s_x, s_y)$ строго положительна при $s_x \neq s_y$, т.к. при этом точки $x = u(s_x)$ и $y = u(s_y)$ различны. Если же $s_x = s_y$, то $k(s_x, s_y) = |u'(s_x)| = 1$. Значит функция $k(s_x, s_y)$ строго положительна на всей области определения. Но тогда выполнено условие $k_{\min} > 0$ и верно второе из неравенств (1.21) с константой $\theta = 1/k_{\min}$.

Теорема 1.4. Пусть $D = L$ – кусочно-гладкая кривая в пространстве R^n , $n = 2, 3$, $f(x)$ – интегрируемая функция на кривой L . Тогда если $\alpha < 1$, то интеграл (1.15) сходится абсолютно.

Доказательство. В силу формулы (1.12) интеграл (1.15) можно представить в виде суммы интегралов по простым гладким разомкнутым кривым – компонентам кривой L . При этом интеграл (1.15)

сходится тогда и только тогда, когда сходятся одновременно все такие интегралы.

Пусть L' – элементарная гладкая разомкнутая кривая, являющаяся одной из компонент кривой L .

Если $a \notin L'$, то подынтегральная функция в интеграле (1.15) есть произведение непрерывной функции $|x - a|^{-\alpha}$ и интегрируемой функции f , значит интеграл существует.

Пусть $a \in L'$. Функция f ограничена, как интегрируемая функция. Поэтому, в силу мажорантного признака сходимости (теорема 1.2), достаточно доказать сходимость интеграла

$$\int_{L'} \frac{1}{|x - a|^\alpha} dx. \quad (1.23)$$

Зададим кривую L' параметрически в виде $x = u(s)$, $s \in [s_1, s_2]$, где $[s_1, s_2]$ – некоторый отрезок на числовой прямой, s – естественный параметр. Осуществив формальный переход к интегралу по параметру, получим несобственный интеграл по отрезку:

$$I = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{|u(s) - a|^\alpha} ds. \quad (1.24)$$

В силу неравенства (1.21), выполнена оценка

$$\frac{1}{|u(s) - a|^\alpha} \leq \frac{\theta^\alpha}{|s - s_a|^\alpha},$$

где $a = u(s_a)$. В силу теоремы 1.3 интеграл (1.24) существует.

Теперь докажем, что интеграл (1.23) существует в смысле определения 1.7.

Пусть $U(a)$ – окрестность точки a с диаметром h , причем, $h < r_0$, где r_0 – стандартный радиус кривой L' . Эта окрестность содержит внутри себя некоторый открытый шар $B(a, r)$ с центром в точке a радиуса r , причем, $r < r_0$. Пересечение замыкания этого шара и кривой L' есть множество точек $x = u(s)$, для которых значение параметра s принадлежит некоторому отрезку $l \subset [s_1, s_2]$. При этом если $s \in [s_1, s_2] \setminus l$, то $|s - s_a| \geq r$. Тогда

$$\int_{L' \setminus U(a)} \frac{1}{|x - a|^\alpha} dx \leq \int_{L' \setminus B(r, a)} \frac{1}{|x - a|^\alpha} dx = \int_{[s_1, s_2] \setminus l} \frac{1}{|u(s) - a|^\alpha} ds \leq I.$$

По теореме 1.1 интеграл (1.23) существует.

Теорема доказана.

1.2.4 Несобственный поверхностный интеграл. Для исследования поверхностных интегралов с особенностью в точке $a \in \Sigma$, удобно ввести следующую, так называемую специальную систему координат.

Пусть $a \in \Sigma$. Построим систему декартовых координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с центром $O = a$ так, что бы ось $O\xi_3$ была сонаправлена с вектором $\vec{n}(a)$. Таковую систему координат назовем специальной.

Построим цилиндр

$$C(a, r) = \{x \in R^3 \mid (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 \leq r^2, |\xi_3| \leq r\}, \quad r > 0, \quad (1.25)$$

1.2 Несобственные интегралы с полярной особенностью

где (ξ_1, ξ_2, ξ_3) – координаты точки x в выбранной специальной системе координат. С геометрической точки зрения $\mathbf{C}(a, r)$ есть замкнутый круговой цилиндр высоты $2r$, осью вращения которого является ось $O\xi_3$, основанием круг радиуса r , и у которого точка a является серединой высоты, проведенной вдоль оси.

Пусть $\Sigma(a, r) = \mathbf{C}(a, r) \cap \Sigma$ есть часть поверхности Σ , содержащаяся в замкнутом цилиндре $\mathbf{C}(a, r)$.

Далее, мы можем построить ортогональную проекцию участка $\Sigma(a, r)$ на плоскость $O\xi_1\xi_2$. Обозначим эту ортогональную проекцию $\Sigma^*(a, r)$. Обозначим, также $S(c, r)$ множество пар чисел (ξ_1, ξ_2) , для которых точка c с координатами $(\xi_1, \xi_2, 0)$ принадлежит множеству $\Sigma^*(a, r)$. Другими словами, $S(c, r)$ есть ортогональная проекция участка поверхности $\Sigma(a, r)$ на плоскость $O\xi_1\xi_2$, но рассматриваемая как множество в пространстве R^2 .

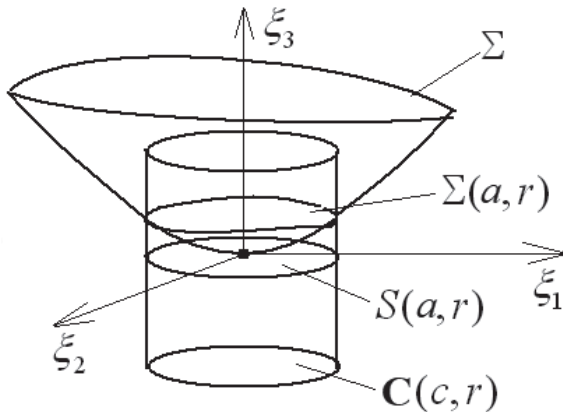


Рис. 1.8: Специальная система координат

В дальнейшем будем рассматривать гладкие поверхности, для которых выполнено следующее предположение.

Предположение 1.5. *Предположим, что существует $r_0 > 0$ такое, что для любой точки $a \in \Sigma$ участок $\Sigma(a, r_0)$ поверхности Σ , вырезаемый цилиндром $\mathbf{C}(a, r_0)$, может быть задан в специальной системе координат с началом в точке $O = a$ уравнением $\xi_3 = \psi(\xi_1, \xi_2)$, $(\xi_1, \xi_2) \in S(a, r_0)$, где $\psi \in C^k(S(a, r_0))$, причем, r_0 не зависит от точки a , функция ψ и все ее частные производные вплоть до порядка k включительно ограничены по модулю некоторой константой, не зависящей от точки $a \in \Sigma$ и параметров (ξ_1, ξ_2) на множестве $S(a, r_0)$, а множество $S(a, r_0)$ есть измеримое множество на плоскости $O\xi_1\xi_2$.*

Заметим, что при выполнении предположения 1.5, при достаточно малом положительном значении параметра r множество $S(c, r)$ представляет собой круг радиуса r , если цилиндр $\mathbf{C}(a, r_0)$ не содержит краевых точек поверхности Σ (в частности, если поверхность Σ замкнутая), и некоторая часть этого круга в противном случае.

Заметим, также, что функция $\psi(\xi_1, \xi_2)$ в предположении 1.5 удовлетворяет следующим условиям:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{в точке } \xi = 0 \quad (1.26)$$

(эти равенства сразу следуют из того факта, что координатная плоскость $O\xi_1\xi_2$ выбрана как касательная плоскость к рассматриваемой поверхности в точке a , совпадающей с началом координат).

Тогда для данной поверхности найдется константа C_0 , такая, что для любой точки $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in S(a, r_0)$ выполнены оценки:

$$|\psi(\xi)| \leq C_0 |\xi|^2, \quad \left| \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi_i} \right| \leq C_0 |\xi|, \quad i = 1, 2, \quad |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \quad (1.27)$$

Всюду далее, когда будем говорить о кусочно-гладкой поверхности Σ , будем предполагать, что она состоит из элементарных разомкнутых компонент Σ_k , $k = 1, \dots, M$, каждая из которых удовлетворяет предположениям 1.2, 1.3, 1.5 и оценкам (1.27) с одной и той же константой C_0 (достаточно взять наибольшее значение этой константы по всем компонентам поверхности).

Перейдем к рассмотрению несобственного интеграла вида (1.15) в случае, когда множество D есть некоторая кусочно-гладкая поверхность Σ .

Теорема 1.5. Пусть $D = \Sigma$ – кусочно-гладкая кривая в пространстве R^3 , $f(x)$ – интегрируемая функция на поверхности Σ . Тогда если $\alpha < 2$, то интеграл (1.15) сходится абсолютно.

Доказательство. Опять в силу мажорантного признака сходимости несобственного интеграла (теорема 1.2), достаточно доказать сходимость интеграла

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{|x - a|^\alpha} dx.$$

В свою очередь, записанный интеграл существует, если для каждой элементарной разомкнутой компоненты Σ' этой поверхности существует интеграл

$$\int_{\Sigma'} \frac{1}{|x - a|^\alpha} dx. \quad (1.28)$$

Рассмотрим интеграл (1.28), где Σ' – простая гладкая поверхность с краем.

Если точка a не лежит на этой поверхности, то интеграл (1.28) сходится, т.к. подынтегральная функция непрерывна на этой поверхности.

1.2 Несобственные интегралы с полярной особенностью

Пусть $a \in \Sigma'$. Построим специальную систему координат с началом в точке a и цилиндр $\mathbf{C}(a, r_0)$, определяемый формулой (1.25), где r_0 – параметр из предположения 1.5. Вырежем на поверхности Σ' участок $\Sigma(a, r_0) = \Sigma' \cap \mathbf{C}(a, r_0)$. Тогда интеграл (1.28) можно представить в виде суммы интегралов

$$\int_{\Sigma'} \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx = \int_{\Sigma' \setminus \Sigma(a, r_0)} \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx + \int_{\Sigma(a, r_0)} \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx.$$

Первый интеграл в последнем выражении существует, т.к. подынтегральная функция непрерывна на участке поверхности $\Sigma' \setminus \Sigma(a, r_0)$.

Рассмотрим второй интеграл, применяя то же рассуждение, что и для криволинейного интеграла при доказательстве теоремы 1.4.

Зададим участок поверхности $\Sigma(a, r_0)$ уравнением $\xi_3 = \psi(\xi_1, \xi_2)$ и перейдем в этом интеграле к интегрированию по координатам $(\xi_1, \xi_2) \in S = S(a, r_0)$.

Пусть

$$I = \int_S \frac{1}{|x-a|^\alpha} J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (1.29)$$

где

$$x = (\xi_1, \xi_2, \psi(\xi_1, \xi_2)), \quad J(\xi_1, \xi_2) = \left| \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right|.$$

Последний интеграл перепишем в виде:

$$I = \int_S \frac{1}{|\xi-a|^\alpha} g(\xi) d\xi, \quad \text{где } \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad g(\xi) = \frac{|\xi-a|^\alpha}{|x-a|^\alpha} J(\xi).$$

Заметим, что $J(\xi)$ есть непрерывная функция на множестве S и $|\xi-a| \leq |x-a|$. Поэтому функция $g(\xi)$ ограничена и интеграл (1.29) сходится как двойной несобственный интеграл в силу теорем 1.2 (мажорантный признак сходимости) и теоремы 1.3.

Теперь докажем, что интеграл

$$\int_{\Sigma(a, r_0)} \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx \quad (1.30)$$

сходится в смысле определения 1.7.

Возьмем окрестность $U(a)$ точки a с диаметром $h < r_0$. Существует $r > 0$ такое, что цилиндр $\mathbf{C}(a, r)$ содержится в окрестности $U(a)$. Но тогда:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma(a, r_0) \setminus U(a)} \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx &\leq \int_{\Sigma(a, r_0) \setminus \mathbf{C}(a, r)} \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx \leq \\ &\leq \int_{\xi \in S, |\xi| > r} \frac{1}{|x-a|^\alpha} J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \leq I. \end{aligned}$$

Значит интеграл (1.30) существует в силу теоремы 1.1.

1.2.5 Равномерная ограниченность несобственных интегралов. Опять рассмотрим интеграл

$$I = \int_D \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx, \quad (1.31)$$

где D есть множество, одного из рассмотренных видов – замыкание области в пространстве R^n , кривая на плоскости или в пространстве или поверхность, $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция. В п. 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4 фактически было доказано, что интеграл (1.31) сходится при условии

$$\alpha < \dim D, \quad (1.32)$$

где $\dim D$ – размерность множества D (для области в пространстве R^n размерность равна n , кривая есть множество размерности 1, поверхность есть множество размерности 2). При этом мы считаем, что множество D замкнуто и ограничено.

Теорема 1.6. Для интеграла (1.31) при выполнении условия (1.32) найдется константа C , зависящая от множества D и степени α , такая, что для любой точки $a \in R^n$ интеграл (1.31) подчинен оценке:

$$I \equiv \int_D \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx \leq C. \quad (1.33)$$

Доказательство этой теоремы проведем отдельно для различных видов интегралов.

Доказательство теоремы 1.6 для кратного несобственного интеграла. Пусть d есть диаметр множества D .

Если точка a лежит на расстоянии большем 1 от множества D , то $I \leq \int_D 1 dx$, величина справа есть константа, на зависящая от выбора точки a .

В противном случае:

$$I \leq \int_{x: |x-a| \leq d+1} \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx = \int_{y: |y| \leq d+1} \frac{1}{|y|^\alpha} dy.$$

Опять интеграл справа есть константа, на зависящая от выбора точки a .

Доказательство теоремы 1.6 для криволинейного несобственного интеграла. Пусть множество D есть кусочно-гладкая кривая, состоящая из конечного числа элементарных разомкнутых компонент. Достаточно доказать выполнение оценки вида (1.33) для интеграла по каждой из этих компонент.

Рассмотрим интеграл по элементарной гладкой разомкнутой кривой L_k , заданной параметрически $x = u(s)$, $s \in [s_1, s_2]$, где s – естественный параметр.

1.2 Несобственные интегралы с полярной особенностью

Если точка a лежит на кривой L_k , то $a = u(s_a)$ и, с учетом оценок (1.21), имеем

$$\int_D \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{|u(s)-a|^\alpha} \leq \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{|s-s_a|^\alpha} \leq \int_{-l}^l \frac{dt}{|t|^\alpha},$$

где $l = s_2 - s_1$ и последний интеграл есть константа, не зависящая от точки a .

Если точка a не лежит на кривой L_k , то пусть $b = u(s_b)$ есть точка на кривой L_k , ближайшая к точке a . Тогда для любой точки $x \in L_k$ выполнены неравенства:

$$|y-b| \leq |y-a| + |a-b| \leq 2|y-a|.$$

Значит

$$|y-a| \geq \frac{1}{2}|y-b| \tag{1.34}$$

и мы можем записать:

$$\int_{L_k} \frac{1}{|x-a|^\alpha} ds \leq 2^\alpha \int_{L_k} \frac{1}{|x-b|^\alpha} ds \leq 2^\alpha \int_{-l}^l \frac{dt}{|t|^\alpha},$$

интеграл справа не зависит от точки a .

Тем самым теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.6 для поверхностного несобственного интеграла. Пусть множество D есть кусочно-гладкая поверхность, состоящая из конечного числа элементарных разомкнутых компонент. Опять достаточно доказать выполнение оценки вида (1.33) для интеграла по каждой из этих компонент.

Рассмотрим интеграл по элементарной гладкой разомкнутой поверхности Σ_k .

Пусть сначала точка a лежит на поверхности Σ_k . Построим специальную систему координат с началом в точке a и цилиндр $\mathbf{C}(a, r_0)$, определяемый формулой (1.25), где r_0 – параметр из предположения 1.5. Вырежем на поверхности Σ_k участок $\Sigma(a, r_0) = \Sigma_k \cap \mathbf{C}(a, r_0)$. Тогда рассматриваемый интеграл можно представить в виде суммы:

$$\int_{\Sigma_k} \frac{1}{|x-a|^\alpha} d\sigma = J_1 + J_2,$$

$$J_1 = \int_{\Sigma(a, r_0)} \frac{1}{|x-a|^\alpha} d\sigma, \quad J_2 = \int_{\Sigma \setminus \Sigma(a, r_0)} \frac{1}{|x-a|^\alpha} d\sigma.$$

В интеграле J_2 выполнено условие $|x-a| \geq r_0$ и, значит, J_2 не превосходит константы, не зависящей от точки a .

В интеграле J_1 перейдем к интегрированию по специальным координатам. Пусть S есть множество пар (ξ_1, ξ_2) , таких, что точка

$(\xi_1, \xi_2, 0)$ есть проекция на плоскость $O\xi_1\xi_2$ некоторой точки поверхности $\Sigma(a, r_0)$. Тогда

$$J_2 = \int_S \frac{1}{|x-a|^\alpha} J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \leq \int_{\xi: |\xi| \leq r_0} \frac{J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{|\xi|^\alpha}.$$

В силу предположения 1.5 и оценок (1.27) функция $J(\xi_1, \xi_2)$, а значит и весь интеграл J_2 , ограничены по модулю константой, не зависящей от выбора точки a .

Наконец, в случае, когда точка a не лежит на поверхности Σ_k , ограниченность интеграла по этой поверхности доказывается так же, как и в случае криволинейного интеграла с применением оценки (1.34). В нашем случае b есть точка на поверхности Σ_k , ближайшая к точке a . Тем самым для поверхностного интеграла теорема 1.6 доказана.

1.3 Функции, непрерывные по Гельдеру

Определение 1.9. Функция $f(x)$, определенная на множестве $D \subset R^n$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α , если существует константа M такая, что

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\alpha$$

для всех $x, y \in D$.

Условие Гельдера с показателем $\alpha = 1$ называют также условием Липшица.

Функцию, удовлетворяющую на множестве D условию Гельдера с некоторым показателем, называют непрерывной по Гельдеру на этом множестве.

Если функция $f(x)$ определена в выпуклой области $D \subset R^n$, дифференцируема на этой области и в каждой точке области D выполнено условие $|\text{grad } f| \leq M$, то функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha = 1$ и указанной константой M (условию Липшица). Действительно, для любых точек $x, y \in D$ можем записать

$$f(y) - f(x) = \psi(1) - \psi(0),$$

где $\psi(t) = f(x + t(y - x))$. Функция $\psi(t)$ определена на отрезке $[0, 1]$, т.к. G – выпуклое множество и, значит, весь отрезок $[x, y]$, образованный точками $z(t) = x + t(y - x)$, $t \in [0, 1]$, лежит в области G . При этом функция ψ дифференцируема и

$$\psi'(t) = \sum_{i=1}^n f'_i(z(t))(y_i - x_i) = (\text{grad } f, (y - x)),$$

где $f'_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, x_i и y_i – координаты точек x и y соответственно, $(*, *)$ – скалярное произведение, вектор $\text{grad } f$ берется в точке $z(t)$. Тогда

$$|\psi'(t)| \leq |\text{grad } f| |y - x| \leq M |y - x|$$

1.3 Функции, непрерывные по Гельдеру

и

$$|f(y) - f(x)| = |\psi(1) - \psi(0)| = \left| \int_0^1 \psi'(t) dt \right| \leq M |y - x|.$$

Примером функции, удовлетворяющей условию Гельдера с показателем α отличным от 1, является функция $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ на луче $[0, \infty)$.

Действительно, рассмотрим разность $y^\alpha - x^\alpha$, где $x, y \in [0, \infty]$ и для определенности $y - x = \Delta x > 0$. Тогда $y^\alpha - x^\alpha = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha$.

Если $\Delta x \geq x$, то

$$y^\alpha - x^\alpha \leq (2\Delta x)^\alpha - x^\alpha \leq (2\Delta x)^\alpha = 2^\alpha \Delta x^\alpha.$$

Если $\Delta x < x$, то, применяя формулу Лагранжа для конечного приращения дифференцируемой на отрезке $[x, y]$ функции:

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y), \quad (1.35)$$

ξ — некоторая точка между x и y , можем записать:

$$y^\alpha - x^\alpha = \alpha \xi^{\alpha-1} \Delta x \leq \alpha x^{\alpha-1} \Delta x$$

и т.к. $\alpha - 1 < 0$, имеем:

$$y^\alpha - x^\alpha \leq \alpha \Delta x^{\alpha-1} \Delta x = \alpha \Delta x^\alpha.$$

Таким образом, при всех $x, y \in [0, \infty]$, $y > x$, выполнено условие

$$y^\alpha - x^\alpha \leq C |y - x|^\alpha, \quad (1.36)$$

с некоторой константой C , т.е. функция $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ удовлетворяет на луче $[0, \infty)$ условию Гельдера с показателем α .

В то же время, для функции $f(x) = x^\alpha$ на луче $[0, \infty)$ условие Гельдера с показателем $\beta > \alpha$ не выполнено, т.к. при $x = 0$, $y > 0$ имеем:

$$|f(y) - f(x)| = y^\alpha = y^{\alpha-\beta} |x - y|^\beta,$$

а $y^{\alpha-\beta} \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0$.

Легко увидеть, что любая функция $f(x)$, удовлетворяющая на множестве D условию Гельдера с некоторым показателем и с некоторой константой M , непрерывна на этом множестве. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq M \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0|^\alpha = 0.$$

Легко, также, показать, что если функции f и g удовлетворяют на множестве $D \subset R^n$ условию Гельдера, то их линейная комбинация $h = \lambda f + \mu g$ также удовлетворяет условию Гельдера:

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |\lambda(f(x) - f(y)) + \mu(g(x) - g(y))| \leq \\ &\leq \lambda |f(x) - f(y)| + \mu |g(x) - g(y)| \leq \\ &\lambda M_1 |x - y|^\alpha + \mu M_2 |x - y|^\alpha = M_3 |x - y|^\alpha \end{aligned}$$

где M_1, M_2, M_3 — некоторые константы, не зависящие от $x, y \in D$.

Поэтому функции, удовлетворяющие на множестве D условию Гельдера с одним и тем же показателем α , образуют линейное пространство. В этом пространстве можно ввести норму.

Определение 1.10. Нормированным пространством $H^\alpha(D)$ – функций, определенных и удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α на множестве D , называется линейное пространство функций, определенных на множестве D , для которых ограничено следующее выражение, задающее норму

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x, y \in D, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}. \quad (1.37)$$

Докажем, что введенная норма удовлетворяет свойствам нормы в нормированном пространстве. Действительно:

1) Для любой функции $f \in H^\alpha$ следует, что $\|f\|_\alpha \geq 0$, причем,

$$\|f\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x, y \in D, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \Leftrightarrow f(x) \equiv 0, x \in D.;$$

2) Для любого числа λ имеем:

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_\alpha &= \sup_{x \in D} |\lambda f(x)| + \sup_{x, y \in D, x \neq y} \frac{|\lambda f(x) - \lambda f(y)|}{|x - y|^\alpha} = \\ &= \sup_{x \in D} |\lambda| |f(x)| + \sup_{x, y \in D, x \neq y} |\lambda| \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}. \end{aligned}$$

Т.к. при умножении элементов действительного числового множества на действительное число точная верхняя грань этого множества умножается на это же число, заключаем, что

$$\|\lambda f\|_\alpha = |\lambda| \|f\|_\alpha.$$

3) Для проверки неравенства треугольника:

$$\|f + g\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha, \quad f, g \in H^\alpha(D),$$

достаточно заметить, что выполнены неравенства:

$$\|f + g\|_0 \leq \|f\|_0 + \|g\|_0,$$

где

$$\|f\|_0 = \sup_{x \in D} |f(x)|,$$

и

$$\frac{|(f(x) + g(x)) - (f(y) + g(y))|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

$$x, y \in D, \quad x \neq y.$$

Таким образом, выполнены все аксиомы нормированного пространства.

Заметим, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α и некоторой константой M , то второе слагаемое в выражении (1.37) для нормы определено и не превосходит M . Если множество D ограничено и $R = \sup_{x, y \in D} |x - y|$ – его диаметр, то,

зафиксировав некоторую точку $x_0 \in D$, можем записать:

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x_0)| + M|x - x_0|^\alpha \leq |f(x_0)| + MR^\alpha.$$

1.3 Функции, непрерывные по Гельдеру

Значит, функция $f(x)$ ограничена, выражение, определяющее норму, определено, и пространство $H^\alpha(D)$ в точности содержит все функции, удовлетворяющие условию Гельдера с данным показателем α некоторой константой M . Если множество D неограниченно, то для принадлежности функции пространству $H^\alpha(D)$ необходимо, также, чтобы функция $f(x)$ была ограничена.

Заметим, также, что для любых функций $f, g \in H^\alpha$ их произведение также является элементом пространства H^α . Действительно, справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |(f(x) - f(y))g(x)| + |f(y)(g(x) - g(y))| \leq \\ &\leq \|g\|_0 |(f(x) - f(y))| + \|f\|_0 |(g(x) - g(y))| \end{aligned}$$

где обозначено $\|f\|_0 = \sup_{x \in D} |f(x)|$. При этом для любого $\alpha \in (0, 1]$ выполнено соотношение $\|f\|_0 \leq \|f\|_\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \|fg\|_\alpha &= \sup_{x \in D} |f(x)g(x)| + \sup_{x, y \in D, x \neq y} \frac{|f(x)g(x) - f(y)g(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \\ &\leq \|f\|_0 \|g\|_0 + \|g\|_0 \sup_{x, y \in D, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + \|f\|_0 \sup_{x, y \in D, x \neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\|f\|_0 \|g\|_0 + \|g\|_0 \sup_{x, y \in D, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} = \|g\|_0 \|f\|_\alpha$$

Тогда для произведения функций f и g выполнено условие $fg \in H^\alpha$ и

$$\|fg\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha \|g\|_0 + \|f\|_0 \|g\|_\alpha.$$

Теорема 1.7. *Пространство $H^\alpha(D)$ является полным.*

Доказательство. Предположим, что f_k — фундаментальная последовательность функций в пространстве $H^\alpha(D)$.

Т.к. для каждой точки $x \in D$ и для всех $k, m \in N$ выполнено условие

$$|f_k(x) - f_m(x)| \leq \|f_k - f_m\|_\alpha,$$

числовая последовательность $f_n(x)$ является фундаментальной, а, значит, имеет предел. Таким образом, в каждой точке $x \in D$ определена функция

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Докажем, что функция $f(x)$ лежит в пространстве $H^\alpha(D)$.

Т.к. последовательность f_k фундаментальна, она ограничена, т.е. существует константа M_0 такая, что для всех $k \in D$ выполнено неравенство $\|f_k\|_\alpha \leq M_0$. Действительно, найдется номер K такой, что для всех $k \geq K$ выполнено условие $\|f_K - f_k\|_\alpha \leq 1$. Тогда при $k \geq N$ справедлива оценка

$$\|f_k\|_\alpha \leq 1 + \|f_K\|_\alpha = M_1.$$

Пусть

$$M_2 = \max_{k=1, \dots, N-1} \|f_k\|_\alpha.$$

Тогда число $M_0 = \max\{M_1, M_2\}$ является искомым.

Теперь заметим, что при всех $k \in N$, $x, y \in D$, $x \neq y$, выполнены условия:

$$|f_k(x)| \leq M_0, \quad \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq M_0.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right| \leq M_0, \\ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq M_0. \end{aligned}$$

Из полученных неравенств следует, что выражение, определяющее норму в пространстве $H^\alpha(D)$ определено для функции f . Значит, эта функция лежит в пространстве $H^\alpha(D)$.

Наконец, докажем, что $\|f - f_k\|_\alpha \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к. последовательность f_k фундаментальна, найдется такое K , что при всех $k, m \in N$, где $k > K$, выполнено условие

$$\|f_{k+m} - f_k\|_\alpha < \varepsilon/3.$$

Но тогда для всех $k \in N$, $k > K$, $x, y \in D$, $x \neq y$ можем записать:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_k(x)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |f_{k+m}(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon/3, \\ \frac{|(f(x) - f_k(x)) - (f(y) - f_k(y))|}{|x - y|^\alpha} &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|(f_{k+m}(x) - f_k(x)) - (f_{k+m}(y) - f_k(y))|}{|x - y|^\alpha} \leq \varepsilon/3. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D} |f(x) - f_k(x)| &\leq \varepsilon/3, \\ \sup_{x, y \in D, x \neq y} \frac{|(f(x) - f_k(x)) - (f(y) - f_k(y))|}{|x - y|^\alpha} &\leq \varepsilon/3, \end{aligned}$$

и

$$\|f - f_k\| \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon.$$

Таким образом, f есть предел рассмотренной последовательности.

Теорема доказана.

Еще одно важное свойство функций удовлетворяющих условию Гельдера состоит в том, что если D есть некоторое множество в пространстве R^n , а \bar{D} — его замыкание, то пространства $H^\alpha(D)$ и $H^\alpha(\bar{D})$ по существу совпадают, в том смысле, что если $f \in H^\alpha(D)$, то функцию f можно однозначно доопределить на множестве \bar{D} по непрерывности и возникшая функция $f \in H^\alpha(\bar{D})$ будет иметь ту же норму.

1.3 Функции, непрерывные по Гельдеру

Действительно, пусть $f \in H^\alpha(D)$. Для любой точки $x \in \bar{D} \setminus D$ найдется последовательность точек $x_k \in D$ такая, что $x_k \rightarrow x$. При этом x_k — фундаментальная последовательность в пространстве R^n , а в силу неравенства

$$|f(x_k) - f(x_m)| \leq \|f\|_\alpha |x_k - x_m|^\alpha$$

закключаем, что существует

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k).$$

Заметим, что значение этого предела не зависит от выбора последовательности $x_k \in D$, т.к. если предположить, что $x'_k \rightarrow x$, $x''_k \rightarrow x$ при $k \rightarrow \infty$, то последовательность $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$ также стремится к x . Но тогда и последовательность $f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \dots$ имеет предел, совпадающий с пределами последовательностей $f(x'_k)$ и $f(x''_k)$.

Далее, для любых точек $x \in \bar{D}$, $y \in \bar{D}$, $x \neq y$, построим последовательности точек $x_k \in D$, $y_k \in D$ такие, что $x_k \rightarrow x$, $y_k \rightarrow y$, $x_k \neq y_k$. Тогда

$$|f(x)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_k)| \leq \sup_{z \in D} |f(z)|$$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^\alpha} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x_k) - f(y_k)}{|x_k - y_k|^\alpha} \right| \leq \sup_{z, z' \in D, z \neq z'} \left| \frac{f(z) - f(z')}{|z - z'|^\alpha} \right|$$

Поэтому норма функции \bar{f} в пространстве $H^\alpha(\bar{D})$ определена и не превосходит норму исходной функции f в пространстве $H^\alpha(D)$. Но с другой стороны, норма функции \bar{f} не меньше нормы функции f , т.к. при вычислении нормы функции f берутся точные верхние грани от части значений, для которых берутся точные верхние грани при вычислении нормы функции \bar{f} . Поэтому

$$\|\bar{f}\|_\alpha = \|f\|_\alpha.$$

Теорема 1.8. При условии $0 < \alpha < \beta \leq 1$ пространство $H^\beta(D)$ вложено в пространство $H^\alpha(D)$ в том смысле, что если $f \in H^\beta(D)$, то $f \in H^\alpha(D)$ и найдется константа C , такая, что для всех $f \in H^\beta(D)$ выполнено неравенство

$$\|f\|_\alpha \leq C \|f\|_\beta.$$

Доказательство. Пусть $f \in H^\beta(D)$. Возьмем произвольные $x, y \in D$.

Если $|x - y| \leq 1$, то:

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_\beta |x - y|^\beta \leq \|f\|_\beta |x - y|^\alpha.$$

Если $|x - y| > 1$, то

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2 \|f\|_\beta \leq 2 \|f\|_\beta |x - y|^\alpha.$$

Тогда функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем α и

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x, y \in D, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \|f\|_\beta + 2 \|f\|_\beta = 3 \|f\|_\beta.$$

Теорема доказана.

1.4 Линейные интегральные операторы с интегрируемым ядром

Пусть D есть множество в пространстве R^n одного из рассмотренных в пункте 1.1 видов: замыкание некоторой ограниченной области в пространстве R^n (при $n = 1$ множество D есть некоторый отрезок $[a, b]$ на числовой прямой), кусочно-гладкая кривая на плоскости или в пространстве или кусочно-гладкая поверхность в пространстве. Во всех описанных случаях предполагаем, что множество D является компактным (замкнутым и ограниченным в пространстве R^n).

Напомним, что мы называем размерностью множества D число $m = n$ в случае, если D – замыкание области в пространстве R^n , $m = 1$ если D есть кривая на плоскости или в пространстве и $m = 2$ если D – поверхность в пространстве.

Рассмотрим линейный оператор K , который каждой функции $\varphi(x)$, определенной на множестве D , ставит в соответствие функцию $f = K\varphi$ по формуле

$$f(x) = (K\varphi)(x) \equiv \int_D K(x, y)\varphi(y)dy, \quad y \in D. \quad (1.38)$$

При этом в случае, если D – замыкание области в R^n , интеграл понимается как кратный (определенный при $n = 1$), для случая кривой или поверхности как криволинейный или поверхностный первого рода. Функция $K(x, y)$ называется ядром интегрального оператора K . Возможен случай, когда интеграл (1.38) рассматривается как несобственный.

Будем обозначать $C(D)$ – нормированное пространство функций, определенных и непрерывных на множестве D с нормой

$$\|f\| = \max_{x \in D} |f(x)|. \quad (1.39)$$

Определение 1.11. *Линейный оператор K , действующий из нормированного пространства L_1 в нормированное пространство L_2 называется ограниченным, если существует константа C такая, что $\|K\varphi\| \leq C \|\varphi\|$ для всех $\varphi \in L_1$. При этом величина*

$$\|K\| = \sup_{\varphi \in L_1, \varphi \neq 0} \frac{\|K\varphi\|}{\|\varphi\|}$$

называется нормой оператора.

Определение 1.12. *Модулем непрерывности функции f на множестве D называется функция*

$$\omega(\delta) = \sup_{x, y \in D, |x-y| < \delta} |f(x) - f(y)|, \quad \delta > 0.$$

Заметим, что функция $\omega(\delta)$ определена при всех $\delta > 0$ для любой ограниченной на множестве D функции f , является неубывающей:

$$\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2) \text{ при } \delta_1 < \delta_2.$$

1.4 Линеинные интегральные операторы с интегрируемым ядром

Условие $\omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ равносильно условию равномерной непрерывности функции f на множестве D . Заметим, что т.к. множество D компактно, условия непрерывности и равномерной непрерывности функции f на множестве D также равносильны.

Теорема 1.9. *Если функция $K(x, y)$ непрерывна на множестве $D \times D$ как функция двух аргументов, то оператор K есть ограниченный оператор, действующий из пространства $C(D)$ в пространство $C(D)$ (сокращенно $K : C(D) \rightarrow C(D)$).*

Доказательство. Пусть $f = K\varphi$, где $\varphi \in C(D)$.

Рассмотрим разность $f(x) - f(z)$, где $x, z \in D$. Эту разность можно представить в виде

$$f(x) - f(z) = \int_D (K(x, y) - K(z, y)) \varphi(y) dy.$$

Пусть $\omega(\delta)$ есть модуль непрерывности функции $K(x, y)$ на множестве $D \times D$, т.е.

$$\omega(\delta) = \sup |K(x, y) - K(z, q)|,$$

где точная верхняя грань берется по всем парам аргументов $(x, y) \in D \times D$ и $(z, q) \in D \times D$ при условии, расстояние между точками $A = (x, y)$ и $B = (z, q)$ в пространстве R^{2n} меньше δ .

Т.к. функция K непрерывна на множестве $D \times D$, компактном в пространстве R^{2n} , она равномерно непрерывна на этом множестве, а значит, выполнено условие $\omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Тогда при $|x - z| < \delta$ выполнено неравенство:

$$|f(x) - f(z)| \leq \omega(\delta) \int_D |\varphi(y)| dy \leq \omega(\delta) \|\varphi\| \mu(D), \quad (1.40)$$

где $\mu(D) = \int_G 1 dx$ – мера множества D . Т.к. выполнено условие $\omega(\delta) \rightarrow 0$

при $\delta \rightarrow 0$, заключаем, что функция f непрерывна (а точнее даже равномерно непрерывна) на множестве D .

Докажем, что K есть ограниченный оператор. Функция $K(x, y)$ ограничена, как непрерывная на компактном множестве. Значит, существует константа N такая, что $|K(x, y)| \leq N$ для всех $(x, y) \in D \times D$. Тогда для всех $x \in G$ справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq \int_D N \|\varphi\| dy = N \mu(D) \|\varphi\|.$$

Значит

$$\|f\| \leq NV \|\varphi\|.$$

Теорема доказана.

Ядро оператора K называется полярным, если оно представляется в виде

$$K(x, y) = \frac{\tilde{K}(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad (1.41)$$

где $\alpha < m$, m – размерность множества D , $\tilde{K}(x, y)$ – функция, непрерывная на множестве $D \times D$.

Теорема 1.10. *Интегральный оператор K с ядром вида (1.41) есть ограниченный оператор, действующий из пространства $C(D)$ в пространство $C(D)$.*

Доказательство. Сразу заметим, что для любой функции $\varphi \in C(D)$ интеграл в правой части выражения (1.39) сходится абсолютно при всех $x \in D$ и, значит, функция $f = K\varphi$ определена.

Введем семейство ядер $K_\varepsilon(x, y)$, где ε – малый положительный параметр, получаемых при сглаживании особенности в ядре оператора K :

$$K_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \frac{\tilde{K}(x, y)}{|x-y|^\alpha} & |x-y| \geq \varepsilon \\ \frac{\tilde{K}(x, y)}{\varepsilon^\alpha} & |x-y| < \varepsilon \end{cases}$$

и пусть

$$f_\varepsilon(x) = \int_D K_\varepsilon(x, y)\varphi(y)dy \equiv (K_\varepsilon\varphi)(x).$$

Ядра $K_\varepsilon(x, y)$ выбраны так, что при каждом $x \in D$ выполнено условие $K_\varepsilon(x, y) = K(x, y)$ при $|x-y| \geq \varepsilon$. При этом для каждого $\varepsilon > 0$ функция K_ε непрерывна на множестве $D \times D$.

Т.к. функция $\tilde{K}(x, y)$ непрерывна, найдется константа N такая, что $|\tilde{K}(x, y)| \leq N$ при всех $(x, y) \in D \times D$. Тогда при $|x-y| < \varepsilon$ выполнено неравенство

$$|K_\varepsilon(x, y) - K(x, y)| = |\tilde{K}(x, y)| \left[\frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \right] \leq \frac{N}{|x-y|^\alpha}.$$

Тогда

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_D |K_\varepsilon(x, y) - K(x, y)| |\varphi(y)| dy \leq \|\varphi\| N\theta(\varepsilon), \quad (1.42)$$

где

$$\theta(\varepsilon) = \int_{U(x, \varepsilon)} \frac{dy}{|x-y|^\alpha},$$

$U(x, \varepsilon) = \{y | |x-y| < \varepsilon\}$ – ε -окрестность точки x . При этом выполнено условие $\theta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из неравенства (1.42) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x)$$

в смысле равномерной сходимости по x на множестве D , причем, по теореме 1.9 функции $f_\varepsilon(x)$ непрерывны. Тогда и функция $f(x)$ непрерывна [21, глава 2, §3, теорема 2.7], [19, глава 6, §3, п.3].

1.4 Лине́йные интегральные операторы с интегрируемым ядром

Ограниченность оператора K следует из неравенств

$$|f(x)| \leq N \|\varphi\| \int_D \frac{1}{|x-y|^\alpha} dy \leq C \|\varphi\|,$$

где константа C не зависит от функции φ . Тогда

$$\|f\| \leq C \|\varphi\|$$

и оператор K ограничен.

Теорема доказана.

Теперь докажем утверждения, связанные с непрерывностью по Гельдеру функции f , определяемой выражением (1.38).

Теорема 1.11. *Предположим, что ядро оператора K , определяемого выражением (1.38), непрерывно на множестве $D \times D$ и для него справедлива оценка:*

$$|K(x, y) - K(z, y)| \leq M |x - z|^\beta$$

для всех $x, y, z \in D$.

Тогда K есть ограниченный оператор, действующий из пространства $C(D)$ в пространство $H^\beta(D)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in C(D)$. Тогда по теореме 1.9 выражение (1.28) определяет функцию $f(x) \in C(D)$ и существует константа M_1 , не зависящая от функции φ такая, что

$$\|f\| \leq M_1 \|\varphi\|,$$

где $\|\cdot\|$ есть норма элемента в пространстве $C(D)$.

Далее, для любых $x, z \in D$, можем записать

$$f(x) - f(z) = \int_D (K(x, y) - K(z, y)) \varphi(y) dy$$

и

$$|f(x) - f(z)| \leq M |x - z|^\beta \|\varphi\| \int_G 1 dy.$$

Тогда найдется такая константа M_2 , что

$$\sup_{x, z \in D, x \neq z} \frac{|f(x) - f(z)|}{|x - z|^\beta} \leq M_2 \|\varphi\|.$$

Значит правая часть выражения (1.27), определяющего норму в пространстве $H^\beta(G)$, определена для функции f , $f \in H^\beta(G)$ и

$$\|f\|_\beta \leq (M_1 + M_2) \|\varphi\|.$$

Тогда оператор K действует из пространства $C(D)$ в пространство $H^\beta(D)$ и ограничен.

Теорема доказана.

Теорема 1.12. *Предположим, что ядро оператора K , определяемого выражением (1.28), имеет вид (1.41), где функция $\tilde{K}(x, y)$ непрерывна на множестве $D \times D$ и для нее справедлива оценка:*

$$\left| \tilde{K}(x, y) - \tilde{K}(z, y) \right| \leq M |x - z|^\beta$$

для всех $x, y, z \in D$.

Тогда найдется такое $\mu \in (0, 1)$, что K есть ограниченный оператор, действующий из пространства $C(D)$ в пространство $H^\mu(D)$ (точнее для любого $\delta : 0 < \delta < t - \alpha$ можно положить $\mu = \min(\beta, \delta)$, где t – размерность множества D).

Для доказательства теоремы 1.12 сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1.3. *Для любых $\alpha > 0$ и $\mu \in (0, 1]$ найдется константа $C = C(\alpha, \mu)$, такая, что для всех попарно различных точек $x, y, z \in R^n$, $n \geq 1$, выполнена оценка:*

$$\left| \frac{1}{|x - y|^\alpha} - \frac{1}{|z - y|^\alpha} \right| \leq C |x - z|^\mu \left\{ \frac{1}{|x - y|^{\alpha+\mu}} - \frac{1}{|z - y|^{\alpha+\mu}} \right\}. \quad (1.43)$$

Доказательство. Рассмотрим два случая расположения рассматриваемых точек.

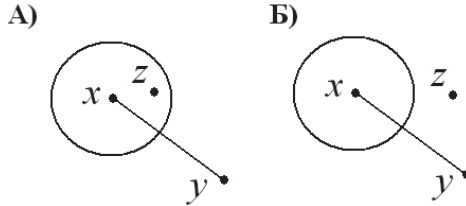


Рис. 1.9: Случаи взаимного расположения точек в доказательстве леммы 1.3

А) Пусть $|x - z| \geq |x - y|/2$.

Тогда

$$|x - y| \leq 2|x - z|$$

и

$$|z - y| \leq |z - x| + |x - y| \leq 3|z - x|.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{1}{|x - y|^\alpha} = \frac{|x - y|^\mu}{|x - y|^{\alpha+\mu}} \leq \frac{2^\mu |x - z|^\mu}{|x - y|^{\alpha+\mu}},$$

1.4 Линеинные интегральные операторы с интегрируемым ядром

$$\frac{1}{|z-y|^\alpha} = \frac{|z-y|^\mu}{|z-y|^{\alpha+\mu}} \leq \frac{3^\mu |x-z|^\mu}{|z-y|^{\alpha+\mu}}$$

и оценка (1.43) выполнена.

Б) Пусть $|x-z| \leq |x-y|/2$. Тогда сразу заметим, что выполнены неравенства:

$$|x-y| \geq 2|x-z|$$

и

$$|z-y| \geq |x-y| - |z-x| \geq |z-x|.$$

Далее, для любых положительных чисел p, q , применяя формулу Лагранжа (1.35), можем записать:

$$p^{-\alpha} - q^{-\alpha} = -\alpha \xi^{-\alpha-1} (p-q),$$

где ξ – некоторая константа, лежащая между числами p и q . Отсюда

$$|p^{-\alpha} - q^{-\alpha}| \leq \alpha(p^{-\alpha-1} + q^{-\alpha-1}) |p-q|.$$

Тогда

$$\left| \frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{|z-y|^\alpha} \right| = \left(\frac{1}{|x-y|^{\alpha+1}} + \frac{1}{|z-y|^{\alpha+1}} \right) |x-z|. \quad (1.44)$$

Остается заметить, что в рассматриваемом случае

$$|x-z| \leq |x-z|^\mu |x-y|^{1-\mu}$$

и

$$|x-z| \leq |x-z|^\mu |z-y|^{1-\mu}.$$

Тогда из оценки (1.44) следует оценка (1.43) для любого $\mu \in (0, 1]$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.12. Пусть $\varphi \in C(D)$. Тогда по теореме 1.10 выражение (1.38) определяет функцию $f(x) \in C(D)$ и существует константа M_1 , не зависящая от функции φ , такая, что

$$\|f\| \leq M_1 \|\varphi\|,$$

где $\|\cdot\|$ есть норма элемента в пространстве $C(D)$.

Теперь, пусть $x, z \in G$ и пусть $r = |x-z|$. Рассмотрим разность

$$\Delta = f(x) - f(z) = \int_D (K(x, y) - K(z, y)) \varphi(y) dy.$$

Эту разность представим в виде:

$$\Delta = \int_D \left(\frac{\tilde{K}(x, y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{\tilde{K}(z, y)}{|z-y|^\alpha} \right) \varphi(y) dy = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где

$$\Delta_1 = \int_D \left(\frac{\tilde{K}(x, y) - \tilde{K}(z, y)}{|x-y|^\alpha} \right) \varphi(y) dy,$$

$$\Delta_2 = \int_D \left(\frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{|z-y|^\alpha} \right) \tilde{K}(z, y) \varphi(y) dy.$$

Для разности Δ_1 справедлива оценка:

$$|\Delta_1| \leq M r^\beta \|\varphi\| \int_D \frac{1}{|x-y|^\alpha} dy \leq M_2 r^\beta \|\varphi\|,$$

где M_2 – некоторая константа, не зависящая от x, z и φ .

Для величины Δ_2 справедлива оценка:

$$|\Delta_2| \leq 2M_3 \|\varphi\| I(x, z),$$

$$M_3 = \max_{x, y \in D} |\tilde{K}(x, y)|,$$

$$I(x, z) = \int_D \left(\frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{|z-y|^\alpha} \right) dy.$$

Возьмем $\delta \in (0, 1]$ такое, что $\alpha + \delta < m$. В силу леммы 1.3 можем записать:

$$|J(x, z)| \leq C |x-z|^\delta \left\{ \int_D \frac{1}{|x-y|^{\alpha+\delta}} dy + \int_D \frac{1}{|z-y|^{\alpha+\delta}} dy \right\},$$

где C – константа из леммы 1.3. В силу теоремы 1.6 найдется константа M_4 такая, что

$$|J(x, z)| \leq M_4 |x-z|^\delta \text{ и } |\Delta_2| \leq 2M_3 M_4 \|\varphi\| r^\delta.$$

Собирая полученные оценки и применяя теорему 1.8, завершаем доказательство теоремы 1.12.

Теорема доказана.

1.5 Сингулярный интеграл в смысле главного значения

1.5.1 Сингулярный интеграл на отрезке. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b F(x) dx$$

от действительной функции, имеющей особенность в точке $c \in (a, b)$.

Определение 1.13. Главным значением по Коши интеграла

$$\int_a^b F(x) dx$$

называется предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} F(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b F(x) dx \right].$$

1.5 Сингулярный интеграл в смысле главного значения

Интеграл, вычисляемый с таким способом раскрытия неопределенности, называют, также сингулярным интегралом.

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}.$$

Если его вычислять как несобственный, то мы должны рассмотреть предел

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x-c} &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+0} \int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+0} \ln \frac{\varepsilon_1}{c-a} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \ln \frac{b-c}{\varepsilon_2} = \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0+0} \ln \varepsilon_1 - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \ln \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Если ε_1 и ε_2 независимы, то пределы не существуют, т.е. данный интеграл расходится как несобственный. При вычислении интеграла как сингулярного, мы должны положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon > 0$ и рассмотреть единый предел. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x-c} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} [(\ln \varepsilon - \ln(c-a)) + (\ln(b-c) - \ln \varepsilon)] = \\ &= \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon). \end{aligned}$$

Видно, что члены с параметром ε под знаком предела сокращаются и

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} \quad (1.45)$$

Рассмотрим общий интеграл:

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{x-c}. \quad (1.46)$$

Раскрывая этот интеграл в смысле главного значения, можем записать:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x)dx}{x-c} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{L_\varepsilon} \frac{f(x)dx}{x-c} = \\ &= f(c) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{L_\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{L_\varepsilon} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} dx. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{x-c} = f(c) \int_a^b \frac{dx}{x-c} + \int_a^b \frac{f(x) - f(c)}{x-c} dx, \quad (1.47)$$

где все интегралы должны пониматься в смысле главного значения по Коши и из существования правой части следует существование

левой. Первый из интегралов в правой части был рассмотрен выше, он существует в смысле главного значения. Если функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha > 0$, то

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| \leq \|f\|_\alpha \frac{1}{|x - c|^{1-\alpha}}$$

и второй интеграл сходится как несобственный (тем более в смысле главного значения). Тогда

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{x - c} = f(c) \ln \frac{b - c}{c - a} + \int_a^b \frac{f(x) - f(c)}{x - c} dx.$$

Таким образом, если функция f непрерывна по Гельдеру на отрезке $[a, b]$, то интеграл (1.46) существует в смысле главного значения.

Замечание. Как видно из проведенного рассуждения, результат вычисления сингулярного интеграла не изменится, если положить

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{x - c} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{f(x)dx}{x - c} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{f(x)dx}{x - c} \right), \quad (1.48)$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon)$ – некоторые функции от ε и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$.

1.5.2 Общее определение интеграла в смысле главного значения.

Кратный сингулярный интеграл. Теперь пусть D есть множество в пространстве R^n одного из рассмотренных в пункте 1.1. видов: замыкание некоторой ограниченной области в пространстве R^n , кусочно-гладкая кривая на плоскости ($n = 2$) или в пространстве ($n = 3$) или кусочно-гладкая поверхность в пространстве ($n = 3$).

Пусть $F(x)$ – функция на множестве D , имеющая особенность в точке $c \in D$, причём $c \notin \partial D$ (здесь ∂D – граница множества D , если рассматривается замыкание области в пространстве R^n , множество концов кривой D , если D – кривая, край поверхности, если множество D – поверхность).

Определение 1.14. Главным значением интеграла

$$\int_D F(x)dx$$

называется предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{D \setminus U(c, \varepsilon)} F(x)dx,$$

где $U(c, \varepsilon)$ – ε -окрестность точки c в пространстве R^n .

Приведем типичный вид кратного интеграла, который сходится именно в смысле главного значения. Пусть D – замыкание некоторой ограниченной области в пространстве R^n . Рассмотрим интеграл вида

$$\int_D f(x)B(x - a)dx, \quad (1.49)$$

1.5 Сингулярный интеграл в смысле главного значения

где $f(x)$ – некоторая функция, непрерывная по Гедьдери в окрестности точки a , $a \in D \setminus \partial D$, $B(x)$ – некоторое ядро, имеющее особенность в точке $x = 0$ и удовлетворяющее условиям:

$$B \in C^1[R^n \setminus \{0\}], \quad |B(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}, \quad x \in R^n, \quad x \neq 0, \quad (1.50)$$

C – некоторая константа, не зависящая от точки x ,

$$\int_{x: r_1 < |x| < r_2} B(x) dx = 0 \quad (1.51)$$

для любых положительных r_1 и r_2 , таких, что $r_1 < r_2$.

Примером интеграла такого вида является интеграл:

$$\int_D f(x) \frac{(\vec{l}, x - a)}{|x - a|^n} dx,$$

$n = 2, 3$, $D \subset R^n$, где \vec{l} – некоторый постоянный вектор, $(\vec{l}, x - a)$ – скалярное произведение вектора \vec{l} и вектора $x - a$.

Теорема 1.13. Пусть $f(x)$ – функция, интегрируемая на множестве $D \subset R^n$, a – внутренняя точка множества D , функция f непрерывна по Гельдери в некоторой окрестности точки a .

Тогда интеграл (1.49), где функция B удовлетворяет условиям (1.50)-(1.51), существует в смысле главного значения.

Доказательство. Сначала рассмотрим интеграл

$$\int_D B(x - a) dx.$$

Пусть

$$I(r) = \int_{D \setminus U(a, r)} B(x - a) dx, \quad r > 0.$$

Найдется $R > 0$ такое, что $U(a, R) \subset D$. Тогда, в силу условия (1.51), при $r < R$ выполнено равенство:

$$I(r) - I(R) = \int_{U(a, R) \setminus U(a, r)} B(x - a) dx = \int_{y \in R^n: r < |y| < R} B(y) dy = 0.$$

Поэтому рассматриваемый интеграл существует в смысле главного значения:

$$\int_D B(x - a) dx = \lim_{r \rightarrow 0} I(r) = I(R).$$

Теперь интеграл (1.49) представим в виде:

$$\int_D f(x) B(x - a) dx = f(a) \int_D B(x - a) dx + \int_D (f(x) - f(a)) B(x - a) dx.$$

Интеграл в первом слагаемом в правой части последнего выражения сходится в смысле главного значения, как только что было

доказано. Во втором интеграле в окрестности точки a выполнена оценка

$$|(f(x) - f(a)) B(x - a)| \leq \frac{CM}{|x - a|^{n-\alpha}},$$

где C – константа из условий (1.50), $\alpha > 0$ и M – показатель и константа, с которыми функция f удовлетворяет условию Гельдера в окрестности точки a . Поэтому этот интеграл сходится как несобственный, а значит и в смысле главного значения.

Тогда и интеграл (1.49) сходится в смысле главного значения.

Теорема доказана.

Свойства сингулярных интегралов на отрезке, а также сингулярных интегралов от функций комплексной переменной по контуру на комплексной плоскости подробно изложены, например, в [30], [11]. Свойства многомерных сингулярных интегралов можно найти в [28].

1.6 Гиперсингулярный интеграл

Интегралы от функций с особенностями еще более высокого порядка, чем в случае сингулярного интеграла, понимаемого в смысле главного значения, называют гиперсингулярными интегралами. Один из способов введения таких интегралов основан на понятии "конечное значение" ("конечная часть") интеграла.

Пусть опять D есть множество в пространстве R^n одного из рассмотренных в пункте 1.1 видов: замыкание некоторой ограниченной области в пространстве R^n , кусочно-гладкая кривая на плоскости ($n = 2$) или в пространстве ($n = 3$) или кусочно-гладкая поверхность в пространстве ($n = 3$).

Рассматривается интеграл по множеству $D \subset R^n$ от функции $F(x)$, имеющей особенность в точке $c \in D$, причем $c \notin \partial D$.

Определение 1.15. *Интеграл*

$$\int_D F(x) dx$$

определен в смысле конечного значения по Адамару, если найдутся константы A и $\alpha \geq 0$, при которых существует следующий предел, принимаемый за значение интеграла:

$$\int_D F(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{D \setminus U(c, \varepsilon)} F(x) dx - \frac{A}{\varepsilon^\alpha} \right\}, \quad (1.52)$$

где $U(c, \varepsilon)$ – ε – окрестность точки c .

В данном определении если D есть замыкание некоторой ограниченной области в пространстве R^n , интеграл по множеству $D \setminus U(c, \varepsilon)$ понимается как кратный интеграл в смысле Римана. Если множество

1.6 Гиперсингулярный интеграл

D есть кривая или поверхность, интеграл по множеству $D \setminus U(c, \varepsilon)$ понимается как криволинейный или поверхностный интеграл первого рода соответственно.

Сформулированная в определении 1.15 идея введения гиперсингулярного интеграла для одномерного случая восходит к работе Ж. Адамара [1, с. 143]. Данное нами определение несколько отличается от определения, данного в указанной книге – в ней рассматривался интеграл по отрезку с особенностью на одном конце. Данное нами определение является обобщением определений, использованных в книге И.В. Бойкова (для одномерного случая) [4, с.11] и Г.М.Вайникко, И.К.Лифанова и Л.Н.Полтавского (для одномерного, двумерного и поверхностного интегралов) [5, с.12, 21].

Заметим, что если интеграл в левой части формулы (1.52) существует как несобственный или в смысле главного значения, то он существует и в смысле конечного значения по Адамару с константой $A = 0$. Однако, интеграл, определяемый формулой (1.52) может существовать и в других случаях.

Легко заметить, что если предел в левой части выражения (1.52) существует с некоторыми $A \neq 0$ и $\alpha > 0$, то эти числа единственные и значит значение интеграла определено однозначно. Действительно, если данный предел существует, также, с некоторыми другими A_1 и $\alpha_1 \geq 0$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A/\varepsilon^\alpha - A_1/\varepsilon_1^{\alpha_1}) = 0$ и $A = A_1$, $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Если предел (1.52) существует с некоторой константой A и с $\alpha = 0$, то, очевидно, этот предел существует и с любой константой A .

Поэтому потребуем дополнительно, чтобы в случае $\alpha = 0$ константа A так же выбиралась как $A = 0$ и наоборот, при $A = 0$ константа α так же выбиралась как $\alpha = 0$. В этом случае, если константы A и $\alpha \geq 0$ существуют, то они определяются однозначно, причем, если $\alpha = 0$, то мы имеем интеграл в смысле главного значения.

Как частный случай рассмотрим интеграл по отрезку вида:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx, \quad c \in (a, b). \quad (1.53)$$

Приведем некоторые наглядные соображения, исходя из которых, можно ввести такой интеграл, убедившись, что они приводят к выражению (1.52).

Во-первых, такой интеграл можно ввести по формуле

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx = \frac{d}{dc} \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx, \quad (1.54)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения. Заметим, что если $c \notin [a, b]$, то равенство (1.54) есть очевидное тождество.

Если при $c \in (a, b)$ принять формулу (1.54) за определение интеграла в левой части, то можем записать:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx &= \frac{d}{dc} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} \frac{f(x)dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f(x)dx}{x-c} \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{[a,b] \setminus U(c,\varepsilon)} \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx - \frac{f(c+\varepsilon)+f(c-\varepsilon)}{\varepsilon} \right\}, \end{aligned}$$

где перестановка дифференцирования и предела возможна для $c = c_0$, если последний предел существует в смысле равномерной сходимости по параметру c для значений этого параметра в некоторой окрестности точки c_0 . Не рассматривая пока вопрос о наличии такой равномерной сходимости, заметим, что если функция f непрерывно дифференцируема в окрестности точки c , то

$$f(c + \varepsilon) + f(c - \varepsilon) = 2f(c) + \delta(\varepsilon), \text{ где } \delta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тогда мы получаем формулу

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{[a,b] \setminus U(c,\varepsilon)} \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx - \frac{2f(c)}{\varepsilon} \right\}. \quad (1.55)$$

Последняя формула есть частный случай общей формулы (1.52) с $A = 2f(c)$, $\alpha = 1$.

Условия существования такого предела для данного случая мы увидим, рассмотрев другой способ введения интеграла (1.53).

Интеграл (1.53) можно ввести, записав формально формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx = \frac{f(a)}{c-a} - \frac{f(b)}{c-b} + \int_a^b \frac{f'(x)}{x-c} dx. \quad (1.56)$$

Эта формула является естественной с точки зрения теории обобщенных функций.

Возьмем в качестве основных (тестовых) функций пространство функций $f \in C^\infty[a, b]$, каждая из которых удовлетворяет условию $f(x) = 0$ в некоторых окрестностях точек a и b . Один из способов введения обобщенных функций состоит в трактовке таких функций как линейных функционалов над пространством основных функций (при этом для основных функций вводится еще и понятие сходимости последовательности, а от линейных функционалов – обобщенных, функций требуется непрерывность, но для нашего рассмотрения этот аспект не принципиален) [22, глава 4, §4]. Каждой обычной функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[a, b]$, можно поставить в соответствие регулярный функционал g , действие которого на основную функцию f определяется формулой

$$(g, f) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

1.6 Гиперсингулярный интеграл

При этом, если функция g имеет интегрируемую производную, то

$$(g', f) \equiv \int_a^b f(x)g'(x)dx = - \int_a^b g(x)f'(x)dx \equiv -(g, f').$$

Для произвольной обобщенной функции g соотношение

$$(g', f) = -(g, f') \quad (1.57)$$

можно рассматривать как определение производной обобщенной функции.

Теперь рассмотрим обобщенную функцию g , действующую по формуле:

$$(g, f) = - \int_a^b \frac{f(x)}{x-c} dx,$$

где c – фиксированная точка на интервале (a, b) , интеграл понимается в смысле главного значения. Эту функцию g можно ассоциировать с обычной функцией

$$g \leftrightarrow -\frac{1}{x-c}.$$

Теперь если производную g' этой функции (по переменной x) ассоциировать с функцией

$$g' \leftrightarrow -\left(\frac{1}{x-c}\right)' = \frac{1}{(x-c)^2},$$

то интеграл (1.53) можно трактовать как действие функционала, порождаемого функцией g' :

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx = (g', f).$$

Далее, используя определение производной обобщенной функции (1.57) имеем:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx = -(g, f') = \int_a^b \frac{f'(x)}{x-c} dx.$$

Таким образом, мы пришли к формуле (1.56) в частном случае при условии $f(a) = f(b) = 0$.

Теперь вернемся к формуле (1.56). Возьмем ее за определение интеграла в левой части для произвольной функции f , имеющей непрерывную по Гельдеру производную на отрезке $[a, b]$. Тогда можем записать:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{(x-c)^2} dx = \frac{f(a)}{x-a} - \frac{f(b)}{x-b} + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} \frac{f'(x)}{x-c} dx + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{f'(x)}{x-c} dx \right\}. \quad (1.58)$$

При этом предел справа существует. Интегрируя по частям, каждый из интегралов под знаком предела, опять приходим к формуле (1.55). При этом существование предела в формуле (1.55) теперь следует из существования предела в формуле (1.58), причем, несложно показать, что этот предел существует в смысле равномерной сходимости по параметру c на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.

Пример. Для примера вычислим интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx.$$

Применяя формулу (1.56), в которой полагаем $c = 0$, $f(x) \equiv 1$, получаем:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = - \left. \frac{1}{x} \right|_{x=-1}^1 = -2.$$

Заметим, что в данном случае применение конструкции интеграла в смысле конечного значения по Адамару, равносильной формуле (1.56), приводит, по сути, к формальному применению классической формулы Ньютона-Лейбница: в последней формуле мы взяли разность значений первообразной функции $1/x^2$ в концах отрезка интегрирования.

Обратим внимание и на то, что в данном примере интеграл от положительной функции по отрезку отрицателен. Здесь мы видим существенное отличие интеграла в смысле конечного значения по Адамару от классического интеграла по отрезку.

1.7 Приложение к главе 1

Мы ввели единообразное определение 1.7 для несобственных интегралов по ограниченным множествам разных типов.

Напомним, что для функции одной переменной вводится понятие несобственного интеграла 2-го рода по отрезку случая, когда функция, определена на отрезке, за исключением одного из концов [20, глава 9, дополнение 1, §2], [18, глава 4, §5, п.1].

Определение 1*. Пусть функция f определена и непрерывна на полуинтервале $[a, b)$. Несобственным интегралом 2-го рода от такой функции называется интеграл:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Соответственно для функции f , определенной и непрерывной на полуинтервале $(a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

При этом интеграл называется сходящимся, если указанный предел существует.

Если функция определена на отрезке $[a, b]$ и имеет особенность в точке $c \in (a, b)$, то считается, что

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где оба интеграла в правой части понимаются как несобственные интегралы второго рода в смысле определения 1*. Этот интеграл считается сходящимся, если оба интеграла в правой части существуют.

Для кратных интегралов понятие несобственного интеграла обычно вводится через понятие исчерпания множества [21, глава 3, §8, п.1], [19, глава 11, §6, п.1].

Определение 2*. Пусть E – измеримое множество в пространстве R^n , $n \geq 1$. Система измеримых множеств $\{E_k\}$ называется исчерпанием множества E , если выполнены условия: $E_k \subset E_{k+1} \subset E$ при любом натуральном k и $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$.

Как показано в [19, глава 11, §6, п.1], если система измеримых множеств $\{E_k\}$ есть исчерпание измеримого множества E , то $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) = \mu(E)$, здесь $\mu(\cdot)$ – мера Жордана множества.

Определение 3*. Пусть $\{E_k\}$ – исчерпание измеримого множества E и пусть функция u интегрируема на каждом из множеств E_k . Тогда положим

$$\int_E u(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} u(x)dx, \quad (1.59)$$

Если указанный предел существует и его значение не зависит от выбора такого исчерпания, то значение предела называется значением несобственного интеграла от функции u по множеству E .

Теперь пусть D – замыкание некоторой ограниченной области в пространстве R^n , функция u определена на множестве $E = D \setminus \{a\}$, где a – некоторая точка множества D , и предположим, что для любой измеримой окрестности $U(a)$ точки a функция u интегрируема на множестве $D \setminus U(a)$.

Докажем, что в этом случае справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1*. *Интегралы (1.59) в смысле определения 3* и интеграл (1.17) в смысле определения 1.7 существуют или не существуют одновременно.*

Для доказательства утверждения 1* сначала докажем следующее свойство:

интеграл (1.17) сходится в смысле определения 1.7 тогда и только тогда, когда для любой последовательности $U_k(a)$ измеримых окрестностей точки a таких, что их диаметры h_k удовлетворяют условию $h_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, существует предел

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D \setminus U_k(a)} u(x) dx, \quad (1.60)$$

не зависящий от выбора такой последовательности.

Действительно, если интеграл (1.17) сходится в смысле определения 1.7, и I есть значение этого интеграла, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $h_0 > 0$, что для любой окрестности $U(a)$ диаметр которой h удовлетворяет условию $h < h_0$, выполнена оценка

$$\left| \int_{D \setminus U(a)} u(x) dx - I \right| < \varepsilon.$$

Но тогда если $\{U_k(a)\}$ – система измеримых окрестностей точки a таких, что их диаметры h_k удовлетворяют условию $h_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то найдется k_0 такое, что при $k > k_0$ выполнено условие $h_k < h_0$, а значит

$$\left| \int_{D \setminus U_k(a)} u(x) dx - I \right| < \varepsilon.$$

Но тогда выполнено равенство (1.60).

Наоборот, пусть для любой последовательности $U_k(a)$ измеримых окрестностей точки a таких, что их диаметры h_k удовлетворяют условию $h_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, существует предел (1.60). Допустим, что при этом не выполнено условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{D \setminus U(a)} u(x) dx = I,$$

где h – диаметр окрестности $U(a)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого натурального k существует окрестность $U_k(a)$ с диаметром $h_k < 1/k$ такая, что

$$\left| \int_{D \setminus U_k(a)} u(x) dx - I \right| > \varepsilon.$$

Но тогда для построенной последовательности окрестностей $U_k(a)$ условие (1.60) не выполнено. Мы получили противоречие. Тем самым свойство доказано.

Доказательство утверждения 1*. А) Пусть интеграл (1.59) существует и

$$\int_E u(x)dx = I$$

в смысле определения 3*.

Для любой системы $U_k(a)$ измеримых окрестностей точки a таких, что их диаметры h_k удовлетворяют условию $h_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, множества $E_k(a) = D \setminus U_k(a)$ образуют исчерпание множества $E = D \setminus \{a\}$. Значит, выполнено равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D \setminus U_k(a)} u(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} u(x)dx = I$$

и интеграл (1.17) существует в смысле определения 1.7.

Б) Пусть, наоборот,

$$\int_D u(x)dx = I$$

в смысле определения 1.7. Пусть $\{E_k\}$ – некоторая система измеримых множеств, являющаяся исчерпанием множества $E = D \setminus \{a\}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и докажем, что при достаточно большом значении k выполнено неравенство

$$\left| \int_{E_k} u(x)dx - I \right| < \varepsilon. \quad (1.61)$$

В силу определения 1.7 найдется такое $r > 0$ что для любой окрестности $U(a)$ точки a , диаметр которой $h \leq r$, выполнено неравенство

$$\left| \int_{D \setminus U(a)} u(x)dx - I \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Возьмем окрестность $W = \{x | |x - a| < r\}$ и пусть $E^r = D \setminus W$, $E_k^r = E_k \setminus W$. Множества $\{E_k^r\}$ образуют исчерпание множества E^r . Значит $\mu(E^r) - \mu(E_k^r) = \mu(E^r \setminus E_k^r) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Функция u интегрируема на множестве E^r , а, значит, ограничена на нем. Поэтому, найдется номер k_r такой, что

$$\left| \int_{E^r \setminus E_k^r} u(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } k \geq k_r.$$

Теперь интеграл по множеству E_k представим в виде

$$\int_{E_k} u(x)dx = \int_{E_k^r} u(x)dx + \int_{W \cap E_k} u(x)dx, \quad (1.62)$$

$$\int_{E_k^r} u(x)dx = \int_{D \setminus W} u(x)dx - \int_{E^r \setminus E_k^r} u(x)dx,$$

причем, в последнем равенстве второй интеграл справа по модулю меньше, чем $\varepsilon/3$.

Далее, при каждом k функция $u(x)$ интегрируема на множестве E_k , а, значит, ограничена на нем. Тогда найдется окрестность V_k точки a , такая, что $V_k \subset V$ и

$$\left| \int_{E_k \cap V_k} u(x)dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь представим последний интеграл из формулы (1.62) в виде:

$$\int_{W \cap E_k} u(x)dx = \int_{V_k \cap E_k} u(x)dx + \int_{(W \cap E_k) \setminus V_k} u(x)dx.$$

Поскольку множество E_k измеримо, его граница имеет меру нуль и, поэтому,

$$\int_{(W \cap E_k) \setminus V_k} u(x)dx = \int_{(W \cap \overline{E_k}) \setminus V_k} u(x)dx,$$

где $\overline{E_k}$ – замыкание множества E_k .

Остается заметить, что $(W \cap \overline{E_k}) \setminus V_k = W \setminus H_k$, где $H_k = V_k \cup (W \setminus \overline{E_k})$ – есть некоторая окрестность точки a , диаметр которой не больше r .

Теперь, учитывая, что $(D \setminus W) \cup (W \setminus H_k) = D \setminus H_k$, можем записать:

$$\int_{E_k} u(x)dx = \int_{D \setminus H_k} u(x)dx - \int_{E^r \setminus E_k^r} u(x)dx + \int_{V_k \cap E_k} u(x)dx.$$

Но тогда при $k \geq k_r$ имеем оценку:

$$\left| \int_{E_k} u(x)dx - I \right| \leq \left| \int_{D \setminus H_k} u(x)dx - I \right| + \left| \int_{E^r \setminus E_k^r} u(x)dx \right| + \left| \int_{V_k \cap E_k} u(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали равенство (1.60), а значит интеграл сходится в смысле определения 3*. Утверждение доказано.

Мы показали, что введенное нами определение несобственного интеграла согласуется с определением 3*. Однако, возникающая при таких определениях конструкция несобственного интеграла имеет

одно существенное отличие от конструкции несобственного интеграла 2-го рода на отрезке, вводимой определением 1*. Дело в том, что для интеграла в смысле определения 3* (а значит и в смысле определения 1.7) можно доказать, что интегралы

$$\int_D u(x) dx \text{ и } \int_D |u(x)| dx \quad (1.63)$$

существуют или не существуют одновременно. То, что из существования второго из записанных интегралов следует существование первого, мы доказываем в основной части курса и это доказательство, по сути, повторяет стандартное доказательство аналогичного свойства для интеграла второго рода на отрезке. А вот обратное утверждение для интеграла второго рода в смысле определения 1* не верно, как известно из курсов математического анализа. В случае, когда первый интеграл сходится, а второй расходится, говорят, что первый интеграл сходится условно.

Заметим, что можно построить определение несобственного кратного интеграла, для которого в одномерном случае условно сходящиеся интегралы восстанавливаются в правах. Для этого нужно в определении 3* потребовать дополнительно, что рассматриваются только исчерпания множества E открытыми связными множествами E_k . Требование связности оказывается существенным в одномерном случае, и мы получаем определение, равносильное определению 1* несобственного интеграла 2-го рода. А вот в случае кратных интегралов в пространстве R^n при $n \geq 2$ оба интеграла (1.63) существуют или не существуют одновременно. Подробно эти вопросы рассмотрены, например, в [21, глава 3, §8, п.3, теорема 3.12], .

В нашем курсе нас будет интересовать абсолютная сходимости интегралов (случай, когда сходится интеграл от модуля функции). Для доказательства абсолютной сходимости интеграла от функции, имеющей особенность в одной точке, удобна конструкция, даваемая определением 1.7, которая собственно и дается в курсе. Заметим, также, что определение 3* несобственного интеграла, исключающее существование условно сходящихся интегралов, используется в [19, глава 11, §6, п.1].

Глава 2

Основные формулы теории потенциала

В этой главе рассмотрим основные интегральные формулы, которые позволяют строить интегральные представления функций.

2.1 Основные интегральные теоремы

В этом разделе напомним без доказательства некоторые интегральные формулы математического анализа (см. [21, глава 6, §3], [19, глава 13, §3]).

Пусть D есть замыкание ограниченной области в пространстве \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, граница которой ∂D есть кусочно-гладкая замкнутая поверхность ∂D при $n = 3$ или кусочно-гладкая замкнутая кривая при $n = 2$.

Будем обозначать D^{in} – множество внутренних точек множества D , которое является ограниченной областью по сделанному предположению.

Напомним, что функция f удовлетворяет условию $f \in C^k[D^{in}]$, $k = 0, 1, 2, \dots$ если эта функция и все ее частные производные до порядка k включительно существуют и непрерывны в области D^{in} (при $k = 0$ требуется только непрерывность самой функции в области D^{in}).

Функция f удовлетворяет условию $f \in C^k[D]$, если $f \in C^k[D^{in}]$ и в каждой точке $x \in \partial D$ функция f и каждая ее частная производная до порядка k включительно имеют предел в этой точке.

Теорема 2.1. (Формула Остроградского-Гаусса). Пусть $\vec{f}(x) \equiv (f_1(x), \dots, f_n(x))$ – векторное поле, определенное на множестве D , компоненты которого удовлетворяют условию $f_i(x) \in C^1[D]$. Тогда

$$\int_D \operatorname{div} \vec{f} \, dx = \int_{\partial D} (\vec{f}(x), \vec{n}(x)) \, dx, \quad (2.1)$$

2.1 Основные интегральные теоремы

где $\vec{n}(x)$ – единичный вектор внешней нормали на поверхности (кривой) ∂D , интеграл в правой части понимается как поверхностный интеграл 1-го рода при $n = 3$, как криволинейный интеграл 1-го рода при $n = 2$, (\cdot, \cdot) – скалярное произведение.

Замечание. В курсах математического анализа обычно доказывается формула (2.1) для случаев, когда множество D имеет определенный вид (см. [19, глава 13, §3, п.2]).

Назовем множество D цилиндрическим по оси Ox_3 , если его можно задать как множество точек $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ таких, что

$$\varphi_{3\min}(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \varphi_{3\max}(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in V_3,$$

V_3 – замыкание измеримой области на плоскости, $\varphi_{3\min}$ и $\varphi_{3\max}$ – функции на множестве V_3 , от которых требуется непрерывность вторых производных. Это означает, что множество D ограничено по оси Ox_3 графиками двух функций.

Теорема 2.1 доказывается для множества D , которое является цилиндрическим по всем осям. Так же эта формула верна для множества D , которое допускает разбиение на систему множеств, каждое из которых является цилиндрическим по всем осям. Такие множества, как шар, эллипсоид, тетраэдр, параллелепипед, призма относятся к указанному классу.

Что бы не вдаваться в вопрос о необходимых и достаточных условиях применимости формулы Остроградского Гаусса, в нашем курсе будем рассматривать области с кусочно-гладкой границей, для которых эта формула верна. При этом мы докажем большое количество формул и свойств, которые, в конечном итоге опираются на формулу Остроградского Гаусса, а значит, так же будут верны.

Следствием формулы (2.1) является следующая формула для скалярной функции $f(x) \in C^1[D]$

$$\int_D \operatorname{grad} f \, dx = \int_{\partial D} f(x) \vec{n}(x) \, dx. \quad (2.2)$$

Для доказательства этой формулы домножим интеграл в левой части данного равенства на произвольный постоянный вектор \vec{a} :

$$\left(\vec{a}, \int_D \operatorname{grad} f \, dx \right) = \int_D (\vec{a}, \operatorname{grad} f) \, dx = \int_D \operatorname{div} (\vec{a} f) \, dx.$$

Применяя формулу (2.1), имеем:

$$\left(\vec{a}, \int_D \operatorname{grad} f \, dx \right) = \int_{\partial D} (\vec{a} f(x), \vec{n}(x)) \, dx = \left(\vec{a}, \int_{\partial D} f(x), \vec{n}(x) \, dx \right).$$

В силу произвольности вектора \vec{a} данное равенство равносильно равенству (2.2)

Еще одним следствием формулы (2.1) является формула для векторного поля $\vec{f}(x) \equiv (f_1(x), \dots, f_3(x))$, $f_i(x) \in C^1[D]$:

$$\int_D \operatorname{rot} \vec{f} \, dx = \int_{\partial D} \vec{n} \times \vec{f} \, dx. \quad (2.3)$$

Для доказательства этой формулы опять домножим интеграл в левой части данного равенства на произвольный постоянный вектор \vec{a} . При этом используем формулу векторного анализа

$$\operatorname{div} [\vec{f} \times \vec{a}] = \vec{a} \operatorname{rot} \vec{f} - \vec{f} \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{a} \operatorname{rot} \vec{f}$$

(последнее при $\vec{a} = \operatorname{const}$). Тогда

$$\vec{a} \int_D \operatorname{rot} \vec{f} dx = \int_D (\vec{a}, \operatorname{rot} \vec{f}) dx = \int_D \operatorname{div} (\vec{f} \times \vec{a}) dx.$$

Применяя формулу (2.1) получаем:

$$\vec{a} \int_D \operatorname{rot} \vec{f} dx = \int_{\partial D} \vec{n} [\vec{f} \times \vec{a}] dx = \vec{a} \int_{\partial D} [\vec{n} \times \vec{f}] dx$$

и в силу произвольности вектора \vec{a} получаем формулу (2.3).

Теперь пусть Σ - кусочно-гладкая поверхность с краем $\partial\Sigma$.

Сначала предположим, что Σ - элементарная гладкая поверхность (см. определение 1.3), причем эта поверхность ориентирована (т.е. на ней задан орт вектора нормали, непрерывно зависящий от точки поверхности). В каждой точке x на контуре $\partial\Sigma$, являющейся точкой гладкости этого контура, введем положительный единичный вектор касательной $\vec{\tau}(x)$.

При этом ориентация вектора касательной к краю $\vec{\tau}(x)$ считается согласованной с ориентацией поверхности, если при движении вдоль контура $\partial\Sigma$ в направлении вектора $\vec{\tau}$ так, что вектор нормали направлен вверх, поверхность остается слева. Математически это можно сформулировать следующим образом. Построим в каждой точке $x \in \partial\Sigma$ вектор $\vec{b}(x) = \vec{\tau}(x) \times \vec{n}(x)$. Этот вектор $\vec{b}(x)$, так же, как и вектор $\vec{\tau}(x)$, лежит в касательной плоскости к поверхности, но при этом направлен по нормали к контуру $\partial\Sigma$. Ориентация векторов $\vec{n}(x)$ и $\vec{\tau}(x)$ является согласованной, если вектор $\vec{b}(x)$ направлен наружу от поверхности.

Теперь пусть Σ - кусочно-гладкая поверхность с краем $\partial\Sigma$, состоящая из конечного числа элементарных компонент (см. определение 1.4). Кусочно-гладкую поверхность будем считать ориентированной, если:

- все ее компоненты ориентированы,
- на краю каждой компоненты построено поле касательных векторов согласованное с полем вектора нормали,
- ориентации всех компонент согласованы между собой так, что если некоторая точка одновременно является точкой края для двух компонент, то векторы касательной для этих компонент в этой точке противоположно направлены.

Теорема 2.2. (Формула Стокса). Пусть Σ - кусочно-гладкая поверхность с краем $\partial\Sigma$, $\partial\Sigma$ - кусочно-гладкая замкнутая кривая, $\vec{f}(x) \equiv (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ - векторное поле, определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности поверхности Σ

2.1 Основные интегральные теоремы

(включая саму поверхность). Тогда

$$\int_{\Sigma} \vec{n} \operatorname{rot} \vec{f} dx = \int_{\partial\Sigma} \vec{f}(x) \vec{\tau}(x) ds. \quad (2.4)$$

Напомним, что интеграл в правой части формулы (2.4) называют циркуляцией вектора \vec{f} по контуру $\partial\Sigma$.

Аналогом формулы Стокса для случая на плоскости является формула Грина. Пусть D – замыкание некоторой ограниченной области на плоскости, границей которой является замкнутая кусочно-гладкая кривая ∂D .

Теорема 2.3. (Формула Грина для циркуляции вектора). Пусть $\vec{f}(x) \equiv (f_1(x), f_2(x))$, $x = (x_1, x_2) \in D$, – векторное поле, определенное и непрерывно дифференцируемое на множестве D (включая его границу). Тогда

$$\int_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx = \int_{\partial D} \vec{f}(x) \vec{\tau}(x) ds, \quad (2.5)$$

где $\vec{\tau}(x)$ – единичный вектор касательной на контуре ∂D , выбираемый так, что при движении вдоль контура в направлении вектора $\vec{\tau}(x)$ множество D остается слева.

Поясним связь формул Стокса и Грина, а заодно введем понятие "двумерного ротора" векторного поля.

Пусть $\vec{f}(x) \equiv (f_1(x), f_2(x))$, $x = (x_1, x_2)$ – векторное поле на плоскости (в некоторой области на плоскости). Мы можем предположить, что плоскость, на которой рассматривается это поле, лежит в пространстве, являясь координатной плоскостью Ox_1x_2 декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$. Тогда можно предположить, что рассматриваемое поле \vec{f} есть проекция на плоскость Ox_1x_2 плоскопараллельного трехмерного поля \vec{f}^* вида

$$\vec{f}^* \equiv (f_1^*, f_2^*, 0),$$

где

$$f_1^*(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1, x_2), \quad f_2^*(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_1, x_2)$$

(при этом $\partial f_1^*/\partial x_3 = 0$, $\partial f_2^*/\partial x_3 = 0$).

Теперь имеем

$$\operatorname{rot} \vec{f}^* \equiv (0, 0, \omega(x_1, x_2)),$$

где

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}. \quad (2.6)$$

Скалярную функцию $\omega(x_1, x_2)$, определяемую формулой (2.6), будем называть ротором векторного поля \vec{f} и обозначать $\omega = \operatorname{rot} \vec{f}$.

Если теперь предположить, что множество D в теореме 2.3 есть поверхность в трехмерном пространстве, лежащая на координатной плоскости Ox_1x_2 и применить к соответствующему полю $\vec{f}^* \equiv (f_1^*, f_2^*, 0)$ формулу Стокса (2.4), получим формулу (2.5).

2.2 Формулы Грина для дифференциального оператора

Пусть, как и в предыдущем пункте, D есть замыкание ограниченной области в пространстве \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, граница которой ∂D есть кусочно-гладкая замкнутая поверхность ∂D при $n = 3$ или кусочно-гладкая замкнутая кривая при $n = 2$.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu,$$

в котором аргументом является функция $u \in C^2[D]$, а $p(x) \in C^1[D]$ и $q \in C[D]$ – некоторые заданные функции.

Отметим, что такой оператор встречается в теории эллиптических уравнений, где дополнительно требуют выполнения условий: $q(x) \geq 0$, $p(x) > 0$ при всех $x \in D$. При выполнении этих условий введенный оператор называют эллиптическим. Но для нас, в приводимых ниже теоремах, эти условия будут не существенны.

Теорема 2.4. (1-я формула Грина). Для любых двух функций $u, v \in C^2[D]$ справедлива формула:

$$\int_D (Lu)v \, dx = - \int_D [p(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + quv] \, dx + \int_{\partial D} p \frac{\partial u}{\partial n} v \, dx. \quad (2.7)$$

Доказательство. Для доказательства формулы (2.7) достаточно записать подынтегральное выражение в виде:

$$\begin{aligned} (Lu)v &= [\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu]v = v \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - quv = \\ &= \operatorname{div}(vp \operatorname{grad} u) - p(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) - quv \end{aligned}$$

и заметить, что по формуле Остроградского – Гаусса (2.1) выполнено равенство:

$$\int_D \operatorname{div}(vp \operatorname{grad} u) \, dx = \int_{\partial D} vp(\operatorname{grad} u, \vec{n}) \, dx = \int_{\partial D} pv \frac{\partial u}{\partial n} \, dx.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.5. (2-я формула Грина). Для любых двух функций $u, v \in C^2[D]$ справедлива формула:

$$\int_D (Lu)u \, dx = \int_D (Lv)u \, dx + \int_{\partial D} p \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u \right) \, dx, \quad (2.8)$$

Доказательство. Для доказательства формулы (2.8) достаточно записать формулу (2.7) для пары функций v, u , поменяв их ролями:

$$\int_D (Lv)u \, dx = - \int_D [p(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + quv] \, dx + \int_{\partial D} p \frac{\partial v}{\partial n} u \, dx.$$

Вычитая из правой и левой частей формулы (2.7) правую и левую части последней формулы, легко получить формулу (2.8).

Теорема доказана.

2.3 Уравнения Лапласа, Пуассона, Гельмгольца. Потенциалы

Далее в нашем курсе мы будем рассматривать краевые задачи для уравнений Лапласа, Пуассона и Гельмгольца. А в этом разделе введем понятие потенциала точечного заряда, объемного и поверхностных потенциалов для этих уравнений.

Напомним, что уравнение

$$\Delta u = f \quad (2.9)$$

относительно неизвестной функции $u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где f – заданная правая часть называется уравнением Пуассона. Здесь

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

– оператор Лапласа.

Однородное уравнение Пуассона

$$\Delta u = 0 \quad (2.10)$$

называется уравнением Лапласа.

Уравнение

$$\Delta u + k^2 u = f, \quad (2.11)$$

где k – некоторая константа, называется уравнением Гельмгольца.

Рассмотрим уравнение Лапласа. Потенциалом точечного заряда, размещенного в начале координат, для уравнения Лапласа (2.10) называют функцию

$$F(x) = \frac{1}{4\pi r}, \quad \text{где } r = |x| \text{ в трехмерном случае } (x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3), \quad (2.12)$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad \text{где } r = |x| \text{ в двумерном случае } (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2). \quad (2.13)$$

Эта функция замечательна тем, что она является решением уравнения Лапласа в любой точке $x \neq 0$, зависящим только от $|x|$, т.е. представляющееся в виде

$$u(x) = \varphi(r), \quad r = |x| \in (0, \infty). \quad (2.14)$$

При этом в курсах математической физики доказывается, что уравнение Лапласа имеет ровно два линейно независимых решения вида (2.14), одно из которых константа, а второе можно выбрать в виде (2.12) (или (2.13) на плоскости).

Для уравнения Гельмгольца (2.11) с правой частью $f = 0$ в трехмерном случае при $k \neq 0$ можно построить 2 линейно независимых решения вида (2.14):

$$u(x) = \frac{\sin kr}{r} \text{ и } u(x) = \frac{\cos kr}{r}, \quad r = |x| \in (0, \infty), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Уравнение Гельмгольца (2.11) обычно рассматривают в классе функций $u(x)$, имеющих комплексные значения. Т.е. рассматривают

функции вида $u(x) = u_1(x) + iu_2(x)$, где i – мнимая единица, $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – действительные функции, при этом считается, что

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_k} + i \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_k}, \quad \Delta u(x) = \Delta u_1(x) + i\Delta u_2(x).$$

При этом и функция f и параметр k также могут иметь комплексные значения. В связи с этим обычно в качестве потенциала точечного заряда для уравнения Гельмгольца в трехмерном случае выбирают функцию

$$F(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \text{где } r = |x|, \quad (2.15)$$

или

$$F(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad \text{где } r = |x|. \quad (2.16)$$

Здесь нужно сделать важное замечание о выборе параметра k . Уравнение Гельмгольца рассматривают как с действительным, так и с комплексным значением параметра k . В уравнение параметр k входит только в сочетании k^2 . Это означает, что в действительности k есть одно из решений уравнения $z = k^2$, а всего этих решений 2 – они есть противоположные числа. При использовании формулы (2.15) для фундаментального решения параметр k следует выбрать так, чтобы выполнялось условие $\text{Im}k \geq 0$. Тогда функция

$$e^{ikr} = e^{i(\text{Re}k)r} e^{-(\text{Im}k)r}$$

ограничена при $r \rightarrow \infty$.

Если параметр $k \neq 0$ – действительное число, то выполнены оценки

$$|F(x)| \leq O\left(\frac{1}{r}\right), \quad |\text{grad}F(x)| \leq O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |x - y|, \quad (2.17)$$

где $O(1/r)$ – некоторая величина того же порядка малости при $r \rightarrow \infty$, что и $1/r$. Заметим, что если k мнимое и $\text{Im}k \geq 0$ то для функции F вида (2.15) оценки (2.17) так же выполнены, но в действительности функция F и ее градиент затухают на бесконечности быстрее любой положительной степени $1/r$.

Выбор вида решения (2.15) или (2.16) делается на основании согласования с определенными условиями, которые ставятся на решение на бесконечности (так называемыми условиями излучения). В дальнейшем, рассматривая краевые задачи для уравнения Гельмгольца в неограниченной области, мы будем ставить условия излучения Зоммерфельда:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - ik u = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad (2.18)$$

где $\partial u(x)/\partial |x|$ – производная в направлении орта радиус вектора точки x :

$$\frac{\partial u(x)}{\partial |x|} = \left(\frac{x}{|x|}, \text{grad} u(x) \right),$$

$o(r^{-1})$ – величина более высокого порядка малости, чем r^{-1} . Можно, также ставить условие вида

$$\frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + iku = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

Несложно показать, что при действительном положительном значении параметра k потенциал (2.15) удовлетворяет условию (2.18), а потенциал (2.16) условию (2.19). В дальнейшем мы будем в нашем курсе рассматривать условия (2.18) и потенциал точечного заряда вида (2.15).

Заметим, что при комплексном значении волнового числа и при условии $\text{Im}k \geq 0$ условия (2.18) также выполнены для функции (2.15).

В плоском случае потенциалом точечного заряда для уравнения Гельмгольца в случае условий на бесконечности (2.18) называют функцию

$$F(x) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x|), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (2.20)$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода. Функция $F(x)$, определяемая формулой (2.20), удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца при всех $x \neq 0$ и условию (2.18) на бесконечности. Так же отметим, что для этой функции выполнена асимптотика в окрестности точки $x = 0$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} + F^*(x), \quad F^*(x) = x^2 \ln \frac{1}{|x|} F_1(x) + F_2(x), \quad (2.21)$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – функции, аналитические в окрестности точки $x = 0$. При этом функция $F^*(x)$ непрерывно-дифференцируема в окрестности точки $x = 0$, если доопределить $F^*(0) = F_2(0)$, $F'^*(0) = F_2'(0)$ (см., например, [31, формулы (12) и (14)]).

Функцию $F(x-q)$ будем называть потенциалом точечного заряда, сосредоточенным в точке $q \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 2.1. *Если функция $F(x)$ удовлетворяет оценкам (2.17) и условию (2.18), то функция $u(x) = F(x-q)$, q – произвольная точка, так же удовлетворяет условию (2.18).*

Доказательство. В данном случае

$$\frac{\partial u(x)}{\partial |x|} = \left(\frac{x}{|x|}, \text{grad} F(x-q) \right) = \left(\frac{x-q}{|x-q|}, \text{grad} F(x-q) \right) \frac{|x-q|}{|x|}$$

Заметим, что

$$\frac{|x-q|}{|x|} = 1 + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\left(\frac{x-q}{|x-q|}, \text{grad} F(x-q) \right) = \frac{\partial F(x-q)}{\partial |x-q|} = -ikF(x-q) + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

откуда легко получить требуемую оценку (2.18) для функции $u(x)$.

Лемма доказана.

Пусть D – замыкание некоторой ограниченной области в пространстве \mathbb{R}^n , $\rho(x)$ – непрерывная функция на замыкании области D . Функция

$$u(x) = \int_D \rho(y)F(x-y)dy \quad (2.22)$$

называется объемным потенциалом заряда, распределенного с плотностью ρ .

Пусть в трехмерном случае ($n = 3$) Σ есть гладкая или кусочно-гладкая ограниченная поверхность без самопересечений класса C^m , $m \geq 2$, которая может быть замкнутой или разомкнутой.

В двумерном случае ($n = 2$) пусть Σ есть гладкая или кусочно-гладкая ограниченная кривая без самопересечений класса C^m , $m \geq 2$, которая также может быть замкнутой или разомкнутой.

При этом предполагается, что кривая ($n = 2$) или поверхность ($n = 3$) Σ является ориентированной и в каждой ее точке гладкости $x \in \Sigma$ задан орт положительного вектора нормали $\vec{n} = \vec{n}(x)$.

Будем также считать, что Σ есть замкнутое множество. Это означает, что в случае разомкнутой кривой мы считаем, что все она содержит свои концы, а в случае разомкнутой поверхности с краем, она содержит все точки края. При этом условии разность $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ есть открытое множество.

Потенциалами простого и двойного слоя называются функции, определяемые следующими формулами соответственно:

$$V_{\Sigma}[\nu_1](x) = \int_{\Sigma} \nu_1(y)F(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma, \quad (2.23)$$

$$U_{\Sigma}[\nu_2](x) = \int_{\Sigma} \nu_2(y)\partial F(x-y)/\partial n_y dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma, \quad (2.24)$$

где F есть потенциал точечного заряда (для соответствующего уравнения), ν_1, ν_2 – плотности потенциалов простого и двойного слоя, которые предполагаются абсолютно интегрируемыми функциями на поверхности (кривой) Σ , производная $\partial/\partial n_y$ есть производная по направлению вектора $\vec{n} = \vec{n}(y)$, которая вычисляется по координатам точки y , интегралы понимаются как криволинейные ($n = 2$) или поверхностные ($n = 3$) интегралы первого рода по переменной y .

Заметим, что потенциал простого слоя можно с физической точки зрения трактовать как скалярное поле, являющееся суперпозицией полей, индуцируемых точечными зарядами, распределенными по поверхности Σ с плотностью ν_1 .

Потенциал двойного слоя связан с понятием «диполя». Напомним, что потенциалом диполя, размещенного в точке y и имеющего ось в направлении единичного вектора \vec{l} , называют, функцию:

$$u(x) = \frac{\partial F(x-y)}{\partial l_y},$$

2.3 Уравнения Лапласа, Пуассона, Гельмгольца.

Потенциалы

где производная $\partial/\partial l_y$ есть производная по направлению вектора \vec{l} , вычисляемая по координатам точки y .

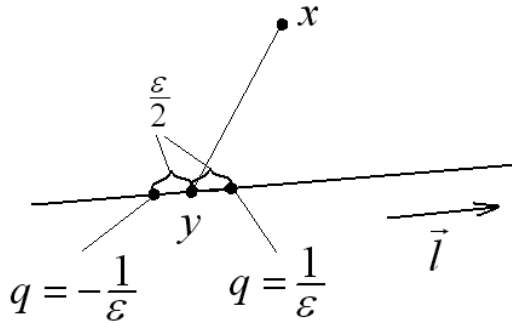


Рис. 2.1: Потенциал диполя

Термин «диполь» возник из тех соображений, что по определению производной по направлению можем записать:

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} F(x - (y + \varepsilon \vec{l}/2)) - \frac{1}{\varepsilon} F(x - (y - \varepsilon \vec{l}/2)) \right).$$

Выражение под знаком предела есть сумма потенциалов точечных зарядов противоположных знаков с большими по модулю интенсивностями $1/\varepsilon$ и $-1/\varepsilon$, расположенных в точках $y + \varepsilon \vec{l}/2$ и $y - \varepsilon \vec{l}/2$ соответственно (т.е. на малом расстоянии $\varepsilon/2$ от точки y вдоль оси, определяемой вектором \vec{l} по разные стороны от точки y).

Сразу приведем некоторые очевидные свойства введенных потенциалов.

Выражение (2.22) можно дифференцировать бесконечное число раз под знаком интеграла по переменной x при условии, что точка x лежит вне множества D . Поэтому в такой точке потенциал объемного заряда, определяемый выражением (2.22) удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (2.25)$$

(уравнению Лапласа при $k = 0$). Действительно:

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = \int_D \rho(y) \{ \Delta_x F(x - y) + k^2 F(x - y) \} dy = 0.$$

Точно также выражения для поверхностных потенциалов (2.23) и (2.24) можно дифференцировать бесконечное число раз под знаком интеграла по переменной x при условии, что точка x лежит вне поверхности (кривой при $n = 2$) Σ . Поэтому функции $u = V_\Sigma[\nu]$ (потенциал простого слоя), равно как и функция $u = U_\Sigma[\nu]$ (потенциал

двойного слоя), является решением уравнения Гельмгольца (2.25) вне множества Σ .

В случае уравнения Гельмгольца следует заметить, что при $x \neq y$:

$$\Delta_x \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} + k^2 \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} = \frac{\partial (\Delta_x F(x-y) + k^2 F(x-y))}{\partial n_y} = 0.$$

Пусть теперь поверхность Σ (кривая в случае $n = 2$) есть граница замкнутого множества D , причем, внутренность множества D есть область в пространстве \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$.

Теорема 2.6. (3-я формула Грина). Любая функция $u(x)$, определенная на множестве D и удовлетворяющая условию $u \in C^2(D)$, представляется в виде:

$$u(x) = - \int_D \Delta u(y) F(x-y) dy + \int_{\Sigma} \left(F(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy, \quad (2.26)$$

x – внутренняя точка множества D , $F(x-y)$ – потенциал точечного заряда для уравнения Лапласа.

Доказательство. Докажем эту теорему для пространственного случая: $n = 3$. В плоском случае ($n = 2$) доказательство аналогично.

Построим окрестность точки x радиуса ε – открытый шар $U(x, \varepsilon)$, которая целиком содержится во внутренности множества D . Последнее условие выполнено, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Пусть $S(x, \varepsilon) = \partial U(x, \varepsilon)$ – сфера радиуса ε с центром в точке x .

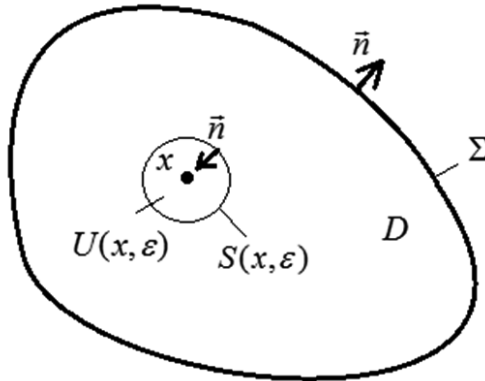


Рис. 2.2: К выводу 3-й формулы Грина

Вырежем из множества D окрестность $U(x, \varepsilon)$ точки x и применим на этом множестве 2-ю формулу Грина к функциям u и функции $v(y) = F(x-y)$. Здесь мы считаем, что точка x фиксирована и

2.3 Уравнения Лапласа, Пуассона, Гельмгольца.

Потенциалы

учитываем, что такая функция $v(y)$ бесконечно непрерывно дифференцируема на замыкании множества $D \setminus U(x, \varepsilon)$. Тогда:

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus U(x, \varepsilon)} \Delta u(y) F(x - y) dy &= \int_{D \setminus U(x, \varepsilon)} u(y) \Delta_y F(x - y) dy + \\ &+ \int_{\partial(D \setminus U(x, \varepsilon))} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) F(x - y) - \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy \end{aligned}$$

Далее заметим, что, во-первых, функция $v(y) = F(x - y)$ является решением уравнения Лапласа на множестве $D \setminus U(x, \varepsilon)$ и, поэтому, первый интеграл в правой части последней формулы равен нулю. Во-вторых, граница множества $D \setminus U(x, \varepsilon)$ состоит из поверхности Σ – границы множества D , и сферы $S(x, \varepsilon)$, причем, в последней формуле на поверхности сферы $S(x, \varepsilon)$ нормаль является внутренней по отношению к этой сфере (нормаль направлена наружу от множества $D \setminus U(x, \varepsilon)$). Тогда

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus U(x, \varepsilon)} \Delta u(y) F(x - y) dy &= \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) F(x - y) - \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy + \\ &+ \int_{S(x, \varepsilon)} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) F(x - y) - \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy \end{aligned} \quad (2.27)$$

Теперь устремим ε к нулю в последнем равенстве.

В левой части подынтегральная функция имеет интегрируемую особенность и значит

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus U(x, \varepsilon)} \Delta u(y) F(x - y) dy = \int_D \Delta u(y) F(x - y) dy,$$

где последний интеграл существует как несобственный.

Интеграл по поверхности Σ в формуле (2.27) не зависит от ε .

Рассмотрим интеграл по сфере $S(x, \varepsilon)$. Т.к. функция u непрерывно дифференцируема на множестве D , найдется константа M такая, что

$$|u(y)| \leq M \text{ и } |\text{grad } u(y)| \leq M, \quad y \in D.$$

Если $y \in S(x, \varepsilon)$, то

$$F(x - y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}.$$

При этом

$$|\partial u / \partial n(y)| \leq |\text{grad } u(y)| \leq M$$

и тогда

$$\left| \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}(y) F(x - y) dy \right| \leq \frac{M}{4\pi\varepsilon} \int_{S(x, \varepsilon)} 1 dy = M\varepsilon.$$

Здесь мы учли, что

$$\int_{S(x, \varepsilon)} 1 dy = 4\pi\varepsilon^2 - \text{площадь поверхности сферы } S(x, \varepsilon). \quad (2.28)$$

Тогда

$$\int_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n}(y) F(x - y) dy \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Далее, если $y \in S(x, \varepsilon)$, и \vec{n}_y – вектор внутренней нормали в к сфере $S(x, \varepsilon)$ в точке y , то

$$\frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} = (\vec{n}_y, \text{grad}_y F(x - y)) = \frac{(\vec{n}_y, x - y)}{4\pi |x - y|^3}.$$

Заметим, что при $y \in S(x, \varepsilon)$ выполнено равенство

$$\vec{n}_y = \frac{x - y}{|x - y|}.$$

Тогда при $y \in S(x, \varepsilon)$

$$\frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} = \frac{1}{4\pi |x - y|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}. \quad (2.29)$$

Поэтому можем записать:

$$\begin{aligned} \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} u(y) dy &= \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{S(x, \varepsilon)} u(y) dy = \\ &= \frac{u(x)}{4\pi\varepsilon^2} \int_{S(x, \varepsilon)} 1 dy + \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{S(x, \varepsilon)} (u(y) - u(x)) dy. \end{aligned}$$

Для разности $u(y) - u(x)$ справедлива оценка

$$|u(y) - u(x)| \leq M\varepsilon.$$

Тогда, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и используя формулу (2.28), получаем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} u(y) dy = u(x).$$

Теперь, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в формуле (2.27), получаем

$$\int_D \Delta u(y) F(x - y) dy = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) F(x - y) - \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy - u(x).$$

Из последней формулы следует формула (2.26).

Теорема доказана.

Формула, аналогичная формуле (2.26), справедлива и для потенциалов, соответствующих уравнению Гельмгольца.

2.3 Уравнения Лапласа, Пуассона, Гельмгольца.

Потенциалы

Теорема 2.7. (обобщение 3-ей формулы Грина). Любая функция $u(x)$, определенная на множестве D и удовлетворяющая условию $u \in C^2(D)$, представляется в виде:

$$u(x) = - \int_D Lu(y)F(x-y)dy + \int_{\Sigma} \left(F(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy, \quad (2.30)$$

x – внутренняя точка множества D ,

$$Lu = \Delta u + k^2 u, \quad (2.31)$$

$F(x-y)$ – потенциал точечного заряда для уравнения Гельмгольца, определяемый формулами (2.15) или (2.20).

Доказательство. Опять рассмотрим пространственный случай: $n = 3$. (в плоском случае - $n = 2$, доказательство аналогично, при этом нужно использовать асимптотику (2.21) фундаментального решения при $|x-y| \rightarrow 0$).

Так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы 2.6, для каждой точки x – внутренней точки множества D , вырежем окрестность $U(x, \varepsilon)$ этой точки, целиком лежащую в множестве D .

Применяя 2-ю формулу Грина (формула (2.8)) можем записать:

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus U(x, \varepsilon)} Lu(y)F(x-y)dy &= \int_{D \setminus U(x, \varepsilon)} u(y)L_y F(x-y)dy + \\ &+ \int_{\partial(D \setminus U(x, \varepsilon))} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y)F(x-y) - \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy, \end{aligned}$$

L_y – оператор L , примененный по переменной y , причем, опять выполнено равенство

$$L_y F(x-y) = 0 \text{ при } y \in D \setminus U(x, \varepsilon).$$

Интеграл по границе множества $D \setminus U(x, \varepsilon)$ опять разделяем на интеграл по поверхности Σ и по сфере $S(x, \varepsilon)$. При этом заметим, что функцию $F(x-y)$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} F(x-y) &= F_0(x-y) + \tilde{F}(x-y), \\ F_0(x-y) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}, \quad \tilde{F}(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr} - 1}{r}, \quad r = |x-y|. \end{aligned}$$

Интеграл по поверхности сферы $S(x, \varepsilon)$ распадается на сумму интегралов:

$$\int_{S(x, \varepsilon)} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y)F(x-y) - \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy = I_0(x) + \tilde{I}(x),$$

$$I_0(x) = \int_{S(x, \varepsilon)} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y)F_0(x-y) - \frac{\partial F_0(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy,$$

$$\tilde{I}(x) = \int_{S(x, \varepsilon)} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y)\tilde{F}(x-y) - \frac{\partial \tilde{F}(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy.$$

Первый из этих интегралов был рассмотрен при доказательстве теоремы 2.6

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_0(x) = -u(x).$$

Легко также показать, что функция $\tilde{F}(x - y)$ и ее градиент по переменной y (равно как и градиент по переменной x) ограничены. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{I}(x) = 0.$$

Тогда получаем формулу (2.30).
Теорема доказана.

В случае если функция $u \in C^2(D)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца (Лапласа при $k = 0$)

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (2.32)$$

во внутренних точках множества D , формулу (2.30) можно переписать в виде:

$$u(x) = \int_{\Sigma} \left(F(x - y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy, \quad (2.33)$$

x – внутренняя точка множества D , $\Sigma = \partial D$.

Формула (2.33) означает, что решение однородного уравнения Гельмгольца (2.32) однозначно выражается через свои значения на границе области и значения нормальной производной на это же границе.

Заметим, также, что для выражения в правой части формулы (2.33) можно вычислить частные производные любого порядка, внося эти производные под знак интеграла при $x \neq \Sigma$. Отсюда следует важное свойство решений однородного уравнения Гельмгольца (Лапласа): любое решение такого уравнения в классе функций $C^2(D)$ в действительности является бесконечно дифференцируемой функцией во внутренних точках множества D .

2.4 Решения однородных уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешней области

Получим обобщение формулы (2.33) на случай внешней области.

Пусть опять D есть замыкание некоторой области \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, причем, эта область является внешней по отношению к своей границе - замкнутой поверхности $\Sigma = \partial D$. Опять считаем, что Σ – кусочно-гладкая поверхность.

Пусть $u(x)$ – есть решение уравнения Лапласа во внутренних точках множества D в классе функций $C^2(D)$, удовлетворяющее условию

$$u(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (2.34)$$

2.4 Решения однородных уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешней области

Условие (2.34) понимается в следующем смысле:

для любого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon)$ такое, что при условии $|x| > R$ выполнено неравенство: $|u(x)| < \varepsilon$.

Это условие более удобно записать в виде: найдется функция $\alpha(r)$, такая, что $\alpha(r) \rightarrow 0$ и при достаточно больших по модулю значениях $|x|$ выполнено условие

$$|u(x)| \leq \alpha(|x|).$$

Таким образом, условие (2.34) подразумевает наличие единой оценки для малости функции $u(x)$ независимо от направления, в котором точка x удаляется на бесконечность.

Теорема 2.8. Для функции $u(x)$ – решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего условию (2.34) на бесконечности, справедлива формула (2.33) во всех точках $x \in D$, $x \notin \Sigma$, где $\partial/\partial n$ – производная по направлению вектора нормали, направленного в сторону внутренней поверхности Σ .

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие свойства решений уравнения Лапласа, характеризующие их поведение на бесконечности [43, глава 4, §2, п.6], [7, глава 5, §24, п.10].

Если функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в окрестности бесконечности и удовлетворяет условию (2.34) в смысле равномерной сходимости по x , то для этой функции найдется константа M такая, что в указанной окрестности бесконечности выполнена оценка

$$|u(x)| \leq \frac{M}{|x|}, \quad |\text{grad } u(x)| \leq \frac{M}{|x|^2}. \quad (2.35)$$

Доказательство теоремы 2.8.

Сначала рассмотрим трехмерный случай ($n = 3$).

Возьмем произвольную точку x , являющуюся внутренней точкой множества D . Построим сферу S_R радиуса R с центром в начале координат. При этом радиус R считаем столь большим, что $R > 2|x|$ и что вся поверхность Σ содержится внутри шара, ограниченного сферой S_R (при этом точка x также лежит внутри этого шара). Пусть D_R – замыкание области, лежащей между поверхностью Σ и сферой S_R .

Применим формулу (2.33) для значения функции u в рассматриваемой точке x , как для функции, рассматриваемой на множестве D_R . Поскольку граница множества D_R состоит из поверхности Σ и сферы S_R , имеем:

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_{\Sigma} \left(F(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy + \\ & + \int_{S_R} \left(F(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy \end{aligned}, \quad (2.36)$$

где $\partial/\partial n$ – производная по направлению вектора внешней нормали по отношению к множеству D_R .

В силу оценки (2.35) при $y \in S_R$ выполнены оценки:

$$|u(y)| \leq \frac{M}{R}, \quad \left| \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right| \leq |\operatorname{grad} u(y)| \leq \frac{M}{|x|^2}. \quad (2.37)$$

Легко также увидеть, что найдется константа C , зависящая от выбранной точки x , но не зависящая от R и от точки $y \in S_R$, такая, что

$$|F(x - y)| \leq \frac{C}{R}, \quad \left| \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} \right| \leq \frac{C}{R^2} \quad (2.38)$$

(здесь мы используем условие $R > 2|x|$). Тогда выражение под знаком интеграла по поверхности сферы S_R в формуле (2.36) не превосходит по модулю некоторой величины, порядка $1/R^3$. Т.к. площадь сферы S_R равна $4\pi R^2$ заключаем, что данный интеграл стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, не превосходя по модулю некоторой величины порядка $1/R$.

Тогда, переходя в формуле (2.36) к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем формулу (2.33).

В плоском случае ($n = 2$) доказательство точно такое же, с тем отличием, что вместо оценки (2.38) возникает оценка

$$|F(x - y)| \leq C(|\ln R| + 1), \quad \left| \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} \right| \leq \frac{C}{R}. \quad (2.39)$$

При этом интеграл по S_R – в данном случае это окружность с длиной дуги $2\pi R$, не превосходит величины порядка

$$(|\ln R| + 1)/R.$$

Но последнее выражение также стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим уравнение Гельмгольца при $k \neq 0$, $\operatorname{Im}k \geq 0$

Здесь основное отличие состоит в том, что, например, в трехмерном случае градиент функции $F(x)$ при $\operatorname{Im}k = 0$ имеет порядок затухания $1/R$, а не $1/R^2$. Поэтому, если попытаться воспроизвести доказательство теоремы 2.8 для уравнения Лапласа, здесь не будет выполнена вторая из оценок (2.38) и это доказательство не проходит.

Важную роль здесь играет условие на бесконечности (2.18).

Предположим, что решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяет первой из оценок (2.37) и условию излучения (2.18).

Теорема 2.9. Пусть $u(x)$ есть решение уравнения Гельмгольца во внутренних точках рассматриваемого множества D в классе функций $C^2(D)$, удовлетворяющее первой из оценок (2.37) и условию (2.18).

Для функции $u(x)$ при сформулированных условиях справедлива формула (2.33) во всех точках $x \in D$, $x \notin \Sigma$, где $\partial/\partial n$ – производная по направлению вектора нормали, направленного в сторону внутренней поверхности Σ .

2.5 Решение уравнения Пуассона во всем пространстве

Доказательство. Опять сначала рассмотрим трехмерный случай ($n = 3$). Возьмем произвольную точку x , являющуюся внутренней точкой множества D и построим сферу S_R радиуса R с центром в начале координат, охватывающую точку x и поверхность Σ .

Далее мы опять приходим к формуле (2.36). Заметим, что на поверхности сферы S_R вектор нормали \vec{n}_y совпадает с вектором $y/|y|$, и $|y| = R$. Поэтому при $y \in S_R$, с учетом условия (2.18) и леммы 2.1, имеем:

$$\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} = \left(\frac{y}{|y|}, \operatorname{grad} u(y) \right) = ik u + o\left(\frac{1}{R}\right),$$

$$\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} = \left(\frac{y}{|y|}, \operatorname{grad}_y F(x-y) \right) = ik F(x-y) + o\left(\frac{1}{R}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{S_R} \left(F(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy = \\ & = \int_{S_R} \left(F(x-y) \left(ik u(y) + o\left(\frac{1}{R}\right) \right) - \left(ik F(x-y) + o\left(\frac{1}{R}\right) \right) u(y) \right) dy \\ & = \int_{S_R} \left(F(x-y) o\left(\frac{1}{R}\right) + u(y) o\left(\frac{1}{R}\right) \right) dy = o(1). \end{aligned}$$

Таким образом, данный интеграл стремится к 0 при $R \rightarrow \infty$. Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в равенстве (2.36) завершаем доказательство теоремы.

В плоском случае ($n = 2$) справедливо это же рассуждение.

Теорема доказана.

2.5 Решение уравнения Пуассона во всем пространстве

Рассмотрим уравнение Пуассона (2.9) в области Ω , совпадающей со всем пространством \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, с финитной правой частью, удовлетворяющей условию $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Напомним, что функция f называется финитной, если эта функция обращается в нуль за пределами некоторого компактного множества. Будем искать решение уравнения (2.9), удовлетворяющее условию $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и условию (2.34) на бесконечности.

Сначала предположим, что такое решение – функция u , существует. Получим выражение для этого решения.

Это решение удовлетворяет уравнению Лапласа в окрестности бесконечности, т.к. функция f финитная. Поэтому для него выполнены оценки (2.35).

Найдется такое $R_0 > 0$, что выполнено условие $f(x) = 0$ при $|x| \geq R_0$.

Возьмем произвольную точку $x \in \mathbb{R}^n$. Построим сферу S_R радиуса R (окружность радиуса R в плоском случае), причем, радиус

R возьмем столь большим, что, во-первых, рассматриваемая точка x содержится внутри этой сферы, во-вторых, $R > R_0$. Тогда, применяя формулу Грина (2.26), можем записать:

$$u(x) = - \int_{y: |y| \leq R_0} f(y) F(x-y) dy + \int_{S_R} \left(F(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} u(y) \right) dy. \quad (2.40)$$

Считая точку x неизменной, перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$. В силу оценок (2.35), и учитывая, что при этом

$$|F(x-y)| \leq O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \left| \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} \right| \leq O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

где $y \in S_R$, заключаем, что интеграл по поверхности S_R стремится к 0. Т.к. функция f равна нулю при $|x| \geq R_0$, в первом интеграле из правой части формулы (2.40) можно перейти к интегрированию по всему пространству:

$$u(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} f(y) F(x-y) dy. \quad (2.41)$$

В курсах математической физики доказывается, что решение уравнения Пуассона (2.9) при сформулированных условиях существует и является единственным. Тогда это решение должно представляться в виде (2.41). Поэтому можно сказать, что формула (2.41) дает решение уравнения (2.9). Существование решения уравнения (2.9) может быть получено разными способами.

Ниже мы дадим независимое доказательство этого факта, опираясь на формулу (2.41). А именно, докажем, что формула (2.41) дает решение уравнения (2.9) в классе функций $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, не предполагая существования этого решения.

Теорема 2.10. Пусть $f(x)$ – правая часть уравнения (2.9), есть финитная функция, удовлетворяющая условию: $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$. Тогда функция u , определяемая формулой (2.41), удовлетворяет условию $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и является решением уравнения Пуассона (2.9).

Доказательство. Доказательство проведем для трехмерного случая.

Пусть функция $f(x)$ – правая часть уравнения (2.9), удовлетворяет сформулированным условиям. Построим функцию $u(x)$ по формуле (2.41).

Сразу заметим, что т.к. функция f финитная, функция u удовлетворяет уравнению Лапласа и является бесконечно- дифференцируемой в окрестности бесконечности. Точнее, мы можем утверждать,

2.5 Решение уравнения Пуассона во всем пространстве

что функция u удовлетворяет уравнению Лапласа и бесконечно-дифференцируема вне некоторой сферы S_R радиуса R с центром в начале координат и на самой этой сфере.

Далее, в любой точке $x \in B_R$, где B_R – замыкание шара, ограниченного сферой S_R , функция $u(x)$ дифференцируема:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = - \int_{B_R} f(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial x_i} dy, \quad i = 1, \dots, n.$$

Последняя формула верна, т.к. интеграл в правой части сходится равномерно (это есть интеграл с полярным ядром вида (1.31) с $\alpha = n - 1$). Из теоремы 1.10 следует, что первые производные функции $u(x)$ непрерывны на множестве B_R .

Вторые производные вносить под знак интеграла уже нельзя, т.к. возникающий интеграл не будет абсолютно сходящимся. Но мы воспользуемся условием дифференцируемости функции f . Заменяя производную по переменной x_i под знаком интеграла на производную по переменной y_i и интегрируя по частям, можем записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} &= \int_{B_R} f(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial y_i} dy = \\ &= \int_{B_R} \frac{\partial}{\partial y_i} (f(y)F(x-y)) dy - \int_{B_R} F(x-y) \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} dy \end{aligned}$$

Применяя формулу (2.2) и учитывая, что функция f обращается в нуль на сфере S_R , получаем

$$\int_{B_R} \frac{\partial}{\partial y_i} (f(y)F(x-y)) dy = \int_{S_R} f(y)F(x-y)n_i(y)dy = 0,$$

здесь $n_i(y)$ – координата вектора нормали $\vec{n}(y)$.

Тогда

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = - \int_{B_R} F(x-y) \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} dy.$$

Данное выражение опять можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = - \int_{B_R} \frac{\partial F(x-y)}{\partial x_j} \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} dy.$$

Отсюда мы получаем, что $u \in C^2(B_R)$.

Т.к. вне сферы S_R и на самой этой сфере функция u бесконечно дифференцируема, заключаем, что $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Теперь докажем, что построенная функция u удовлетворяет уравнению Пуассона (2.9) во всем пространстве.

Возьмем произвольную финитную функции $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Опять построим сферу S_R с центром в начале координат радиуса R так, чтобы и выбранная функция v и функция f – правая часть уравнения (2.9), обращались в нуль вне этой сферы и в некоторой ее

окрестности. Пусть опять B_R – замыкание открытого шара, ограниченного сферой S_R . Тогда, записывая 2-ю формулу Грина с учетом условия

$$v = \partial v / \partial n = 0, \quad (2.42)$$

выполненного на этой сфере, получаем:

$$\int_{B_R} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{B_R} u(x)\Delta v(x)dx = - \int_{B_R} \left(\int_{B_R} F(x-y)f(y)dy \right) \Delta v(x)dx.$$

Меняя порядок интегрирования в последней формуле, можем записать:

$$\int_{B_R} \Delta u(x)v(x)dx = - \int_{B_R} \left(\int_{B_R} F(x-y)\Delta v(x)dx \right) f(y)dy.$$

Но по третьей формуле Грина, с учетом условия (2.42), имеем:

$$v(y) = - \int_{B_R} F(x-y)\Delta v(x)dx, \quad y \in B_R \setminus S_R.$$

Тогда справедливо равенство

$$\int_{B_R} \Delta u(x)v(x)dx = \int_{B_R} f(y)v(y)dy.$$

Последнюю формулу можно переписать в виде:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u(x) - f(x))v(x)dx = 0. \quad (2.43)$$

Таким образом, равенство (2.43) выполнено для любой финитной функции $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Поскольку функции Δu и f непрерывны, это возможно только если

$$\Delta u(x) - f(x) \equiv 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^n,$$

что и требовалось доказать.

Двумерный случай доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Замечание. В трехмерном случае построенное в теореме 2.10 решение уравнения Пуассона по формуле (2.41) автоматически удовлетворяет условию (2.34) на бесконечности. Это сразу следует из финитности функции f , т.к. интеграл в формуле (2.41) можно заменить интегралом по некоторому шару B_R и функция $F(x-y)$ стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ равномерно по переменной $y \in B_R$.

В двумерном случае это не так. Несложно показать, что необходимым и достаточным условием для выполнения условия (2.34) на бесконечности в этом случае является равенство:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx = 0. \quad (2.44)$$

2.6 Восстановление векторного поля по ротору и дивергенции. Пространственный случай

Действительно, пусть B_R – замыкание круга с центром в начале координат радиуса R , где радиус R выбран так, что функция f обращается в нуль вне этого круга. Возьмем произвольную точку $x_0 \in B_R$. Тогда можем записать:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_1(x) + u_2(x), \\ u_1(x) &= -F(x - x_0) \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy, \\ u_2(x) &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (F(x - x_0) - F(x - y)) dy. \end{aligned}$$

При этом разность $F(x - x_0) - F(x - y)$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ равномерно по $y \in B_R$. Поэтому функция $u_2(x)$ удовлетворяет условию (2.34) на бесконечности. А функция $u_1(x)$ имеет вид

$$u_1(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x - x_0| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy.$$

2.6 Восстановление векторного поля по ротору и дивергенции. Пространственный случай

В этом разделе рассмотрим задачу о нахождении трехмерного векторного поля $\vec{w}(x) = (w_1(x), w_2(x), w_3(x))$, $x \in \mathbb{R}^3$, которое удовлетворяет во всем пространстве \mathbb{R}^3 уравнениям:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{w} = \rho \\ \operatorname{rot} \vec{w} = \vec{\omega} \end{cases}, \quad (2.45)$$

где функция ρ и $\vec{\omega}$ – заданные функции. При этом предположим, что функция ρ и компоненты векторного поля $\vec{\omega}$ удовлетворяют условию $\rho \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $\omega_i \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, \dots, 3$, и являются финитными функциями.

Векторное поле \vec{w} ищем в классе таких векторных полей, компоненты которых удовлетворяют условию $w_i \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, \dots, 3$, и условию на бесконечности:

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} |\vec{w}(x)| = 0, \quad (2.46)$$

(предел понимается в том же смысле, что и в формуле (2.34) (см. пояснение к формуле (2.34))).

Заметим, также, что для любого дважды непрерывно дифференцируемого векторного поля \vec{w} справедлива формула:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{w} = 0.$$

Поэтому уравнения (2.45) следует решать при дополнительном условии

$$\operatorname{div} \vec{\omega} = 0. \quad (2.47)$$

Условие (2.47) является необходимым условием разрешимости данной задачи. Далее будет показано, что это условие и является и достаточным.

Поставленную задачу можно разделить на две задачи: восстановление векторного поля с нулевым ротором по заданной дивергенции и восстановление векторного поля с нулевой дивергенцией по заданному ротору.

Рассмотрим каждую из этих задач отдельно.

А) Рассмотрим задачу о нахождении векторного поля \vec{w} , которое удовлетворяет во всем пространстве \mathbb{R}^3 уравнениям:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{w} = \rho \\ \operatorname{rot} \vec{w} = 0 \end{cases}, \quad (2.48)$$

уравнения (2.48) решаются при тех же предположениях, что и уравнения (2.45).

В данном случае пространство \mathbb{R}^3 является односвязной областью и, поэтому, условие $\operatorname{rot} \vec{w} = 0$ равносильно условию потенциальности векторного поля \vec{w} . Поэтому ищем поле \vec{w} в виде

$$\vec{w} = \operatorname{grad} u. \quad (2.49)$$

При этом второе уравнение системы (2.48) выполнено автоматически, а первое уравнение равносильно уравнению

$$\Delta u = \rho. \quad (2.50)$$

Мы уже доказали (см. формулу (2.41)), что решением такого уравнения в классе $C^2(\mathbb{R}^3)$ является функция

$$u(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} f(y) F(x-y) dy. \quad (2.51)$$

Теперь, дифференцируя выражение (2.51) под знаком интеграла, получаем:

$$\vec{w}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \vec{E}(x-y) dy, \quad (2.52)$$

где $\vec{E}(x-y)$ – векторное поле, определяемое формулой:

$$\vec{E}(x-y) = -\operatorname{grad}_x F(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{x-y}{|x-y|^3}. \quad (2.53)$$

Таким образом, формула (2.52) дает некоторое решение уравнений (2.48). Т.к. функция u удовлетворяет условию $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$, компоненты векторного поля \vec{w} в силу равенства (2.49) удовлетворяют условию $w_i \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, \dots, 3$.

Легко, также, увидеть, что построенная функция \vec{w} удовлетворяет условию (2.46). Действительно, поскольку функция f финитная, интеграл в формуле (2.52) можно заменить на интеграл по некоторому ограниченному множеству D . При этом функция $\vec{E}(x-y)$, определяемая формулой (2.53), удовлетворяет условию: $|\vec{E}(x-y)| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ в смысле равномерной сходимости по $y \in D$.

2.6 Восстановление векторного поля по ротору и дивергенции. Пространственный случай

Поясним физический смысл построенного решения рассматриваемой задачи.

Векторное поле $\vec{w}_y(x) = \vec{E}(x - y)$ называется полем единичного точечного источника, сосредоточенного в точке y . Также векторное поле $\vec{w}_y(x)$ называют векторным полем, подчиняющимся закону Кулона (иногда просто говорят закон Кулона). Это название взято из электростатики, где данное поле есть электрическое поле, индуцируемое единичным положительным зарядом, размещенным в точке y .

Формула (2.53) означает, что искомое поле \vec{w} есть суперпозиция полей, индуцируемых точечными источниками, распределенными в пространстве с плотностью ρ (заметим, что функция ρ может быть и отрицательной, источник вида $\vec{w}_y(x) = -\vec{E}(x - y)$ называют единичным стоком).

Можно также доказать, что поле вида (2.52) является единственным решением рассматриваемой задачи в рассматриваемом классе функций. Это следует из того факта, что общее решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

определенное во всем трехмерном пространстве, есть произвольная линейная функция (см. курсы математической физики, например Владимиров), т.е. функция вида:

$$u_0(x) = (\vec{a}, x) + b, \quad (2.54)$$

где \vec{a} – произвольный постоянный вектор, b – произвольное число, (\vec{a}, x) – скалярное произведение. Тогда общее решение рассмотренной задачи для векторного поля \vec{w} имеет вид: $\vec{w}(x) = \vec{w}_1(x) + \text{grad } u_0(x)$, где $\vec{w}_1(x)$ – построенное частное решение, определяемое формулой (2.52). Но $\text{grad } u_0(x) = \vec{a}$ и тогда $\vec{w}(x) \rightarrow \vec{a}$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Таким образом, условие на бесконечности (2.46) выполнено только при $\vec{a} = 0$.

Тем самым единственность построенного решения при условии (2.46) доказана.

Б) Рассмотрим задачу о нахождении векторного поля \vec{w} , которое удовлетворяет во всем пространстве \mathbb{R}^3 уравнениям:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{w} = 0 \\ \text{rot } \vec{w} = \vec{\omega} \end{cases}, \quad (2.55)$$

уравнения (2.55) решаются при тех же предположениях, что и уравнения (2.45).

Будем искать решение такой задачи в виде

$$\vec{w} = \text{rot } \vec{\psi}. \quad (2.56)$$

Функцию $\vec{\psi}$ при этом называют векторным потенциалом. Легко понять, что в выборе такого потенциала имеется достаточно большой произвол: добавляя к векторному потенциалу $\vec{\psi}$ произвольную

векторную функцию вида $\vec{\psi}' = \text{grad } u$, u – произвольная скалярная функция нужной гладкости, мы не изменим векторное поле \vec{w} , т.к.
 $\text{rot grad } u \equiv 0$.

Будем искать векторный потенциал, удовлетворяющий дополнительному условию

$$\text{div } \vec{\psi} = 0. \quad (2.57)$$

Функция \vec{w} вида (2.56) автоматически удовлетворяет первому из уравнений (2.55). Подставляя функцию \vec{w} вида (2.56) во второе уравнение системы (2.55), получим уравнение:

$$\text{rot rot } \vec{\psi} = \vec{\omega}. \quad (2.58)$$

Используя формулу векторного анализа:

$$\text{rot rot } \vec{\psi} = \text{grad div } \vec{\psi} - \Delta \vec{\psi}, \quad \Delta \vec{\psi} = \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial x_3^2} \quad (2.59)$$

и учитывая условие (2.57), получаем уравнение

$$\Delta \vec{\psi} = -\vec{\omega}. \quad (2.60)$$

Заметим, что последнее уравнение можно расписать как уравнение относительно координат вектора $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$:

$$\Delta \psi_i = -\omega_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Частные решения последних уравнений построим по формуле (2.51)

$$\psi_i(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \omega_i(y) F(x-y) dy, \quad i = 1, 2, 3.$$

Последние уравнения перепишем в виде векторного равенства:

$$\vec{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\omega}(y) F(x-y) dy. \quad (2.61)$$

Таким образом, мы решили уравнение (2.60). Но нам, вообще то, нужно решить уравнение (2.58). В силу формулы (2.59), для того чтобы убедиться, что уравнение (2.58) выполнено, нам теперь нужно доказать, что построенная функция удовлетворяет условию (2.57). Докажем это.

Применяя оператор «дивергенция» к построенной функции $\vec{\psi}$, имеем:

$$\text{div } \vec{\psi}(x) = \text{div} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\omega}(y) F(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \text{div}_x (\vec{\omega}(y) F(x-y)) dy.$$

Применим формулу векторного анализа:

$$\text{div} (\vec{\omega} F) = F \text{div } \vec{\omega} + (\text{grad } F, \vec{\omega}).$$

В нашем случае оператор дивергенция берется по переменной x , а под знаком интеграла функция $\vec{\omega}$ от x не зависит и $\text{div}_x \vec{\omega}(y) = 0$. Тогда

$$\text{div } \vec{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\omega}(y), \text{grad}_x F(x-y)) dy.$$

2.6 Восстановление векторного поля по ротору и дивергенции. Пространственный случай

Воспользуемся формулой

$$\operatorname{grad}_x F(x - y) = -\operatorname{grad}_y F(x - y)$$

и осуществим интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\psi}(x) &= - \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\omega}(y), \operatorname{grad}_y F(x - y)) dy = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}_y (\vec{\omega}(y) F(x - y)) dy + \int_{\mathbb{R}^3} F(x - y) \operatorname{div} \vec{\omega}(y) dy \end{aligned}$$

Т.к. функция $\vec{\omega}$ финитная, найдется такой замкнутый шар D , что функция $\vec{\omega}$ обращается в нуль вне этого шара и на ограничивающей его сфере. Тогда по формуле Остроградского-Гаусса имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}_y (\vec{\omega}(y) F(x - y)) dy &= \int_D \operatorname{div}_y (\vec{\omega}(y) F(x - y)) dy = \\ &= \int_{\partial D} \vec{n}(y) \vec{\omega}(y) F(x - y) dy = 0. \end{aligned}$$

И теперь мы видим, что условие (2.47) обеспечивает выполнение условия (2.57).

Таким образом, мы доказали, что поле \vec{w} , определяемое равенством (2.56), где поле $\vec{\psi}$ имеет вид (2.61), удовлетворяет уравнениям (2.55).

Теперь получим выражением для поля \vec{w} , определяемого формулой (2.56):

$$\vec{w}(x) = \operatorname{rot} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\omega}(y) F(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{rot}_x (\vec{\omega}(y) F(x - y)) dy.$$

Здесь мы воспользуемся известной формулой векторного анализа:

$$\operatorname{rot} (\vec{\omega} F) = \operatorname{grad} F \times \vec{\omega} + F \operatorname{rot} \vec{\omega}.$$

Снова заметим, что в нашем случае оператор ротор берется по переменной x , а под знаком интеграла функция $\vec{\omega}$ от x не зависит и $\operatorname{rot}_x \vec{\omega}(y) = 0$. Поэтому получаем формулу:

$$\vec{w}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{grad}_x F(x - y) \times \vec{\omega}(y) dy. \quad (2.62)$$

Последнюю формулу, также, можно переписать в виде:

$$\vec{w}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\omega}(y) \times \vec{E}(x - y) dy, \quad (2.63)$$

где $\vec{E}(x - y)$ – векторное поле, определяемое законом Кулона (2.53).

Т.к. компоненты функции $\vec{\psi}$ удовлетворяют условию $\psi_i \in C^2(\mathbb{R}^3)$, из формулы (2.56) следует условие $w_i \in C^1(\mathbb{R}^3)$ для компонент построенного поля \vec{w} . Наконец, в силу финитности функции $\vec{\omega}$, непосредственно из формулы (2.63) следует условие (2.46).

Таким образом, формула (2.63) дает решение уравнений (2.55) в требуемом классе функций.

Наконец, докажем единственность такого решения. Пусть \vec{w} есть построенное решение и пусть \vec{w}_1 – некоторое другое решение уравнений (2.55) в требуемом классе функций. Тогда функция $\vec{w}_0 = \vec{w} - \vec{w}_1$ есть решение уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{w}_0 = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{w}_0 = 0 \end{cases} .$$

Но тогда функция \vec{w} есть решение задачи для уравнений (2.48), рассмотренной в пункте А). Это решение единственно, и легко увидеть, что поле $\vec{w}_0 \equiv 0$ как раз и есть такое решение. Значит $\vec{w}_1 \equiv \vec{w}$, что и требуется доказать.

Замечание: Векторное поле

$$\vec{w}_y(x) = \vec{\omega}(y) \times \vec{E}(x - y)$$

называют векторным полем, подчиняющимся закону Био-Савара. Вообще в физике изначально под законом Био-Савара понимается закон, который описывает магнитное поле, индуцируемое проводником с током. В данном случае $\vec{w}_y(x)$ есть вклад, который вносит в магнитное поле участок проводника единичной длины в котором $\vec{\omega}(y)$ есть вектор электрического тока.

Таким образом, задача (2.45)–(2.46) о восстановлении векторного поля по ротору и дивергенции имеет, и при том единственное, решение

$$\vec{w}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) \vec{E}(x - y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\omega}(y) \times \vec{E}(x - y) dy. \quad (2.64)$$

Заметим, что здесь первое слагаемое есть безвихревое векторное поле (его ротор равен нулю), а второе слагаемое есть соленоидальное векторное поле (его дивергенция равна нулю).

Можно посмотреть на рассмотренную задачу с другой стороны. Предположим, что дано некоторое дифференцируемое векторное поле и нужно разложить его на сумму безвихревого и соленоидального полей. Формула (2.64) дает такое разложение, если положить $\rho = \operatorname{div} \vec{w}$, $\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{w}$. Это разложение называется разложением Гельмгольца.

2.7 Восстановление векторного поля по ротору и дивергенции. Плоский случай

Теперь рассмотрим аналогичную задачу на плоскости. Требуется найти двумерное векторное поле $\vec{w}(x) = (w_1(x), w_2(x))$, $x \in \mathbb{R}^2$, которое удовлетворяет во всем пространстве \mathbb{R}^2 уравнениям:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{w} = \rho \\ \operatorname{rot} \vec{w} = \omega \end{cases} , \quad (2.65)$$

где ρ и ω – заданные функции, удовлетворяющие условию $\rho \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\omega \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $i = 1, \dots, 3$, и являются финитными функциями. Оператор ротор определяется формулой (2.6). Как и в пространственном

2.7 Восстановление векторного поля по ротору и дивергенции. Плоский случай

случае ищется решение в классе функций $\vec{w}(x)$ таких, что $w_i(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$, и удовлетворяющих условию (2.46) на бесконечности.

Эту задачу опять разобьем на два случая: нахождение решения уравнений (2.48) и нахождение решения уравнений (2.55), где вместо векторного поля \vec{w} стоит скалярная функция ω .

А) Решение задачи для уравнений (2.55) практически не отличается от пространственного случая. Поле \vec{w} должно быть потенциальным, для его потенциала возникает уравнение Пуассона (2.50), решение которого имеет вид (2.51) (с интегрированием по пространству \mathbb{R}^2 вместо \mathbb{R}^3), потенциал точечного заряда F имеет вид (2.13). Поле \vec{w} имеет вид (2.52), опять с интегрированием по пространству \mathbb{R}^2 вместо \mathbb{R}^3 и с функцией $\vec{E}(x - y)$, имеющей вид:

$$\vec{E}(x - y) = -\text{grad}_x F(x - y) = \frac{1}{2\pi} \frac{x - y}{|x - y|}. \quad (2.66)$$

Поле $\vec{E}(x - y)$ стремится к нулю, при условии $|x - y| \rightarrow \infty$. Поэтому поле \vec{w} , определяемое формулой (2.52), с учетом финитности функции ρ , удовлетворяет на бесконечности условию (2.46).

Поскольку в плоском случае общее решение уравнения Лапласа на всей плоскости имеет вид (2.54), построенное решение является единственным. Это доказывается в точности тем же рассуждением, что и в пространственном случае.

Б) Рассмотрим задачу о нахождении в описанном классе функций решения уравнений

$$\begin{cases} \text{div } \vec{w} = 0 \\ \text{rot } \vec{w} = \omega \end{cases}. \quad (2.67)$$

Решение такой задачи ищем в виде:

$$\vec{w} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right), \quad (2.68)$$

где ψ – неизвестная функция класса $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

При этом первое из уравнений (2.67) выполнено автоматически. Подставим решение вида (2.68) во второе уравнение системы (2.67). В силу равенств

$$\text{rot } \vec{w} = \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) \right) = -\Delta \psi,$$

приходим к уравнению Пуассона:

$$\Delta \psi = -\omega. \quad (2.69)$$

(Видна аналогия с уравнением (2.60) для трехмерного случая.)

В силу формулы (2.51), некоторым решением уравнения (2.69) является функция

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(y) F(x - y) dy. \quad (2.70)$$

Теперь, применяя к функции ψ формулу (2.68) и производя дифференцирование под знаком интеграла, получим:

$$\vec{w}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(y) \vec{V}(x-y) dy, \quad (2.71)$$

где

$$\vec{V}(x-y) = \left(\frac{\partial F(x-y)}{\partial x_2}, -\frac{\partial F(x-y)}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{(-(x_2-y_2), -(x_1-y_1))}{|x-y|^2}. \quad (2.72)$$

Это решение опять удовлетворяет условию на бесконечности (2.46), т.к. функция ω финитная, а поле $\vec{V}(x-y)$ стремится к нулю, при условии $|x-y| \rightarrow \infty$.

Единственность такого решения – функции $\vec{w}(x)$, в сформулированном классе функций доказывается точно также, как и в трехмерном случае доказывается единственность решения уравнений (2.55).

Таким образом, сформулированная задача для уравнений (2.65) при условии (2.46) снова имеет и при том единственное решение, определяемое формулой

$$\vec{w}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) \vec{E}(x-y) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \omega(y) \vec{V}(x-y) dy. \quad (2.73)$$

где в плоском случае функция $\vec{E}(x-y)$ имеет вид (2.66), а функция $\vec{V}(x-y)$ имеет вид (2.72).

Замечание. Поясним связь функции \vec{E} и функции \vec{V} в плоском случае. Для любых точек $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$, векторы \vec{V} и \vec{E} имеют одинаковую длину:

$$|\vec{V}(x-y)| = |\vec{E}(x-y)| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x-y|}$$

и при этом вектор \vec{V} получается поворотом вектора \vec{E} на 90 градусов против часовой стрелки. Если предположить, что плоскость, на которой мы рассматриваем векторные поля, есть координатная плоскость Ox_1x_2 в трехмерном пространстве с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$, то векторы \vec{V} и \vec{E} связаны соотношением:

$$\vec{V} = \vec{\nu} \times \vec{E},$$

где $\vec{E} = (E_1, E_2, 0)$, $\vec{V} = (V_1, V_2, 0)$ (мы добавили третью нулевую координату, считая что векторы лежат в координатной плоскости Ox_1x_2), а $\vec{\nu} = (0, 0, 1)$ – нормаль плоскости Ox_1x_2 . Далее, как мы уже отмечали при формулировке формулы (2.6), функцию $\omega = \text{rot } \vec{w}$ (здесь rot – двумерный ротор) следует трактовать как координату по оси Ox_3 трехмерного вектора $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{w}$ (а здесь rot – трехмерный ротор). При этом $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ или $\vec{\omega} = \omega \vec{\nu}$. Тогда формулу (2.73) можно переписать в виде (2.64), где $\vec{\omega} = \omega \vec{\nu}$.

Более подробно поля \vec{E} и \vec{V} будут рассмотрены в п.3.6.1.

2.8 Восстановление векторного поля по ротору и дивергенции. Область в границей

Поясним так же смысл формулы (2.68). Можно ввести по определению ротор от скалярной функции ψ как вектор на плоскости, определяемый формулой:

$$\operatorname{rot}\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right). \quad (2.74)$$

Откуда возникает эта формула? Так же, как и при построении формулы (2.6) для ротора от двумерного векторного поля, предположим, что плоскость Ox_1x_2 есть координатная плоскость в трехмерном пространстве с системой координат $Ox_1x_2x_3$. Поставим в соответствие функции ψ векторное поле $\vec{\psi} = (0, 0, \psi)$. Тогда, с учетом условия $\partial\psi/\partial x_3 = 0$, имеем:

$$\operatorname{rot}\vec{\psi} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, 0 \right).$$

При этом $\operatorname{rot}\vec{\psi}$ есть векторное поле, параллельное плоскости Ox_1x_2 и его проекция на эту плоскость имеет вид (2.74).

2.8 Восстановление векторного поля по ротору и дивергенции. Область в границей

В этом пункте получим формулу, дающую выражение для векторного поля в ограниченной области через его ротор, дивергенцию и краевые значения на границе области.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.11. Пусть D – ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^3 , границей которой является кусочно-гладкая поверхность Σ , \vec{w} – векторное поле в области D класса $C^1(\bar{D})$.

Тогда для векторного поля \vec{w} справедлива формула:

$$\vec{w}(x) = \int_D \rho(y) \vec{E}(x-y) dy + \int_D \vec{\omega}(y) \times \vec{E}(x-y) dy - \int_{\Sigma} (\vec{n}(y) \vec{w}(y)) \vec{E}(x-y) dy - \int_{\Sigma} (\vec{n}(y) \times \vec{w}(y)) \times \vec{E}(x-y) dy, \quad (2.75)$$

функция $\vec{E}(x-y)$ имеет вид (2.53), $\rho(y) = \operatorname{div}\vec{w}$, $\vec{\omega}(y) = \operatorname{rot}\vec{w}$.

Доказательство. Исходя из формулы (2.64) логично предположить, что в искомом интегральном представлении будут присутствовать первые 2 интеграла доказываемой формулы (2.75) и еще какие то слагаемые, учитывающие влияние краевых значений. Поэтому рассмотрим сумму интегралов

$$\vec{I}(x) = \int_D \rho(y) \vec{E}(x-y) dy + \int_D \vec{\omega}(y) \times \vec{E}(x-y) dy.$$

Здесь оба интеграла являются несобственными абсолютно сходящимся.

Вырежем вокруг точки x окрестность $U(x, \varepsilon)$ (открытый шар радиуса ε с центром в точке x). Обозначим $D_\varepsilon(x) = D \setminus U(x, \varepsilon)$. Тогда можем записать:

$$\vec{I}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \vec{I}_\varepsilon(x),$$

$$\vec{I}_\varepsilon(x) = \int_{D_\varepsilon(x)} \rho(y) \vec{E}(x-y) dy + \int_{D_\varepsilon(x)} \vec{\omega}(y) \times \vec{E}(x-y) dy.$$

Выражение для суммы интегралов $\vec{I}_\varepsilon(x)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \vec{I}_\varepsilon(x) &= \left\{ - \int_{D_\varepsilon(x)} \operatorname{div} \vec{w} \operatorname{grad}_z F(z-y) dy - \int_{D_\varepsilon(x)} \operatorname{rot} \vec{w} \times \operatorname{grad}_z F(z-y) dy \right\}_{z=x} = \\ &= \left\{ - \operatorname{grad}_z \int_{D_\varepsilon(x)} \operatorname{div} \vec{w} F(z-y) dy + \operatorname{rot}_z \int_{D_\varepsilon(x)} \operatorname{rot} \vec{w} F(z-y) dy \right\}_{z=x} = \\ &= \left\{ - \operatorname{grad}_z \int_{D_\varepsilon(x)} \operatorname{div}_y (\vec{w} F(z-y)) dy - \operatorname{grad}_z \int_{D_\varepsilon(x)} \vec{w} \operatorname{grad}_z (F(z-y)) dy \right\}_{z=x} + \\ &+ \left\{ \operatorname{rot}_z \int_{D_\varepsilon(x)} \operatorname{rot}_y (\vec{w}(y) \times F(z-y)) dy - \operatorname{rot}_z \int_{D_\varepsilon(x)} (\vec{w} \times \operatorname{grad}_z F(z-y)) dy \right\}_{z=x}, \end{aligned}$$

здесь $\vec{w} = \vec{w}(y)$.

Покажем, что вторые интегралы, вынесенные из каждой из фигурных скобок, в сумме равны 0 при $z = x$. Действительно, в силу формул векторного анализа:

$$\operatorname{grad} (\vec{f} \vec{g}) = (\vec{f} \vec{\nabla}) \vec{g} + (\vec{g} \vec{\nabla}) \vec{f} + \vec{f} \times \operatorname{rot} \vec{g} + \vec{g} \times \operatorname{rot} \vec{f},$$

$$\operatorname{rot} (\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{f} \operatorname{div} \vec{g} - \vec{g} \operatorname{div} \vec{f} + (\vec{g} \vec{\nabla}) \vec{f} - (\vec{f} \vec{\nabla}) \vec{g}$$

можем записать:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_z (\vec{w}(y) \operatorname{grad}_z (F(z-y))) + \operatorname{rot}_z (\vec{w}(y) \times \operatorname{grad}_z F(z-y)) &= \\ = (\vec{w} \vec{\nabla}_z) \operatorname{grad}_z F(z-y) - (\vec{w} \vec{\nabla}_z) \operatorname{grad}_z F(z-y) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\vec{I}_\varepsilon(x) = \left\{ - \operatorname{grad}_z \int_{D_\varepsilon(x)} \operatorname{div}_y (\vec{w} F(z-y)) dy \right\}_{z=x} +$$

2.8 Восстановление векторного поля по ротору и дивергенции. Область в границей

$$+ \left\{ \operatorname{rot}_z \int_{D_\varepsilon(x)} \operatorname{rot}_y (\vec{w} \times F(z-y)) dy \right\}_{z=x}.$$

Применяя к последним интегралам формулу Остроградского-Гаусса, можем записать:

$$\begin{aligned} \vec{I}_\varepsilon(x) = & \left\{ -\operatorname{grad}_z \int_{\partial D_\varepsilon(x)} (\vec{n} \vec{w} F(z-y)) dy \right\}_{z=x} + \\ & + \left\{ \operatorname{rot}_z \int_{\partial D_\varepsilon(x)} ((\vec{n} \times \vec{w}) \times F(z-y)) dy \right\}_{z=x}, \end{aligned}$$

здесь $\vec{n} = \vec{n}(y)$, $\vec{w} = \vec{w}(y)$

Последнюю формулу можно преобразовать к виду:

$$\vec{I}_\varepsilon(x) = \int_{\partial D_\varepsilon(x)} (\vec{n} \vec{w}) \vec{E}(x-y) dy + \int_{\partial D_\varepsilon(x)} (\vec{n} \times \vec{w}) \times \vec{E}(x-y) dy.$$

Теперь мы можем записать:

$$\begin{aligned} \vec{I}(x) = & \int_{\Sigma} (\vec{n} \vec{w}) \vec{E}(x-y) dy + \int_{\Sigma} (\vec{n} \times \vec{w}) \times \vec{E}(x-y) dy + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S(x,\varepsilon)} (\vec{n} \vec{w}) \vec{E}(x-y) dy + \int_{S(x,\varepsilon)} (\vec{n} \times \vec{w}) \times \vec{E}(x-y) dy \right\}, \end{aligned}$$

где $S(x, \varepsilon)$ – сфера с центром в точке x радиуса ε , вектор нормали $\vec{n} = \vec{n}(y)$ на сфере $S(x, \varepsilon)$ направлен внутрь сферы.

Для каждой точки y на поверхности сферы можем записать:

$$\vec{E}(x-y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \vec{n}(y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & (\vec{n}(y) \vec{w}(y)) \vec{E}(x-y) + (\vec{n}(y) \times \vec{w}(y)) \times \vec{E}(x-y) = \\ & = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \{ (\vec{n}(y) \vec{w}(y)) \vec{n}(y) + (\vec{n}(y) \times \vec{w}(y)) \times \vec{n}(y) \} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \vec{w}(y) = \frac{\vec{w}(x) + o(1)}{4\pi\varepsilon^2},$$

где $o(1)$ – некоторая функция от x, y , стремящаяся к 0 при $|x - y| = \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, равномерно по переменной y , $y \in S(x, \varepsilon)$.

Отсюда имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S(x, \varepsilon)} (\vec{n}\vec{w}) \vec{E}(x - y) dy + \int_{S(x, \varepsilon)} (\vec{n} \times \vec{w}) \times \vec{E}(x - y) dy \right\} = \vec{w}(x)$$

и мы получаем формулу (2.75).

Теорема доказана.

Глава 3

Поверхностные потенциалы

В главе 2 в разделе 2.3 были введены понятия поверхностных потенциалов простого и двойного слоя, которые определяются формулами (2.23)-(2.24). Было отмечено, что эти потенциалы удовлетворяют уравнению Гельмгольца (Лапласа в зависимости от выбора функции F указанных формулах) вне поверхности, по которой ведется интегрирование. В этой главе мы рассмотрим свойства краевых значений этих потенциалов и их градиентов на поверхности, на которой размещены их плотности.

3.1 Понятие краевых значений

Сначала напомним определения понятий краевых значений функции и ее нормальной производной. Пусть Σ некоторая кусочно-гладкая поверхность в трехмерном случае или кусочно-гладкая кривая в двумерном случае. Пусть $x \in \Sigma$ есть точка гладкости поверхности Σ , не лежащая на краю (конце при $n = 2$). Существует окрестность $U(x)$ точки x , которая делится поверхностью Σ на 2 части: $U^+(x)$, лежащую со стороны орта положительной нормали $\vec{n}(x)$, и $U^-(x)$, лежащую с противоположной стороны поверхности Σ .

Краевым значением функции u , определенной в окрестности $U^+(x)$, в точке x со стороны положительной нормали называется предел:

$$u^+(x) = \lim_{x' \rightarrow x, x' \in U^+(x)} u(x').$$

Аналогично, краевым значением функции u , определенной в окрестности $U^-(x)$, в точке x со стороны отрицательной нормали называется предел:

$$u^-(x) = \lim_{x'' \rightarrow x, x'' \in U^-(x)} u(x'').$$

Заметим, что в приведенных определениях функцию $u(x)$ можно рассматривать и как векторную функцию (векторное поле), т.е. как

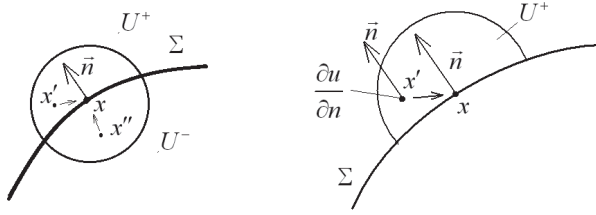


Рис. 3.1: К определению краевых значений функции (слева) и нормальной производной (справа)

функцию, которая каждой точке x ставит в соответствие вектор $u \in \mathbb{R}^n$. Соответственно мы получим определения для краевых значений векторного поля.

Теперь зафиксируем вектор нормали $\vec{n} = \vec{n}(x)$ и рассмотрим производные функции u по направлению этого вектора в окрестности точки x .

Для функции u , определенной в окрестности $U^+(x)$, краевым значением нормальной производной функции в точке x со стороны положительной нормали называется предел:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+(x) = \lim_{x' \rightarrow x, x' \in U^+(x)} \frac{\partial u(x')}{\partial n}, \quad (3.1)$$

где для всех точек $x' \in U^+(x)$ производная берется в направлении одного и того же вектора $\vec{n} = \vec{n}(x)$, т.е.

$$\frac{\partial u(x')}{\partial n} = \vec{n}(x) \text{grad } u(x').$$

Аналогично, для функции u , определенной в окрестности $U^-(x)$, краевым значением нормальной производной функции в точке x со стороны отрицательной нормали называется предел:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^-(x) = \lim_{x'' \rightarrow x, x'' \in U^-(x)} \frac{\partial u(x'')}{\partial n}, \quad (3.2)$$

где для всех точек $x' \in U^-(x)$ производная берется в направлении одного и того же вектора $\vec{n} = \vec{n}(x)$.

Пусть теперь Σ' – некоторый гладкий участок поверхности Σ , функция u определена и дифференцируема в точках вида $x = x_0 + h\vec{n}(x_0)$ (или $x = x_0 - h\vec{n}(x_0)$) при $h \in (0, h_0]$, где $h_0 > 0$. Будем говорить, что функция u имеет правильные значения нормальной производной $(\partial u / \partial n)^+$ (или $(\partial u / \partial n)^-$, соответственно) на участке Σ' , если

3.2 Некоторые вспомогательные утверждения

существует следующий предел в смысле равномерной сходимости по $x_0 \in \Sigma'$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^\pm(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{\partial u(x_0 \pm h\vec{n}(x_0))}{\partial n_0}, \quad (3.3)$$

$\partial/\partial n_0$ – производная по направлению вектора $\vec{n}(x_0)$.

3.2 Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть Σ – кусочно-гладкая кривая в пространстве \mathbb{R}^2 или кусочно-гладкая поверхность в пространстве \mathbb{R}^3 , D – некоторое множество на плоскости, если рассматривается кривая Σ , D – некоторое множество в пространстве, если рассматривается поверхность Σ .

Лемма 3.1. *Рассмотрим интеграл*

$$I(x) = \int_{\Sigma} \frac{K(x, y)}{|x - y|^\alpha} dy, \quad (3.4)$$

где $\alpha < \dim \Sigma$ ($\alpha < 1$ в случае криволинейного интеграла, $\alpha < 2$ в случае поверхностного интеграла), $K(x, y)$ – функция, определенная при $x \in D$, $y \in \Sigma$, и равномерно непрерывная по совокупности аргументов на множестве $D \times \Sigma$.

Тогда интеграл $I(x)$ определен при всех $x \in D$ и является равномерно непрерывной на множестве D функцией параметра x .

Доказательство. Интеграл $I(x)$ существует при всех $x \in D$ в силу теорем 1.4 и 1.5.

Пусть $\omega(r)$ – модуль непрерывности функции $K(x, y)$ (см. определение 1.12). В силу равномерной непрерывности функции K выполнено условие $\omega(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$.

Тогда для любых точек $x, x' \in D$ можем записать:

$$\begin{aligned} I(x) - I(x') &= \Delta_1 + \Delta_2, \\ \Delta_1 &= \int_{\Sigma} \frac{1}{|x - y|^\alpha} (K(x, y) - K(x', y)) dy, \\ \Delta_2 &= \int_{\Sigma} K(x', y) \left(\frac{1}{|x - y|^\alpha} - \frac{1}{|x' - y|^\alpha} \right) dy. \end{aligned}$$

При этом

$$|\Delta_1| \leq \omega(|x - x'|) \int_{\Sigma} \frac{1}{|x - y|^\alpha} dy,$$

и в силу леммы 1.3

$$|\Delta_2| \leq |x - x'|^\mu C(\alpha, \mu) \int_{\Sigma} |K(x', y)| \left(\frac{1}{|x - y|^{\alpha+\mu}} + \frac{1}{|x' - y|^{\alpha+\mu}} \right) dy,$$

μ – константа, которую мы выберем произвольным образом в интервале $(0, 1)$, $C(\alpha, \mu)$ – константа из леммы 1.3.

Тогда, учитывая ограниченность функции K и применяя теорему 1.6, можем записать:

$$|I(x) - I(x')| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2| \leq A (\omega(|x - x'|) + |x - x'|^\mu),$$

где A – некоторая константа, не зависящая от выбора точек $x, x' \in D$. Но из последней оценки сразу следует равномерная непрерывность функции $I(x)$ на множестве D .

Лемма доказана.

Теперь предположим, что Σ – гладкая поверхность в пространстве \mathbb{R}^3 или гладкая кривая в пространстве \mathbb{R}^2 . При этом поверхность (кривая) может быть замкнутой, а может быть разомкнутой с краем (разомкнутой кривой с концами), являясь измеримой частью гладкой замкнутой поверхности (кривой).

Лемма 3.2. А) Рассмотрим интеграл

$$J(h, x_0) = \int_{\Sigma} \frac{K(x, y)}{|x - y|^\alpha} (\varphi(y) - \varphi(x_0)) dy, \quad x = x_0 + h\vec{n}(x_0),$$

где φ – функция на поверхности (кривой) Σ , непрерывная по Гельдеру с показателем $\mu \in (0, 1]$, $K(x, y)$ – функция, определенная при $x \in D$, $y \in \Sigma$, и равномерно непрерывная по совокупности аргументов на множестве $D \times \Sigma$, $\alpha < \dim \Sigma + \mu$ ($\alpha < 1 + \mu$ в случае криволинейного интеграла, $\alpha < 2 + \mu$ в случае поверхностного интеграла), x_0 – точка на поверхности (кривой) Σ , причем, мы предполагаем, что множество Σ , вместе с некоторой своей окрестностью, содержится в множестве D .

Тогда

$$\lim_{h \rightarrow 0} J(h, x_0) = J(0, x_0) \tag{3.5}$$

в смысле равномерной сходимости по $x_0 \in \Sigma$.

Б) Рассмотрим функцию

$$u(x, x_0) = \int_{\Sigma} \frac{K(x, y)}{|x - y|^\alpha} (\varphi(y) - \varphi(x_0)) dy, \quad x \in D \setminus \Sigma, \quad x_0 \in \Sigma,$$

где $K(x, y)$ и $\varphi(y)$ – те же функции, что и в пункте А. Тогда, при каждом $x_0 \in \Sigma \setminus \partial \Sigma$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in D \setminus \Sigma} u(x, x_0).$$

Доказательство. А) Проведем доказательство для случая поверхностного интеграла.

3.2 Некоторые вспомогательные утверждения

Пусть $x_0 \in \Sigma$, $x = x_0 + h\vec{n}(x_0)$. Здесь мы предполагаем, что выполнено предположение 1.3 и $|h| < r$, r – константа из предположения 1.3. Если поверхность разомкнута с краем, то она является частью гладкой замкнутой поверхности и предположение 1.3 применяется к этой замкнутой поверхности.

Представим разность $d(h) = J(h, x) - J(h, x_0)$ в виде:

$$d(h) = \int_{\Sigma} \left(\frac{K(x, y)}{|x - y|^{\alpha}} - \frac{K(x_0, y)}{|x_0 - y|^{\alpha}} \right) (\varphi(y) - \varphi(x_0)) dy = d_1(h) + d_2(h),$$

где

$$d_1(h) = \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{|x - y|^{\alpha}} - \frac{1}{|x_0 - y|^{\alpha}} \right) K(x, y) (\varphi(y) - \varphi(x_0)) dy,$$

$$d_2(h) = \int_{\Sigma} (K(x, y) - K(x_0, y)) \frac{1}{|x_0 - y|^{\alpha}} (\varphi(y) - \varphi(x_0)) dy.$$

Т.к. функция $K(x, y)$ равномерно непрерывна при $x \in D$, $y \in \Sigma$, а функция φ непрерывна по Гельдеру, выполнены оценки

$$|K(x, y)| \leq C_K, \quad |\varphi(y) - \varphi(x_0)| \leq C_{\varphi} |y - x_0|^{\mu}$$

с некоторыми константами C_K и C_{φ} . Учитывая, что точка x_0 есть ближайшая к точке x точка поверхности Σ , можем записать:

$$|x_0 - y| \leq |x - x_0| + |x - y| \leq 2|x - y|.$$

Взяв $\delta > 0$ так, что $\alpha + \delta - \mu < 2$ и используя лемму 1.3, можем записать:

$$|d_1(h)| = C_K C_{\varphi} |x - x_0|^{\delta} \int_{\Sigma} \frac{1}{|x_0 - y|^{\alpha + \delta - \mu}} dy,$$

и тогда, с учетом теоремы 1.6, имеем:

$$|d_1(h)| = C_1 h^{\delta},$$

где C_1 – некоторая константа, не зависящая от точки x_0 и значения h .

Далее, пусть $\omega(r)$ – модуль непрерывности функции $K(x, y)$. Тогда

$$|d_2(h)| = \omega(h) \int_{\Sigma} \frac{C_{\varphi}}{|x_0 - y|^{\alpha + \mu}} dy \leq C_2 \omega(h),$$

где C_2 так же есть некоторая константа, не зависящая от точки x_0 и значения h .

Из полученных оценок следует, что $d(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ в смысле равномерной сходимости по $x_0 \in \Sigma$.

Пункт А) леммы доказан.

Б) Возьмем некоторую точку $x_0 \in \Sigma$. Найдется окрестность этой точки $U(x_0, r)$ некоторого радиуса $r > 0$, такая, что $U(x_0, r) \subset D$ и каждая точка x из этой окрестности представляется в виде:

$$x = z + h\vec{n}(z), \quad (3.6)$$

где $z \in \Sigma$, $h \in R$, и при этом z есть ближайшая к точке x точка на поверхности Σ .

Т.к. предел (3.5) существует в смысле равномерной сходимости по $x_0 \in \Sigma$, функция $J(0, x_0)$ из пункта А) непрерывна как функция от аргумента x_0 на поверхности Σ . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что для любой точки $z \in \Sigma$, удовлетворяющей условию $|x_0 - z| < \delta_1$, выполнено условие

$$|J(0, z) - J(0, x_0)| < \varepsilon/2.$$

Также для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_2 > 0$, что при $|h| < \delta_2$ выполнено условие

$$|J(h, z) - J(0, z)| < \varepsilon/2$$

для любого $z \in \Sigma$.

Возьмем $\delta > 0$ как минимум из чисел $\delta_1/2$, $\delta_2/2$ и r . Тогда если $x \in D \setminus \Sigma$ и выполнено условие $|x - x_0| < \delta$, то $x \in U(x_0, r)$, точка x представляется в виде (3.6), причем,

$$|h| = |x - z| \leq |x - x_0| < \delta < \delta_2, \quad |x_0 - z| \leq |x - x_0| + |h| < 2\delta < \delta_1.$$

Но тогда справедливы оценки:

$$\begin{aligned} |u(x, x_0) - J(0, x_0)| &= |J(h, z) - J(0, x_0)| \leq \\ &\leq |J(h, z) - J(0, z)| + |J(0, z) - J(0, x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in D \setminus \Sigma} u(x, x_0) = J(0, x_0).$$

Лемма доказана.

3.3 Непрерывность потенциала простого слоя

Рассмотрим потенциал простого слоя

$$u(x) = V_\Sigma[\nu](x) = \int_\Sigma \nu(y)F(x - y)dy, \quad (3.7)$$

3.3 Непрерывность потенциала простого слоя

где Σ – замкнутая или разомкнутая кусочно-гладкая поверхность в пространстве \mathbb{R}^3 (или кусочно-гладкая кривая в пространстве \mathbb{R}^2),

$$F(x - y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}$$

в пространственном случае,

$$F(x - y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr)$$

в плоском случае (см. (2.20)), $r = |x - y|$. Заметим, что функция F уже вводилась и обсуждалась в главе 2 (п. 2.3).

Теорема 3.1. *Если функция $\nu(y)$ является непрерывной на поверхности Σ , то выражение (3.7) определяет функцию $u(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ и эта функция непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Утверждение теоремы сразу следует из леммы 3.1.

В трехмерном случае функция $u(x)$ представляется в виде интеграла (3.7) с $\alpha = 1$,

$$K(x, y) = \nu(y)e^{ik|x-y|}.$$

При этом для любого ограниченного множества $D \subset \mathbb{R}^3$ выполнено условие: функция $K(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов на множестве $D \times \Sigma$. Значит функция $u(x)$ определена и непрерывна при $x \in D$.

В двумерном случае заметим, что функция $|x - y|^{1/2} F(x - y)$ непрерывна при всех $x, y \in \mathbb{R}^2$, если ее доопределить равной 0 при $x = y$ (см. формулу (2.21)). Тогда функция $u(x)$ представляется в виде интеграла (3.7) с $\alpha = 1/2$,

$$K(x, y) = \nu(y)F(x - y)|x - y|^{1/2}.$$

Из леммы 3.1 опять следует, что функция $u(x)$ определена и непрерывна при $x \in D$.

Теорема доказана.

Замечание. Значения потенциала простого слоя – функции $u(x)$, получаемые непосредственно из выражения (3.7) при $x \in \Sigma$, называются прямыми значениями потенциала простого слоя на поверхности Σ . Из теоремы 3.1 следует, что функция $u(x)$ имеет в каждой точке гладкости поверхности Σ , не лежащей на ее краю, краевые значения $u^+(x)$ и $u^-(x)$, которые совпадают между собой и с прямым значением $u(x)$, т.е.

$$u^+(x) = u^-(x) = u(x),$$

$x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ – точка гладкости поверхности Σ .

3.4 Краевые значения потенциала двойного слоя

3.4.1 Прямые значения потенциала двойного слоя. Рассмотрим потенциал двойного слоя

$$u(x) = U_{\Sigma}[\nu](x) \equiv \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy, \quad (3.8)$$

$$F(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}$$

в пространственном случае,

$$F(x-y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr)$$

в плоском случае, $r = |x-y|$.

Лемма 3.3. Пусть Σ – гладкая поверхность, $\nu(y)$ – непрерывная функция на поверхности Σ .

Тогда при каждом $x \in \Sigma$ существует значение $u(x)$, определяемое формулой (3.8) – прямое значение потенциала двойного слоя в точке x .

При этом функция $u(x)$, определяемая формулой (3.8) на поверхности Σ , является непрерывной функцией на этой поверхности.

Доказательство. Рассмотрим пространственный случай. Справедливы формулы:

$$\text{grad}_y F(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \text{grad}_y r = \frac{y-x}{4\pi} \frac{ikr-1}{r^3} e^{ikr}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} = \frac{(\vec{n}(y), y-x)}{4\pi} \frac{ikr-1}{r^3} e^{ikr}, \quad (3.10)$$

первая из этих формул выполнена при всех $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$, вторая при $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \Sigma$, $y \neq x$.

Пусть $x, y \in \Sigma$. Заметим, что если построить касательную плоскость к поверхности Σ в точке y и построить точку x^* проекцию точки x на эту плоскость, то

$$|x-x^*| \leq C_1 |y-x|^2,$$

где C_1 – некоторая константа, зависящая только от поверхности Σ (это следует из предположения 1.5 и оценок (1.27)). Тогда

$$|(\vec{n}(y), y-x)| \leq C |x-y|^2$$

3.4 Краевые значения потенциала двойного слоя

и функция

$$K(x, y) = \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y}, \quad x, y \in \Sigma,$$

определена и непрерывна при $x \neq y$, а также подчинена оценке:

$$|K(x, y)| = \left| \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} \right| \leq \frac{C_2}{|x - y|}, \quad (3.11)$$

C_2 – некоторая константа, зависящая только от поверхности Σ .

Возьмем произвольное $\mu \in (0, 1)$. Тогда функция

$$K^*(x, y) = K(x, y) |x - y|^{1+\mu}$$

будет непрерывна по совокупности аргументов $(x, y) \in \Sigma \times \Sigma$, если доопределить $K^*(x, y) = 0$ при $x = y$. При этом ядро $K(x, y)$ представляется в виде

$$K(x, y) = \frac{K^*(x, y)}{|x - y|^{1+\mu}}. \quad (3.12)$$

Теперь из теоремы 1.10 следует утверждение настоящей леммы.

В плоском случае доказательство аналогично, если учесть, что при $r \rightarrow 0$ выполнена асимптотика (2.21).

Лемма доказана.

3.4.2 Потенциал двойного слоя с плотностью равной 1. Рассмотрим потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа с плотностью равной 1:

$$u(x) = \int_{\Sigma} \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy, \quad F(x - y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}, \quad (3.13)$$

где Σ – замкнутая гладкая поверхность, которая делит пространство на две области: Ω^+ – внешнюю, и Ω^- – внутреннюю.

Лемма 3.4. Для функции $u(x)$ справедливы формулы:

$$u(x) = \begin{cases} -1, & x \in \Omega^-, \\ -1/2, & x \in \Sigma, \\ 0, & x \in \Omega^+. \end{cases} \quad (3.14)$$

Доказательство. Если точка x лежит во внешней области Ω^+ , то функция $f(y) = F(x - y)$, где точку x мы считаем фиксированной, является гармонической области Ω^- и удовлетворяет условию $f \in C^2(\overline{\Omega^-})$. Тогда

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial n} dy = 0,$$

а значит $u(x) = 0$.

Если точка x лежит во внутренней области Ω^- , построим окрестность точки x радиуса ε – открытый шар $U(x, \varepsilon)$, которая целиком содержится во внутренности множества Ω^- . Пусть $\Omega_\varepsilon = \Omega^- \setminus U(x, \varepsilon)$. При этом границей Ω_ε является объединение поверхности Σ и сферы $S(x, \varepsilon)$ с центром в точке x радиуса ε , а функция $f(y) = F(x - y)$ является гармонической в области Ω_ε . Тогда справедливы равенства:

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial n} dy = \int_\Sigma \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy + \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy,$$

где на поверхности сферы $S(x, \varepsilon)$ нормаль берется направленной внутрь сферы.

Но тогда

$$\int_\Sigma \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy = - \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy.$$

На поверхности сферы $S(x, \varepsilon)$ выполнено равенство (см. формулу (2.29))

$$\frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} = \frac{1}{4\pi \varepsilon^2}. \quad (3.15)$$

Но тогда

$$u(x) = - \int_{S(x, \varepsilon)} \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy = -1.$$

Наконец, рассмотрим случай, когда точка x лежит на поверхности Σ (по условию все точки поверхности Σ являются точками гладкости). Опять построим окрестность точки x радиуса ε – открытый шар $U(x, \varepsilon)$, границей которого является сфера $S(x, \varepsilon)$. Если радиус ε достаточно мал, то пересечение поверхности Σ и шара $U(x, \varepsilon)$ есть некоторая элементарная разомкнутая поверхность с краем S_ε .

Обозначим $S^-(x, \varepsilon)$ – часть сферы $S(x, \varepsilon)$, лежащую в области Ω^- и обозначим $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \setminus U(x, \varepsilon)$ – часть поверхности Σ , лежащую вне сферы $S(x, \varepsilon)$.

Опять заметим, что функция $f(y) = F(x - y)$ является гармонической в области $\Omega^- \setminus U(x, \varepsilon)$, границей которой является объединение поверхности Σ_ε и части сферы $S^-(x, \varepsilon)$. Тогда

$$0 = \int_{\Sigma_\varepsilon \cup S^-(x, \varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial n} dy = \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy + \int_{S^-(x, \varepsilon)} \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy,$$

на поверхности $S^-(x, \varepsilon)$ нормаль направлена к точке x . Тогда

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy = - \int_{S^-(x, \varepsilon)} \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy$$

3.4 Краевые значения потенциала двойного слоя

и справедливо равенство:

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S^-(x, \varepsilon)} \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy.$$

Ясно, что последний интеграл есть интеграл от функции, равной константе (3.15) по поверхности $S^-(x, \varepsilon)$, которая близка при малых значениях параметра ε к половине сферы радиуса ε . Значит этот интеграл близок к $1/2$.

Для строгой оценки этого интеграла построим касательную плоскость к поверхности Σ в точке x . Пусть $y \in S(x, \varepsilon)$ и пусть y^* есть проекция точки y на касательную плоскость π_x . Пусть $\theta = \theta(y)$ – угол между лучом $[x, y)$ и плоскостью π_x , причем, считаем этот угол положительным, если точка y лежит с той стороны от плоскости π_x , на которую указывает вектор нормали $\vec{n}(x)$.

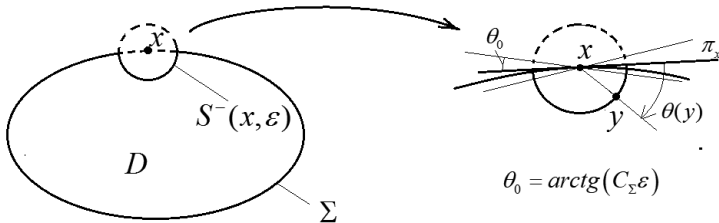


Рис. 3.2: Случай $x \in \Sigma$

Существует константа C_Σ , зависящая только от поверхности Σ , такая, что если $y \in \Sigma$, то

$$|y - y^*| \leq C_\Sigma |x - y^*|^2$$

(см. оценки (1.27)). Тогда для такой точки

$$|\theta(y)| \leq \arctg(C_\Sigma \varepsilon).$$

Значит поверхность $S^-(x, \varepsilon)$ заведомо содержит все точки $y \in S(x, \varepsilon)$ для которых

$$-\pi + \arctg(C_\Sigma \varepsilon) \leq \theta(y) < -\arctg(C_\Sigma \varepsilon)$$

и заведомо не содержит те точки $y \in S(x, \varepsilon)$ для которых

$$\arctg(C_\Sigma \varepsilon) < \theta(y) < \pi - \arctg(C_\Sigma \varepsilon).$$

Тогда

$$u(x) = - \int_{S^-(x,\varepsilon)} \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy = - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{S^-(x,\varepsilon)} dy$$

и переходя к сферическим координатам, в которых зенитный угол θ отсчитывается от плоскости π_x , можем записать:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi+\arctg(C_\Sigma\varepsilon)}^{-\arctg(C_\Sigma\varepsilon)} \cos\theta d\theta \leq u(x) \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi-\arctg(C_\Sigma\varepsilon)}^{\arctg(C_\Sigma\varepsilon)} \cos\theta d\theta.$$

Но тогда, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$u(x) = - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi}^0 \cos\theta d\theta = - \frac{1}{2}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что в плоском случае для потенциала двойного слоя (3.13) с функцией

$$F(x-y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|},$$

где Σ – замкнутая кусочно-гладкая кривая, которая делит плоскость на две области: Ω^+ – внешнюю, и Ω^- – внутреннюю, также справедлива формула (3.14). Доказательство проводится аналогично.

3.4.3 Краевые значения потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью. Теперь пусть

$$u(x) = U_\Sigma[\nu](x) = \int_\Sigma \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy, \quad (3.16)$$

Σ – замкнутая кусочно-гладкая ориентированная поверхность (замкнутая или разомкнутая с краем), $F(x-y)$ – потенциал точечного заряда для уравнения Гельмгольца, определяемый формулами (2.15) или (2.20).

Теорема 3.2. Если функция $\nu(y)$ непрерывна на поверхности Σ , то в каждой точке $x \in \Sigma$, являющейся точкой гладкости этой поверхности и не лежащей на ее краю, функция $u(x)$ – потенциал двойного слоя, определяемый формулой (3.16), имеет краевые значения определяемые формулой:

$$u^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} \nu(x) + u(x), \quad (3.17)$$

где $u(x)$ – прямое значение потенциала двойного слоя, определяемое непосредственно выражением (3.16) для данной точки x .

3.4 Краевые значения потенциала двойного слоя

Для доказательства этой теоремы сначала докажем следующую лемму.

Лемма 3.5. Пусть Σ – гладкая замкнутая поверхность. Тогда для этой поверхности существует константа K такая, что для любой точки $x \in R^3$

$$\int_{\Sigma} \left| \frac{\partial F_0(x-y)}{\partial n_y} \right| dy \leq K, \quad (3.18)$$

где $F_0(x-y)$ – потенциал точечного заряда для уравнения Лапласа, определяемый формулой (2.12).

Доказательство. Сразу заметим, что если $x \in \Sigma$, то оценка (3.18) следует из оценки (3.11) и теоремы 1.6. Поэтому будем рассматривать случай $x \notin \Sigma$.

Сначала напомним, что согласно предположению 1.5 существует $r_0 > 0$ такое, что для любой точки $a \in \Sigma$ участок $\Sigma(a, r_0)$ поверхности Σ , вырезаемый цилиндром $\mathbf{C}(a, r_0)$, может быть задан в специальной системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в точке $O = a$ уравнением $\xi_3 = \psi(\xi_1, \xi_2)$ с выполнением оценок (1.26), (1.27). При этом константу r_0 можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\psi(\xi_1, \xi_2)| \leq \frac{1}{2} |\xi|, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \quad (3.19)$$

для всех ξ таких, что $|\xi| \leq r_0$.

Интеграл от любой функции f , определенной на поверхности $\Sigma(a, r_0)$, представляется в виде:

$$\int_{\Sigma(a, r_0)} f(y) dy = \int_{\xi: |\xi| < r_0} f(y(\xi)) J(\xi_1, \xi_2) dy,$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $y(\xi)$ – параметрическая зависимость точки $y \in \Sigma(a, r_0)$ от координат ξ_1, ξ_2 , $J(\xi_1, \xi_2)$ якобиан, причем, найдется константа C_1 , зависящая только от поверхности Σ , такая, что

$$|J(\xi_1, \xi_2)| \leq C_1.$$

Теперь пусть x произвольная точка, не лежащая на поверхности Σ . Если расстояние от точки x до поверхности Σ больше, чем $r_0/2$, то неравенство (3.18), очевидно, выполнено с некоторой константой K , не зависящей от точки x .

Предположим, что расстояние от точки x до поверхности Σ равно δ и $\delta \leq r_0/2$. Тогда существует точка $a \in \Sigma$ – ближайшая к точке x точка на поверхности Σ , причем, в этом случае точка x лежит на нормали к поверхности, проведенной из точки a и $|x - a| = \delta$.

Построим специальную систему координат с началом в точке a , построим цилиндр $\mathbf{C}(a, r_0)$ и выделим лежащий внутри него участок $\Sigma(a, r_0)$ поверхности Σ .

Тогда рассматриваемый интеграл можно представить в виде суммы интегралов

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial F_0(x-y)}{\partial n_y} \right| dy &= I_1 + I_2, \\ I_1 &= \int_{\Sigma(a, r_0)} \left| \frac{\partial F_0(x-y)}{\partial n_y} \right| dy, \\ I_2 &= \int_{\Sigma \setminus \Sigma(a, r_0)} \left| \frac{\partial F_0(x-y)}{\partial n_y} \right| dy. \end{aligned}$$

Сразу заметим, что если $y \in \Sigma \setminus \Sigma(a, r_0)$, то $|x-y| \geq r_0$. Поэтому интеграл I_2 ограничен некоторой константой K , не зависящей от точки x .

Рассмотрим интеграл I_1 . Пусть точка y лежит на участке $\Sigma(a, r_0)$ поверхности Σ и пусть эта точка имеет координаты в специальной системе координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Построим точку y^* – проекцию точки y на плоскость $O\xi_1\xi_2$. Тогда выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} |x-y| &\leq 2r_0, \\ |y-y^*| &= |\xi_3| \leq \frac{1}{2} |\xi| = \frac{1}{2} |x-y^*|. \end{aligned}$$

Для подынтегральной функции справедливо выражение:

$$\left| \frac{\partial F_0(x-y)}{\partial n_y} \right| = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{(x-y, n(y))}{|x-y|^3} \right|.$$

Заметим, что

$$|x-y| \geq |x-y^*| - |y-y^*| \geq \frac{1}{2} |x-y^*| = \frac{1}{2} (\delta^2 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial F_0(x-y)}{\partial n_y} \right| \leq \frac{1}{4\pi} \frac{\delta + |\xi_3|}{|x-y|^3} \leq \frac{2}{\pi} \frac{\delta + C_0 |\xi|^2}{(|\xi|^2 + \delta^2)^{3/2}}.$$

Поэтому

$$I_1 \leq \frac{2}{\pi} \int_{\xi: \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq r_0^2} \frac{\delta C_1 d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_1^2 + \delta^2)^{3/2}} + \frac{2C_0 C_1}{\pi} \int_{\xi: \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq r_0^2} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_1^2)^{1/2}}.$$

3.4 Краевые значения потенциала двойного слоя

Осталось заметить, что оба интеграла вычисляются переходом к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \int_{\xi: \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq r_0^2} \frac{\delta d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \delta^2)^{3/2}} &= \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} \frac{r dr}{(r^2 + \delta^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{2\pi\delta}{\sqrt{r^2 + \delta^2}} \Big|_0^{r_0} \leq 2\pi, \\ \int_{\xi: \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq r_0^2} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} \frac{r dr}{(r^2 + \delta^2)^{1/2}} = 2\pi (r^2 + \delta^2)^{1/2} \Big|_0^{r_0} \leq \\ &\leq 2\pi (r_0^2 + \delta^2)^{1/2} \leq 4\pi r_0. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл I_1 также ограничен некоторой константой K , не зависящей от точки x .

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Доказательство теоремы проведем, рассмотрев несколько случаев:

1-й случай: потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа, размещенного на замкнутой гладкой поверхности.

2-й случай: потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца размещенного на гладкой замкнутой поверхности.

3-й случай: общий случай потенциала двойного слоя для уравнения Гельмгольца на кусочно-гладкой поверхности (замкнутой или разомкнутой).

1-й случай. Пусть поверхность Σ является гладкой, замкнутой и делит пространство на две области: Ω^+ – внешнюю, и Ω^- – внутреннюю, а $F(x - y)$ – потенциал точечного заряда для уравнения Лапласа.

Пусть $x_0 \in \Sigma$. Представим функцию $u(x)$ в виде:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_1(x) + u_2(x), \\ u_1(x) &= \nu(x_0) \int_{\Sigma} \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy, \\ u_2(x) &= \int_{\Sigma} (\nu(y) - \nu(x_0)) \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy. \end{aligned}$$

В силу леммы 3.4 функция $u_1(x)$ имеет в точке x_0 крайние значения

$$u_1^+(x_0) = 0, \quad u_1^-(x_0) = -\nu(x_0),$$

причем, в этой точке существует так же и прямое значение

$$u_1(x_0) = -\nu(x_0)/2$$

(т.е. значение получаемое непосредственно из выражения для функции $u_1(x)$ при $x = x_0$). Тогда мы можем записать:

$$u_1^\pm(x_0) = \pm \frac{1}{2} \nu(x_0) + u(x_0).$$

Далее рассмотрим функцию $u_2(x)$. Докажем, что эта функция непрерывна в точке x_0 .

Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к. функция ν непрерывна на поверхности Σ , найдется такое $r > 0$, что

$$|\nu(y) - \nu(x_0)| < \varepsilon/(3K) \text{ при } y \in \Sigma, |y - x_0| < r,$$

где K – константа из леммы 3.5.

Разобьем интеграл в выражении для функции $u_2(x)$ на две части, представив эту функцию в виде:

$$\begin{aligned} u_2(x) &= u_{21}(x) + u_{22}(x), \\ u_{21}(x) &= \int_{y \in \Sigma, |y - x_0| < r} (\nu(y) - \nu(x_0)) \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy, \\ u_{22}(x) &= \int_{y \in \Sigma, |y - x_0| \geq r} (\nu(y) - \nu(x_0)) \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy. \end{aligned}$$

По выбору параметра r для любой точки $x \in R^3$ имеем:

$$\begin{aligned} |u_{21}(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2K} \int_{y \in \Sigma, |y - x_0| < r} \left| \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} \right| dy \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2K} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} \right| dy \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Функция $u_{22}(x)$ непрерывна в точке x_0 , а значит, существует такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ выполнено неравенство

$$|u_{22}(x) - u_{22}(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Но тогда при $x \in R^3$, $|x - x_0| < \delta$ имеем:

$$\begin{aligned} |u_2(x) - u_2(x_0)| &\leq |u_{21}(x)| + |u_{21}(x_0)| + |u_{22}(x) - u_{22}(x_0)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Непрерывность функции $u_2(x)$ в точке x_0 доказана.

3.4 Краевые значения потенциала двойного слоя

Значит, существуют краевые значения $u_2^\pm(x) = u_2(x)$, где $u_2(x)$ – прямое значение этой функции.

Тогда функция u имеет в точке x_0 краевые значения

$$u^\pm(x_0) = u_1^\pm(x_0) + u_2^\pm(x_0)$$

и верна формула (3.17).

2-й случай. Теперь рассмотрим случай потенциала двойного слоя для уравнения Гельмгольца, поверхность Σ по-прежнему является гладкой, замкнутой. В этом случае функцию $F(x - y)$ представим в виде:

$$F(x - y) = F_0(x - y) + F^*(x - y),$$

где

$$F_0(x - y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}, \quad F^*(x - y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr} - 1}{r}, \quad r = |x - y|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + u^*(x), \\ u_0(x) &= \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F_0(x - y)}{\partial n_y} dy, \\ u^*(x) &= \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F^*(x - y)}{\partial n_y} dy. \end{aligned}$$

Для функции u_0 – потенциала двойного слоя для уравнения Лапласа, справедлива формула (3.17). Докажем, что функция $u^*(x)$ непрерывна на поверхности Σ .

Действительно,

$$\frac{\partial F^*(x - y)}{\partial n_y} = \frac{(\vec{n}(y), y - x)}{4\pi} \frac{(ikr - 1)e^{ikr} - 1}{r^3}$$

(эта формула следует из формулы (3.10)).

Далее легко показать, что

$$(ikr - 1)e^{ikr} - 1 = O(r^2)$$

и тогда функция $\partial F^*(x - y)/\partial n_y$ ограничена при $x \in R^3$, $y \in \Sigma$. Но тогда эта функция представляется в виде

$$\frac{\partial F^*(x - y)}{\partial n_y} = \frac{K^*(x, y)}{|x - y|^\alpha},$$

где $\alpha \in (0, 1)$,

$$K^*(x, y) = |x - y|^\alpha \partial F^*(x - y)/\partial n_y,$$

причем, $K^*(x, y)$ – функция, непрерывная при $x \in R^3$, $y \in \Sigma$, если ее доопределить равной 0 при $x = y$. Тогда непрерывность функции $u^*(x)$ следует из леммы 3.1.

Значит формула (3.17) выполнена для функции $u(x)$.

3-й случай. Наконец, рассмотрим случай, когда поверхность Σ есть произвольная кусочно-гладкая поверхность.

Пусть x_0 – точка гладкости поверхности Σ .

По предположению 1.2 о свойствах поверхностей, эта точка лежит на некоторой гладкой разомкнутой компоненте Σ_k поверхности Σ , а эта разомкнутая компонента Σ_k может быть достроена до гладкой замкнутой поверхности Σ'_k .

Найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что в окрестности $U(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 радиуса ε нет точек поверхностей $\Sigma \setminus \Sigma_k$ и $\Sigma'_k \setminus \Sigma_k$.

Далее, разложим функцию $\nu(y)$ на сумму непрерывных слагаемых

$$\nu = \nu_1 + \nu_2, \quad (3.20)$$

так, что

$$\nu_1(y) = 0 \text{ при } |y - x_0| \geq \varepsilon/2,$$

$$\nu_2(y) = 0 \text{ при } |y - x_0| \leq \varepsilon/4.$$

Это можно сделать, например, построив непрерывную функцию $\theta(\rho)$, $\rho \in [0, \infty)$ так, что $\theta(\rho) = 0$ при $\rho \in [0, 1]$, $\theta(\rho) = 1$ при $\rho \in [2, \infty)$. Далее можно положить

$$\nu_1(y) = \left(1 - \theta\left(\frac{4|x_0 - y|}{\varepsilon}\right)\right) \nu(y), \quad \nu_2(y) = \theta\left(\frac{4|x_0 - y|}{\varepsilon}\right) \nu(y). \quad (3.21)$$

Тогда функцию $u(x) = U_\Sigma[\nu](x)$ можно представить в виде

$$u(x) = u_1(x) + u_1(x),$$

$$u_1(x) = U_\Sigma[\nu_1](x), \quad u_2(x) = U_\Sigma[\nu_2](x).$$

Определим на замкнутой поверхности Σ'_k функцию $\tilde{\nu}_1$ как $\tilde{\nu}_1 = \nu_1$ на Σ'_k , $\tilde{\nu}_1 = 0$ на $\Sigma'_k \setminus \Sigma_k$. При этом функция $\tilde{\nu}_1$ непрерывна на поверхности Σ'_k и

$$u_1(x) = U_{\Sigma'_k}[\tilde{\nu}_1](x).$$

Значит по доказанному выше функция $u_1(x)$ имеет в точке x_0 краевые значения, для которых справедлива формула

$$u_1(x_0) = \pm \frac{1}{2} \nu(x_0) + u_1(x_0),$$

$u_1(x_0)$ – прямое значение в точке x_0 .

3.5 Нормальная производная потенциала простого слоя

Функция u_2 представляется в виде

$$u_2(x) = U_{\Sigma \setminus U(x_0, \varepsilon)}[\nu_2](x).$$

Точка x_0 лежит вне поверхности $\Sigma \setminus U(x_0, \varepsilon)$, поэтому функция u_2 непрерывна в точке x_0 . Значит для функции u справедливо утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Отметим, что теорема 3.2 справедлива и в плоском случае, если Σ – кусочно-гладкая кривая в пространстве R^2 .

Теорема 3.3. *Если функция $\nu(y)$ непрерывна на кривой Σ , то в каждой точке $x \in \Sigma$, являющейся точкой гладкости этой кривой и не являющейся ее концом, функция $u(x)$ – потенциал двойного слоя, определяемый формулой (3.16), имеет краевые значения определяемые формулой:*

$$u^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} \nu(x) + u(x),$$

где $u(x)$ – прямое значение, определяемое непосредственно выражением (3.16) для данной точки x .

Доказательство можно провести в аналогичной последовательности как для случая поверхностного потенциала.

3.5 Нормальная производная потенциала простого слоя

Теперь рассмотрим краевые значения нормальной производной потенциала простого слоя. Пусть

$$u(x) = V_\Sigma[\nu](x) = \int_\Sigma \nu(y) F(x - y) dy, \quad (3.22)$$

где, для начала, Σ – замкнутая гладкая ориентированная поверхность в пространстве или гладкая замкнутая кривая на плоскости, $F(x - y)$ – потенциал точечного заряда для уравнения Гельмгольца, определяемый формулами (2.15), (2.20).

Теорема 3.4. *Если функция $\nu(y)$ непрерывна на поверхности (кривой) Σ , то функция u – потенциал простого слоя (3.22) имеет правильные значения нормальной производной $(\partial u / \partial n)^+$ и $(\partial u / \partial n)^-$ на поверхности (кривой) Σ , причем, выполнено равенство*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^\pm(x) = \mp \frac{1}{2} \nu(x) + \frac{\partial u}{\partial n}(x), \quad x \in \Sigma, \quad (3.23)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – прямые значения нормальной производной, под которыми понимается следующее выражение

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_x} dy,$$

$$\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_x} = (\vec{n}(x), \text{grad}_x F(x-y)), \quad x \in \Sigma.$$

Доказательство. Доказательство проведем для случая поверхностного потенциала в пространстве (плоский случай рассматривается аналогично).

Рассмотрим функцию

$$J(h, x_0) = \int_{\Sigma} \nu(y) (\vec{n}(x_0), \text{grad}_x F(x-y)) dy,$$

где $x_0 \in \Sigma$, $x = x_0 + h\vec{n}(x_0)$, $h \in \mathbb{R}$. Нужно доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow \pm 0} J(h, x_0) = \mp \frac{1}{2} \nu(x_0) + J(0, x_0),$$

где предел понимается в смысле равномерной сходимости по $x_0 \in \Sigma$.

Для доказательства представим рассматриваемый интеграл в виде:

$$J(h, x_0) = J_1(h, x_0) + J_2(h, x_0),$$

где

$$J_1(h, x_0) = \int_{\Sigma} \nu(y) (\vec{n}(y), \text{grad}_x F(x-y)) dy,$$

$$J_2(h, x_0) = \int_{\Sigma} \nu(y) (\vec{n}(x_0) - \vec{n}(y), \text{grad}_x F(x-y)) dy.$$

Т.к. при $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \Sigma$, $x \neq y$ выполнены равенства

$$(\vec{n}(y), \text{grad}_x F(x-y)) = -(\vec{n}(y), \text{grad}_y F(x-y)) = -\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y},$$

можем записать:

$$J_1(h, x_0) = -U_{\Sigma}[\nu](x),$$

где $U_{\Sigma}[\nu](x)$ – потенциал двойного слоя, определяемый выражением (3.16). Тогда из теоремы 3.2 заключаем, что

$$\lim_{h \rightarrow \pm 0} J_1(h, x_0) = \mp \frac{1}{2} \nu(x_0) + J_1(0, x_0). \quad (3.24)$$

Для доказательства равномерной сходимости этого предела по $x_0 \in \Sigma$ выделим области Ω^+ и Ω^- – (внешнюю и внутреннюю, соответственно), на которую поверхность Σ разбивает пространство.

3.5 Нормальная производная потенциала простого слоя

Функция $U_\Sigma[\nu](x)$ может быть продолжена по непрерывности на поверхность Σ из области Ω^- до функции, непрерывной на множестве $\bar{\Omega}^-$ – замыкании области Ω^- . Но тогда эта функция равномерно непрерывна на множестве $\bar{\Omega}^-$ и значит при $h \rightarrow -0$ сходимость равномерная.

Точно также, функцию $U_\Sigma[\nu](x)$ можно продолжить по непрерывности из области Ω^+ до функции, непрерывной на замыкании этой области – множестве $\bar{\Omega}^+$. При этом построенная функция будет равномерно непрерывна на любом ограниченном подмножестве множества $\bar{\Omega}^+$. Тогда при $h \rightarrow +0$ сходимость равномерная.

Для интеграла $J_2(h, x_0)$ справедлива формула

$$\lim_{h \rightarrow \pm 0} J_2(h, x_0) = J_2(0, x_0),$$

которая вытекает из леммы 3.2. Здесь достаточно представить этот интеграл в виде

$$J_2(h, x_0) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Sigma} (n_i(x_0) - \vec{n}_i(y)) K_i(x, y) dy,$$

$$K_i(x, y) = \nu(y) \frac{\partial F(x - y)}{\partial x_i},$$

где n_i – координаты вектора \vec{n} и заметить, что для каждого из ядер $K_i(x, y)$ справедливы предположения от ядре $K(x, y)$ из леммы 3.2.

Таким образом, формула (3.24) верна.

Теорема доказана.

Теорема 3.5. Пусть Σ – элементарная гладкая разомкнутая поверхность с краем, u – потенциал простого слоя, определяемый формулой (3.22), с плотностью ν , являющейся непрерывной функцией на поверхности Σ . Тогда на любой части Σ' поверхности Σ , все точки которой находятся на расстоянии от края поверхности Σ большем некоторого $\rho_0 > 0$ функция u имеет правильную нормальную производную, для которой справедлива формула (3.23).

Доказательство. По предположениям о свойствах рассматриваемых поверхностей, сделанным в п.1.2.4, рассматриваемая поверхность Σ является частью некоторой замкнутой поверхности $\tilde{\Sigma}$.

Пусть $\rho(x, \partial\Sigma)$ – расстояние от точки x до кривой $\partial\Sigma$ – края поверхности Σ . Представим плотность ν в виде

$$\nu = \nu_1 + \nu_2,$$

где

$$\nu_1(x) = \nu(x) \text{ при } \rho(x, \partial\Sigma) > \rho_0/2,$$

$$\begin{aligned} \nu_1(x) &= 2\nu(x)\rho(x, \partial\Sigma)/\rho_0 \text{ при } \rho(x, \partial\Sigma) < \rho_0/2, \\ \nu_2(x) &= \nu(x) - \nu_1(x). \end{aligned}$$

Доопределим функцию $\nu_1(x)$ на замкнутой поверхности $\tilde{\Sigma}$, положив $\nu_1(x) = 0$ при $x \in \tilde{\Sigma} \setminus \Sigma$.

Функции ν_1 и ν_2 построены так, что функция ν_1 непрерывна на поверхности $\tilde{\Sigma}$, а функция ν_2 непрерывна на поверхности Σ и при этом выполнено условие $\nu_2(x) = 0$, если расстояние от точки x до участка Σ' меньше, чем $\rho_0/2$. Тогда функцию u можно представить в виде:

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 = V_{\tilde{\Sigma}}[\nu_1], \quad u_2 = V_{\Sigma}[\nu_2].$$

При этом функция u_1 имеет на поверхности Σ' правильные краевые значения нормальной производной в силу теоремы 3.4, к которым применима формула (3.23), а функция u_2 бесконечно дифференцируема в окрестности поверхности Σ' . Отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива и в плоском случае.

Теорема 3.6. Пусть Σ – элементарная гладкая разомкнутая кривая на плоскости, u – потенциал простого слоя, определяемый формулой (3.22), с плотностью ν , являющейся непрерывной функцией на кривой Σ . Тогда на любой части Σ' кривой Σ , все точки которой находятся на расстоянии от концов кривой Σ , большем некоторого $\rho_0 > 0$, функция u имеет правильную нормальную производную, для которой справедлива формула (3.23).

Доказательство можно провести тем же рассуждением, что и в теореме 3.5 потенциала простого слоя, размещенного на элементарной поверхности.

3.6 Градиенты потенциалов. Плоский случай

Перейдем к рассмотрению краевых значений градиентов потенциалов простого и двойного слоя. Сначала рассмотрим случай потенциалов на плоскости. Мы рассматриваем этот случай отдельно, поскольку здесь есть красивая связь между градиентами потенциалов простого и двойного слоя и аналитическими функциями комплексной переменной, определяемыми интегралом Коши.

3.6.1 Точечные источник и вихрь. Рассмотрим потенциал точечного заряда для уравнения Лапласа на плоскости

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, \quad x = (x_1, x_2) \neq 0. \quad (3.25)$$

3.6 Градиенты потенциалов. Плоский случай

Введем в рассмотрение векторное поле

$$\vec{E}(x) = -\text{grad} F(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_1, x_2)}{|x|^2}. \quad (3.26)$$

Наряду с векторным полем $\vec{E}(x)$ рассмотрим также векторное поле $\vec{V}(x)$, которое получается для каждой точки x поворотом вектора $\vec{E}(x)$ на 90 градусов против часовой стрелки:

$$\vec{V}(x) = (-E_2(x), E_1(x)) = \frac{1}{2\pi} \frac{(-x_2, x_1)}{|x|^2}. \quad (3.27)$$

Мы уже встречались с этими полями в разделе 2.7, когда рассматривали восстановление векторного поля на плоскости по заданным ротору и дивергенции. Рассмотрим эти поля подробнее.

Поля $\vec{E}(x)$ и $\vec{V}(x)$ называются полями точечного источника и точечного вихря, расположенных в начале координат. Если $q = (q_1, q_2)$ – некоторая фиксированная точка на плоскости, то поля $\vec{E}(x - q)$ и $\vec{V}(x - q)$ называются полями точечного источника и точечного вихря, расположенных в точке q – структура этих полей показана на рисунке 3.3.

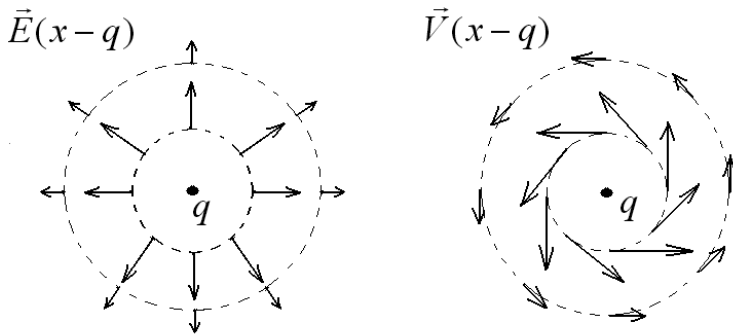


Рис. 3.3: Источник и вихрь

Непосредственными вычислениями легко проверить, что поля $\vec{E}(x - q)$ и $\vec{V}(x - q)$ при $x \neq q$ удовлетворяют уравнениям

$$\text{div} \vec{E} = 0, \quad \text{rot} \vec{E} = 0, \quad (3.28)$$

$$\text{div} \vec{V} = 0, \quad \text{rot} \vec{V} = 0, \quad (3.29)$$

здесь под оператором rot , как и в п.1.1, понимается так называемый двумерный ротор

$$rot \vec{E} = \partial E_1 / \partial x_2 - \partial E_2 / \partial x_1.$$

Поясним физический смысл полей \vec{E} и \vec{V} . Для каждой точки $q \in \mathbb{R}^2$ векторное поле $\vec{E}(x - q)$ имеет векторные линии, расходящиеся по лучам от точки q , а поле $\vec{V}(x - q)$ имеет векторные линии в виде окружностей с центром в точке q . В гидродинамике для этих векторных полей возникли термины "источник" и "вихрь" соответственно – эти поля всюду вне точки q описывают потенциальные течения несжимаемой жидкости. Заметим, также, что в электростатике поле $\vec{E}(x - q)$ есть поле, которое создает на плоскости бесконечная заряженная нить в форме прямой, перпендикулярной плоскости, и пересекающей плоскость в точке q , а поле $\vec{V}(x - q)$ есть магнитное поле, создаваемое бесконечным проводником с током, расположенным на этой же прямой.

Укажем еще на некоторые важные свойства этих полей.

Пусть L – замкнутый контур без самопересечений, который делит плоскость на две области Ω^- – внутреннюю, и Ω^+ – внешнюю. Пусть $\vec{n}(x)$ и $\vec{\tau}(x)$ – единичные векторы нормали и касательной к контуру L в точке x , причем, $\vec{n}(x)$ – вектор внешней нормали, а вектор $\vec{\tau}(x)$ выбран так, что пара векторов $(\vec{n}, \vec{\tau})$ – правая (направление вектора $\vec{\tau}(x)$ соответствует направлению обхода в формуле Грина – (2.5)).

Тогда

$$\int_L \vec{E}(x - q) \vec{\tau} ds = 0, \quad \int_L \vec{V}(x - q) \vec{n} ds = 0, \quad \text{при } q \in \Omega^+ \text{ и } q \in \Omega^-; \quad (3.30)$$

$$\int_L \vec{E}(x - q) \vec{n} ds = 0, \quad \int_L \vec{V}(x - q) \vec{\tau} ds = 0 \quad \text{при } q \in \Omega^+; \quad (3.31)$$

$$\int_L \vec{E}(x - q) \vec{n} ds = 1, \quad \int_L \vec{V}(x - q) \vec{\tau} ds = 1 \quad \text{при } q \in \Omega^-. \quad (3.32)$$

В случае, когда $q \in \Omega^+$ поля $\vec{E}(x - q)$ и $\vec{V}(x - q)$, как функции от x , удовлетворяют в области Ω^- уравнениям (3.28), (3.29). Поэтому соотношения (3.30) для $q \in \Omega^+$ и соотношения (3.30) вытекают сразу из формул Остроградского-Гаусса (2.1) и Грина (2.5).

Докажем формулы (3.30) для случая $q \in \Omega^-$ и (3.32). Для примера рассмотрим интегралы от поля $\vec{E}(x - q)$. Найдется окружность $S(q, \varepsilon)$ с центром в точке q радиуса ε , целиком лежащая в области Ω^- . Пусть Ω_ε^- – часть области Ω^- , ограниченная снаружи контуром

3.6 Градиенты потенциалов. Плоский случай

L и изнутри окружностью $S(q, \varepsilon)$. Тогда, применяя к соответствующим интегралам по области Ω_ε^- от функций $\operatorname{div} \vec{E}$, $\operatorname{rot} \vec{E}$ формулы Остроградского-Гаусса (2.1) и Грина (2.5), заключаем, что

$$\int_L \vec{E}(x - q) \vec{n} ds = \int_{S(x, \varepsilon)} \vec{E}(x - q) \vec{n} ds,$$

$$\int_L \vec{E}(x - q) \vec{\tau} ds = \int_{S(x, \varepsilon)} \vec{E}(x - q) \vec{\tau} ds,$$

где на контуре $S(x, \varepsilon)$ векторы \vec{n} и $\vec{\tau}$ есть единичные векторы внешней нормали и касательной, вектор $\vec{\tau}$ опять выбран так, что пара векторов $(\vec{n}, \vec{\tau})$ – правая. Далее остается заметить, что на контуре $S(q, \varepsilon)$ выполнены соотношения

$$\vec{E}(x - q) \vec{n} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}, \quad \vec{E}(x - q) \vec{\tau} = 0.$$

Соотношения для поля $\vec{V}(x - q)$ доказываются аналогично.

Далее, нам понадобится, также, следующее соотношение между полями $\vec{E}(x)$ и $\vec{V}(x)$. Пусть $\vec{n} = (n_1, n_2)$ и $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ – произвольная правая пара единичных векторов (правой является пара $(\vec{n}, \vec{\tau})$). Тогда

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial n} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau}, \quad (3.33)$$

здесь

$$\frac{\partial \vec{E}(x)}{\partial n} = \left(\frac{\partial E_1(x)}{\partial n}, \frac{\partial E_2(x)}{\partial n} \right), \quad \frac{\partial \vec{V}(x)}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial V_1(x)}{\partial \tau}, \frac{\partial V_2(x)}{\partial \tau} \right).$$

Докажем формулу (3.33).

Сразу заметим, что из условия $(\vec{n}, \vec{\tau})$ – правая пара, следует соотношение между координатами этих векторов:

$$\tau_1 = -n_2, \quad \tau_2 = n_1.$$

Используя последние соотношения и формулы (3.26)-(3.27), можем записать:

$$\frac{\partial E_1}{\partial n} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial E_1}{\partial x_2} n_2 = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} n_2 = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \tau_2 - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \tau_1.$$

Из условий (3.29) можем записать:

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial V_1}{\partial x_1},$$

и тогда:

$$\frac{\partial E_1}{\partial n} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \tau_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \tau_2 = \frac{\partial V_1}{\partial \tau}.$$

Аналогично доказывается равенство

$$\frac{\partial E_2}{\partial n} = \frac{\partial E_2}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} n_2 = -\frac{\partial V_1}{\partial x_1} \tau_2 + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \tau_1 = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \tau_2 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \tau_1 = \frac{\partial V_2}{\partial \tau}.$$

Таким образом, формула (3.33) справедлива.

3.6.2 Выражения для градиентов потенциалов простого и двойного слоя через слой источников и вихревой слой. Пусть L – кусочно-гладкий контур (замкнутый или разомкнутый).

Градиент потенциала простого слоя. Сначала рассмотрим потенциал простого слоя

$$u(x) = \int_L \nu(y) F(x-y) dy, \quad (3.34)$$

где ν – непрерывная функция на контуре L , $F(x-y)$ – потенциал точечного источника для уравнения Лапласа (3.25). В этом случае для любой точки x вне контура L сразу имеем формулу:

$$\text{grad } u(x) = - \int_L \nu(y) \vec{E}(x-y) dy, \quad x \in R^2, \quad x \notin L. \quad (3.35)$$

С физической точки зрения последний интеграл есть векторное поле, индуцируемое слоем источников – системой источников, распределенных по контуру с плотностью $-\nu$.

Градиент потенциала двойного слоя. Теперь рассмотрим потенциал двойного слоя

$$u(x) = \int_L \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy, \quad (3.36)$$

где, пусть сначала, L – элементарная разомкнутая кривая, ν – непрерывно-дифференцируемая функция на контуре L .

Опять для любой точки x вне контура L можем внести градиент под знак интеграла:

$$\text{grad } u(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \text{grad}_x \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy = - \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial \vec{E}(x-y)}{\partial n_y} dy,$$

здесь $\partial \vec{E}(x-y) / \partial n_y$ – производная векторного поля по направлению вектора $\vec{n} = \vec{n}(y)$ как поля, зависящего от переменной y . В силу формулы (3.33) последний интеграл можем переписать в виде:

$$\text{grad } u(x) = - \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial \vec{V}(x-y)}{\partial \tau_y} dy.$$

3.6 Градиенты потенциалов. Плоский случай

Предположим, что контур L задан параметрически как $y = y_L(s)$, где $s \in [a, b]$ – естественный параметр. Тогда

$$\frac{\partial \vec{V}(x - y)}{\partial \tau_y} = \frac{d\vec{V}(x - y_L(s))}{ds}$$

и мы можем записать:

$$\text{grad } u(x) = - \int_a^b \nu(y) \frac{d\vec{V}(x - y_L(s))}{ds} ds.$$

Введем на контуре L функцию

$$\gamma(s) = \frac{d\nu(y_L(s))}{ds}. \quad (3.37)$$

Тогда, интегрируя по частям, можем записать:

$$\text{grad } u(x) = - \int_a^b \frac{d}{ds} \left(\nu(y) \vec{V}(x - y_L(s)) \right) ds + \int_a^b \gamma(s) \vec{V}(x - y_L(s)) ds.$$

Из последней формулы имеем:

$$\text{grad } u(x) = \nu(A) \vec{V}(x - A) - \nu(B) \vec{V}(x - B) + \int_a^b \gamma(s) \vec{V}(x - y_L(s)) ds, \quad (3.38)$$

здесь $A = y_L(a)$, $B = y_L(b)$ – начало и конец контура L .

Легко увидеть, что проведенное рассуждение остается в силе, если производная $\gamma(s)$ определена и непрерывна на интервале (a, b) , а на концах этого интервала допускает абсолютно интегрируемую особенность – в этом случае интеграл в выражении (3.38) становится несобственным.

Теперь пусть L – кусочно-гладкий контур (замкнутый или разомкнутый), функция ν является непрерывной на контуре L и имеет на каждой гладкой компоненте контура L в точках, не являющихся концами этой компоненты, производную $\gamma(s)$, определяемую формулой (3.37), которая непрерывна и абсолютно интегрируема на этой компоненте (производная может иметь особенности в концах кривых – гладких компонент контура L). В этом случае формула (3.38) так же верна. Это следует из следующего рассуждения.

Пусть кривая L является объединением компонент L_k , $k = 1, \dots, K$, и пусть A_k и B_k – начало и конец кривой L_k . Представим потенциал двойного слоя в виде суммы потенциалов двойного слоя, размещенных на каждой из компонент L_k . К каждому слагаемому этой суммы формула (3.38) применима. При этом выполнены соотношения

$A_k = B_{k-1}$, $k = 2, \dots, K$. Поэтому при суммировании правых частей в формуле (3.38) для компонент L_k все слагаемые $\nu(A_k)\vec{V}(x - A_k)$ и $\nu(B_{k-1})\vec{V}(x - B_{k-1})$ для $k = 2, \dots, K$ сократятся и останется формула (3.38) с интегралом по всей кривой и вне интегральным членом для точек $A = A_1$ и $B = B_K$ – концов всей кривой L .

Так же заметим, что в случае замкнутого контура $A = B$ и $\nu(A) = \nu(B)$ – следовательно вне интегральные члены в формуле (3.38) отсутствуют.

Поясним физический смысл полученной формулы (3.38).

Рассмотрим векторное поле

$$\vec{w}(x) = \int_a^b \gamma(s)\vec{V}(x - y_L(s))ds. \quad (3.39)$$

Векторное поле $\vec{w}(x)$ есть поле индуцируемое системой точечных вихрей, распределенных по контуру L с плотностью (интенсивностью) $\gamma(s)$. Это поле называется полем, индуцируемым вихревым слоем. Формула (3.38) означает, что градиент потенциала двойного слоя представляется как поле скоростей, индуцируемое парой вихрей, сосредоточенных в концах контура, и вихревым слоем, интенсивность которого определяется формулой (3.37).

3.6.3 Связь градиентов потенциалов простого и двойного слоя с аналитическими функциями и интегралом Коши. Будем рассматривать плоскость, на которой мы ввели потенциалы простого и двойного слоев, как комплексную плоскость. Пусть $x = (x_1, x_2)$ – точка на плоскости. Поставим в соответствие этой точке комплексное число $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$, \mathbb{C} – множество комплексных чисел, рассматриваемое как комплексная плоскость, и введем комплексные функции

$$E(z) = E_1(x) + iE_2(x) \text{ и } V(z) = V_1(x) + iV_2(x), \quad (3.40)$$

E_k, V_k , $k = 1, 2$, – координаты векторов $\vec{E}(x)$ и $\vec{V}(x)$, определяемых выражениями (3.26) и (3.27). При этом

$$E(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{z}{z\bar{z}},$$

$\bar{z} = x_1 - ix_2$ – число, сопряженное с z . Поскольку повороту вектора на 90 градусов на комплексной плоскости соответствует умножение на число i , для функции $V(z)$ справедливы равенства:

$$V(z) = iE(z) = \frac{i}{2\pi} \frac{z}{z\bar{z}}.$$

3.6 Градиенты потенциалов. Плоский случай

Полученные равенства можно переписать в виде:

$$\bar{E}(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z}, \quad \bar{V}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z}. \quad (3.41)$$

Градиент потенциала простого слоя. Рассмотрим градиент потенциала простого слоя. Пусть

$$\vec{w}(x) = \text{grad} \int_L \nu(y) F(x-y) dy.$$

Построим комплексную функцию

$$w(z) = w_1(x) + iw_2(x) \text{ при } z = x_1 + ix_2. \quad (3.42)$$

Тогда, в силу формул (3.35) и (3.41) имеем:

$$\bar{w}(z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_L \nu(y) \frac{1}{z_0 - z} ds, \quad z = y_1 + iy_2 \in L,$$

здесь мы рассматриваем контур L как контур на комплексной плоскости, интеграл берется по длине дуги (ds – элемент длины дуги в точке z). Последний интеграл можно переписать в виде интеграла по комплексной переменной. Будем считать, что контур L задан параметрически, как $z = z_L(s)$ и пусть $\tilde{\nu}(z) = \nu(y)$ при $z = y_1 + iy_2 \in L$. Тогда последний интеграл, соответствующий градиенту потенциала простого слоя, можно представить в виде

$$\bar{w}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{i\tilde{\nu}(z)}{dz/ds} \right) \frac{1}{z - z_0} dz, \quad z_0 \in \mathbb{C} \setminus L, \quad (3.43)$$

здесь $dz/ds = dz_L(s)/ds$.

Градиент потенциала двойного слоя. Рассмотрим градиент потенциала двойного слоя. Пусть

$$\vec{w}(x) = \text{grad} \int_L \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy.$$

Опять рассмотрим комплексную функцию вида (3.42). Тогда, в силу формул (3.38) и (3.41) имеем:

$$\bar{w}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \gamma(y) \frac{1}{z_0 - z} ds + \frac{1}{2\pi i} \frac{\nu(A)}{z_0 - A} - \frac{1}{2\pi i} \frac{\nu(B)}{z_0 - B}.$$

Полученную формулу опять можно переписать в виде интеграла по комплексной переменной:

$$\bar{w}(z_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\frac{\tilde{\gamma}(z)}{dz/ds} \right) \frac{1}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \frac{\nu(A)}{z_0 - A} - \frac{1}{2\pi i} \frac{\nu(B)}{z_0 - B}, \quad (3.44)$$

здесь $\tilde{\gamma}(z) = \gamma(s)$ при $z = z_L(s)$.

Напомним, что если $\varphi(z)$ некоторая функция, заданная на контуре L , то следующий интеграл называется интегралом Коши:

$$I(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(z) \frac{1}{z - z_0} dz, \quad z_0 \in \mathbb{C}. \quad (3.45)$$

Заметим, что интеграл $I(z_0)$ заведомо определен при $z_0 \notin L$. Ниже мы увидим, что этот интеграл определен и если точка z_0 лежит на контуре L , являясь для него точкой гладкости и не являясь его концом, при условии, что функция $\varphi(z)$ непрерывна по Гельдеру, а интеграл понимается в смысле главного значения. Мы видим, что градиенты потенциалов простого и двойного слоев выражаются через интеграл Коши на комплексной плоскости. В следующем пункте мы приведем некоторые свойства интеграла Коши.

3.6.4 Значения интеграла Коши на контуре интегрирования. Рассмотрим интеграл Коши (3.45) в случае, когда точка z_0 лежит на контуре L (см. [30, глава 1, §11-16], [11, глава 1, §1-5]). Пусть L есть гладкая кривая класса без самопересечений на комплексной плоскости, которая может быть замкнутой или разомкнутой, $\varphi(z)$ – функция комплексного переменного заданная на контуре L .

Будем считать, что кривая G задана параметрически $z_L(s) = x_L(s) + iy_L(s)$, где $x_L(s), y_L(s) \in C^m[a, b]$, $m \geq 1$, здесь s – естественный параметр. В случае замкнутой кривой полагаем, что $z_L(a) = z_L(b)$ и функции $x_L(s), y_L(s)$ могут быть продолжены по периодичности до функций $x_L(s), y_L(s) \in C^m(\mathbb{R})$. При этом комплексный интеграл от функции комплексной переменной можно свести определенному интегралу:

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= \int_a^b f(z(s)) z'(s) ds \equiv \\ &\equiv \int_a^b \operatorname{Re} [f(z(s)) z'(s)] ds + i \int_a^b \operatorname{Im} [f(z(s)) z'(s)] ds \end{aligned}$$

где $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ – действительная и мнимая части комплексного числа, в последнем выражении интегралы есть обычные определенные интегралы от функций действительного аргумента.

3.6 Градиенты потенциалов. Плоский случай

Заметим, что кривую L можно рассматривать как кривую на плоскости, заданную параметрически $x_1(s) = x_L(s)$, $x_2(s) = y_L(s)$. Будем считать, что для кривой L справедливы предположения, выдвинутые в п.1.1.2 и 1.2.3.

Определение 3.1. Главным значением интеграла

$$\int_L \frac{\varphi(z)dz}{z - z_0},$$

где $z_0 \in L$ и z_0 не является концом кривой L , называется предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L \setminus l(\varepsilon)} \frac{\varphi(z)dz}{z - z_0}, \quad (3.46)$$

где $l(\varepsilon) = L \cap B(z_0, \varepsilon)$, $B(z, \varepsilon)$ открытый круг с центром в точке z радиуса ε .

Рассмотрим вопрос о существовании такого интеграла.

Функция

$$u(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

имеет первообразную $\ln(z - z_0)$, которая, однако, является многозначной функцией с точкой ветвления z_0 . Проведем из точки z_0 разрез, уходящий на бесконечность так, чтобы он не имел других общих точек с контуром L . Тогда на комплексной плоскости с таким разрезом можно выделить ветвь однозначности функции $\ln(z - z_0)$. Будем предполагать, что L – разомкнутая кривая с началом в точке a , концом в точке b , и что при движении вдоль контура от точки a к b разрез выходит из точки z_0 вправо. Тогда

$$\begin{aligned} \int_L \frac{dz}{z - z_0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln(z - z_0) \Big|_{z=a}^{z=t_1} + \ln(z - z_0) \Big|_{z=t_2}^{z=b} \right] = \\ &= \ln \frac{t_1 - z_0}{a - z_0} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{t_1 - z_0}{t_2 - z_0}, \end{aligned}$$

где t_1 и t_2 – начало и конец кривой $l(\varepsilon)$. Т.к. $|t_1 - t| = |t_2 - t| = \varepsilon$, имеем:

$$\ln \frac{t_1 - z_0}{t_2 - z_0} = \ln \frac{|t_1 - z_0|}{|t_2 - z_0|} + i [\arg(t_1 - z_0) - \arg(t_2 - z_0)].$$

Если t – точка гладкости контура L , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{t_1 - t}{t_2 - t} = \ln(-1) = i\pi.$$

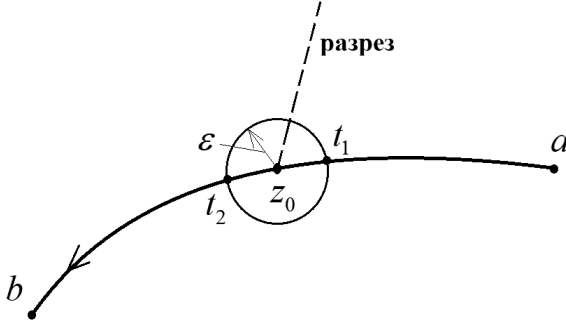


Рис. 3.4: Контур на комплексной плоскости

Тогда

$$\int_L \frac{dz}{z - z_0} = \ln \frac{b - z_0}{a - z_0} + \ln(-1) = \ln \frac{b - z_0}{z_0 - a}.$$

Заметим, также, что если контур замкнут, то справедлива полученная формула с $a = b$. Тогда для замкнутого контура L

$$\int_L \frac{d\tau}{z - z_0} = \ln(-1) = i\pi. \quad (3.47)$$

Теперь если комплексная функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с некоторой константой $\alpha \in (0, 1]$ (т.е. существует константа C_φ такая, что $|\varphi(z_0) - \varphi(z)| \leq C_\varphi |z_0 - z|^\alpha$ для всех $z, z_0 \in L$), то сингулярный интеграл существует и для него справедлива формула:

$$\int_L \frac{\varphi(z) dz}{z - z_0} = \varphi(z_0) \int_L \frac{dz}{z - z_0} + \int_L \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} dz,$$

причем, второй интеграл сходится абсолютно. Докажем это.

Пусть $z_0 = z_L(s_0)$ и предположим, что контур L разомкнутый. Запишем рассматриваемый интеграл в виде

$$I \equiv \int_L \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} d\tau = \int_a^b F(s, s_0) ds,$$

где

$$F(s, s_0) = \frac{\varphi(z_L(s)) - \varphi(z_L(s_0))}{z_L(s) - z_L(s_0)} z'_L(s).$$

3.6 Градиенты потенциалов. Плоский случай

Заметим, что

$$z_L(s) - z_L(s_0) = K(s, s_0)(s - s_0), \text{ где } K(s, s_0) = \int_0^1 z'_L(s_0 + \xi(s - s_0)) d\xi,$$

причем, функция $K(s, s_0)$ непрерывна на компактном множестве $[a, b] \times [a, b]$ как функция двух аргументов. При этом, если $s \neq s_0$, то

$$|K(s, s_0)| = \frac{|z_L(s) - z_L(s_0)|}{|s - s_0|} \neq 0.$$

Если $s = s_0$, то

$$|K(s, s_0)| = |z'_L(s_0)| \neq 0.$$

Таким образом, функция $|K(s, s_0)|$ строго положительна на компактном множестве и, значит, функция $1/K(s, s_0)$ определена при всех $(s, s_0) \in [a, b] \times [a, b]$, ограничена и непрерывна.

Далее

$$|\varphi(z_L(s)) - \varphi(z_L(s_0))| \leq C_\varphi |z_L(s) - z_L(s_0)|^\alpha \leq C_\varphi N |s - s_0|^\alpha.$$

Тогда существует константа C такая, что при всех $s, s_0 \in [a, b] \times [a, b]$, $s \neq s_0$, выполнено неравенство

$$|F(s, s_0)| = \left| \frac{1}{K(s, s_0)} \frac{\varphi(z_L(s)) - \varphi(z_L(s_0))}{s - s_0} \right| \leq \frac{C}{|s - s_0|^{1-\alpha}},$$

и рассматриваемый интеграл сходится (см. теорему 1.4).

Если контур L замкнутый, то его можно разбить на два разомкнутых контура, один из которых не содержит точку z , и тогда интеграл I также существует как сумма интегралов по этим двум контурам, один из которых является обычным.

Наконец, заметим, что в комплексном случае интеграл

$$\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}$$

можно переписать через интеграл по длине дуги

$$\int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z} = \int_{s_a}^{s_b} \frac{\varphi(\tau(s)) \tau'(s) ds}{s - s_0}$$

и раскрывая его как комплексный сингулярный интеграл по формуле (3.46), получим выражение вида

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1(\varepsilon)} f(s) ds + \int_{c+\varepsilon_2(\varepsilon)}^b f(s) ds \right]$$

с $f(s) = \varphi(\tau(s))\tau'(s)$ и некоторыми $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon)$ такими, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 1$. Тогда, с учетом формулы (1.48), определение 1.10 и определение 3.1, данные для интеграла Коши действительной и комплексной переменной, согласованы друг с другом. Поэтому работу с комплексными сингулярными интегралами можно свести к работе с действительными сингулярными интегралами.

3.6.5 Краевые значения интеграла Коши на контуре интегрирования. Формулы Сохоцкого. Пусть L – кусочно-гладкая кривая (замкнутая или разомкнутая без самопересечений) на плоскости. Рассмотрим интеграл

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(z) \frac{1}{z-t} dz, \quad t \in \mathbb{C}. \quad (3.48)$$

Теорема 3.7. Пусть функция φ определена и интегрируема на контуре L и непрерывна по Гельдеру в окрестности точки $z_0 \in L$, которая является точкой гладкости контура L и не является его концом. Тогда в точке $z_0 \in L$ существуют краевые значения функции I , для которых справедливы формулы:

$$I^\pm(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(z) \frac{1}{z-z_0} dz \pm \frac{1}{2} \varphi(z_0), \quad (3.49)$$

интеграл понимается в смысле главного значения, I^+ и I^- – краевые значения с положительной и отрицательной сторон контура L . При этом положительной считается сторона контура, которая при обходе контура в положительном направлении остается слева.

Формулы (3.49) называются формулами Сохоцкого.

Замечание: Обратим внимание на следующее важное обстоятельство. В формуле (3.49) мы обозначили положительную и отрицательную стороны контура L так, как это принято в теории функций комплексного переменного [30, глава 1, §], [11, глава 1, §1]. Это связано с тем, что в теории функций комплексного переменного, если замкнутый контур делит плоскость на две части – внутреннюю и внешнюю, то внутреннюю область принято обозначать со знаком $+$, а внешнюю со знаком $-$. В то же время, например, если контур – окружность с центром в начале координат, положительное направление обхода принято выбирать против часовой стрелки. Такой выбор положительной и отрицательной сторон контура отличается от используемого в остальных разделах нашей книги. Во всех других разделах мы используем противоположное согласование положительной и отрицательной сторон контура и направление его обхода так, как это принято в математическом анализе и математической физике. Этот

выбор основан на том, что в случае замкнутого контура, ограничивающего некоторую внутреннюю область D , положительная сторона контура определяется вектором внешней нормали, которая входит в формулу Остроградского Гаусса, а направления обхода выбирается как в формуле Грина для интегралов по области D (формулы (2.1) и (2.5)).

Доказательство теоремы 3.7. Сначала пусть контур L является замкнутым и делит комплексную плоскость на области Ω^+ – внутреннюю и Ω^- – внешнюю. И пусть сначала функция φ непрерывна по Гельдеру на всем контуре L .

Пусть $z_0 \in L$. Представим функцию $I(t)$ в виде:

$$I(t) = \varphi(z_0)I_1(t) + I_2(t), \quad (3.50)$$

$$I_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{z-t} dz,$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z-t} dz.$$

Для функции $I_1(t)$ известны формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{z-t} dz = \begin{cases} 0, & t \in \Omega^-, \\ 1/2, & t \in L, \\ 1, & t \in \Omega^+. \end{cases}$$

Первая из этих формул верна, так как в этом случае функция

$$u(z) = \frac{1}{z-t}$$

является аналитической в области Ω^+ и мы вычисляем интеграл от аналитической функции в области Ω^+ (внутренней в данной теореме!) по ее внешней границе, в случае $t \in \Omega^+$ мы имеем представление функции $u(z) \equiv 1$, аналитической в области Ω^+ , через ее значения на границе (см., например, [38, глава 1, §3]). Случай $t \in L$ следует из формулы (3.47).

Тогда функция $I_1(t)$ имеет в точке z_0 крайевые значения, для которых справедлива формула:

$$I_1^\pm(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{z-z_0} dz \pm \frac{1}{2}. \quad (3.51)$$

Далее, в силу леммы 3.2 функция $I_2(t)$ непрерывна в точке z_0 . Но тогда формулы (3.49) выполнены.

Тем самым мы доказали теорему для рассматриваемого случая.

Теперь пусть L кусочно-гладкий контур, замкнутый или разомкнутый, $z_0 \in L$ – точка контура, которая является точкой гладкости контура L и не является его концом, функция φ непрерывна по Гельдеру в окрестности точки $z_0 \in L$.

Здесь проведем такое же рассуждение, как и при доказательстве теоремы 3.4 для краевых значений потенциала двойного слоя в случае кусочно-гладкой поверхности.

Контур L может быть представлен как объединение конечного числа гладких компонент, каждая из которых есть элементарная разомкнутая кривая. Пусть точка z_0 лежит на одной из таких компонент, которую обозначим как L' , причем, z_0 не конец этой компоненты. Воспользуемся предположением 1.1, согласно которому это контур можно достроить до замкнутого контура L_0 .

Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что кривая $L_\varepsilon = L \cap U(z_0, \varepsilon)$, $U(z_0, \varepsilon)$ – окрестность точки z_0 радиуса ε , есть элементарная разомкнутая кривая, удовлетворяющая условию $L_\varepsilon \subset L'$, и при этом функция φ непрерывна по Гельдеру на кривой L_ε . Тогда представим функцию φ в виде суммы

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

так, что

$$\varphi_1(t) = 0 \text{ при } |t - z_0| \geq \varepsilon/2, \quad \varphi_2(t) = 0 \text{ при } |t - z_0| \leq \varepsilon/4.$$

Это можно сделать, используя формулы (3.21).

Функцию φ_1 продолжим на замкнутый контур L_0 , доопределив ее нулем вне L' . Тогда

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \varphi_1(z) \frac{1}{z-t} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{L \setminus U(z_0, \varepsilon/4)} \varphi_2(z) \frac{1}{z-t} dz = I_1(t) + I_2(t).$$

При этом для функции $I_1(t)$ справедлива формула (3.51) (с заменой L на L_0), а функция $I_2(t)$ непрерывна в точке $t = z_0$. Таким образом, формулы (3.49) по-прежнему выполнены для интеграла $I(t)$.

Теорема доказана.

3.6.6 Краевые значения градиентов потенциалов простого и двойного слоя на плоскости. Пусть L – кусочно-гладкий контур, замкнутый или разомкнутый. Здесь как и раньше, будем считать, что в точках гладкости контура определен вектор положительной нормали, согласованный с направлением обхода так, что при движении в положительном направлении нормаль остается справа.

Рассмотрим потенциал простого слоя

$$u(x) = \int_L \nu(y) F(x-y) dy, \quad F(x-y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}.$$

3.6 Градиенты потенциалов. Плоский случай

Рассмотрим поле $\vec{w}(x) = \text{grad} u(x)$. Для этого поля справедливо выражение:

$$\vec{w}(x) = \int_L \nu(y) \text{grad}_x F(x - y) dy. \quad (3.52)$$

Теорема 3.8. Пусть функция ν интегрируема на контуре L и непрерывна по Гельдеру в окрестности точки $x_0 \in L$, лежащей на контуре L , являющейся точкой гладкости контура и не являющейся концом контура. Тогда у градиента потенциала простого слоя, определяемого выражением (3.52), существуют краевые значения, для которых справедливо выражение:

$$\vec{w}^\pm(x_0) = \vec{w}(x_0) \mp \frac{1}{2} \vec{n}(x_0) \nu(x_0), \quad (3.53)$$

где $\vec{w}(x_0)$ — прямое значение градиента потенциала простого слоя на кривой, определяемое выражением (3.52) для рассматриваемой точки x_0 . При этом интеграл в выражении (3.52) существует в смысле главного значения.

Доказательство. Введем в рассмотрение комплексную функцию $w(z) = w_1(x) + iw_2(x)$ при $z = x_1 + ix_2$. Тогда для комплексно сопряженной функции $\bar{w}(z)$ справедливо выражение (3.43). По формулам Сохоцкого (теорема 3.7), функция $\bar{w}(z)$ имеет в точке z_0 , соответствующей точке x_0 , краевые значения

$$\bar{w}^\pm(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(z) \frac{1}{z - z_0} dz \mp \frac{1}{2} \varphi(z_0), \quad \varphi(z) = \frac{i\tilde{\nu}(z)}{dz/ds},$$

где интеграл существует в смысле главного значения, знаки "+" и "-" — соответствуют краевым значениям со стороны положительного вектора нормали и с противоположной стороны (по сравнению с формулой (3.49) из теоремы 3.7 знаки "+" и "-" для краевых значений выбраны наоборот, что мы учли сменой знаков во вне интегральном члене). Тогда и векторное поле \vec{w} имеет в точке x_0 краевые значения, для которых справедлива формула:

$$\vec{w}^\pm(x_0) = \int_L \nu(y) \text{grad}_x F(x_0 - y) dy \mp \frac{1}{2} \Delta \vec{w}(x_0),$$

интеграл существует в смысле главного значения, $\Delta \vec{w}$ — скачек поля \vec{w} , связанный с функцией φ , представленной в виде $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, формулами:

$$\Delta \vec{w} = (\Delta w_1, \Delta w_2), \quad \Delta w_1 = \varphi_1, \quad \Delta w_2 = -\varphi_2.$$

Пусть $\vec{n}(x) = (n_1(x), n_2(x))$ и $\vec{\tau}(x) = (\tau_1(x), \tau_2(x))$ – положительные векторы нормали и касательной на контуре L . При этом

$$\tau_1 = -n_2, \quad \tau_2 = n_1, \quad z'(s) = \tau_1 + i\tau_2.$$

Тогда осталось заметить, что

$$\varphi(z) = \frac{i\tilde{\nu}(z)}{dz/ds} = i\nu(x)\bar{z}'(s) = i\nu(x)(\tau_1 - i\tau_2) = \nu(x)(\tau_2 + i\tau_1)$$

и тогда

$$\Delta w_1 = \nu\tau_2 = \nu n_1, \quad \Delta w_2 = -\nu\tau_1 = \nu n_2.$$

Тем самым формула (3.53) доказана.

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим потенциал двойного слоя

$$u(x) = \int_L \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy, \quad F(x-y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}.$$

Рассмотрим поле $\vec{w}(x) = \text{grad } u(x)$. Для этого поля справедливо выражение:

$$\vec{w}(x) = \nu(A)\vec{V}(x-A) - \nu(B)\vec{V}(x-B) + \int_a^b \gamma(s)\vec{V}(x-y_L(s))ds, \quad (3.54)$$

где $\gamma(s) = d\nu/ds$, $y_L(s)$ – функция, параметрически задающая контур L , s – естественный параметр, $A = y_L(a)$ и $B = y_L(b)$ – концы контура L .

Теорема 3.9. Пусть функция ν непрерывна на контуре L и имеет на каждой компоненте гладкости контура L (за исключением может быть концов) производную $\gamma(s) = d\nu/ds$, которая интегрируема на каждой такой компоненте, и в некоторой окрестности точки $x_0 \in L$, являющейся точкой гладкости контура и не являющейся концом контура, непрерывна по Гельдеру. Тогда в точке x_0 у градиента потенциала двойного слоя, определяемого выражением (3.54), существуют краевые значения, для которых справедливо выражение:

$$\vec{w}^\pm(x_0) = \vec{w}(x_0) \pm \frac{1}{2}\vec{\tau}(x_0)\nu(x_0), \quad (3.55)$$

где $\vec{w}(x_0)$ прямое значение градиента потенциала двойного слоя на кривой, определяемое выражением (3.54) для рассматриваемой точки x_0 . При этом интеграл в выражении (3.54) существует в смысле главного значения.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме введем в рассмотрение комплексную функцию

$$w(z) = w_1(x) + iw_2(x) \text{ при } z = x_1 + ix_2.$$

Тогда для комплексно сопряженной функции $\bar{w}(z)$ справедливо выражение (3.44). По формулам Сохоцкого (теорема 3.7), функция $\bar{w}(z)$ имеет в точке z_0 , соответствующей точке x_0 , краевые значения

$$\bar{w}^\pm(z_0) = \bar{w}(z_0) \pm \frac{1}{2}\varphi(z_0),$$

$$\bar{w}(z_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(z)}{z_0 - z} dz + \frac{1}{2\pi i} \frac{\nu(A)}{z_0 - A} - \frac{1}{2\pi i} \frac{\nu(B)}{z_0 - B}, \quad \varphi(z) = \frac{\tilde{\gamma}(z)}{dz/ds},$$

где интеграл существует в смысле главного значения, как и при доказательстве теоремы 3.8 мы учли разницу в выборе положительной стороны контура по сравнению с формулами Сохоцкого. Тогда и векторное поле \vec{w} имеет в точке x_0 краевые значения, для которых справедлива формула:

$$\vec{w}^\pm(x_0) = \vec{w}(x_0) \pm \frac{1}{2}\Delta\vec{w}(x_0),$$

$\vec{w}(x_0)$ – прямое значение градиента потенциала двойного слоя, определяемое непосредственно формулой (3.54), в которой интеграл понимается в смысле главного значения, $\Delta\vec{w}$ – скачек поля \vec{w} , связанный с функцией φ , представленной в виде

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 = \Delta w_1 - i\Delta w_2.$$

Преобразуя выражение для функции φ к виду:

$$\varphi(z) = \gamma(s)\bar{z}'(s) = \gamma(s)(\tau_1(s) - i\tau_2(s)),$$

получаем:

$$\Delta w_1 = \gamma\tau_1, \quad \Delta w_2 = \gamma\tau_2.$$

Тем самым формула (3.55) доказана.

Теорема доказана.

3.6.7 Выражение для краевых значений градиента потенциала двойного слоя непосредственно через его плотность. Мы получили выражение (3.55) для градиента потенциала двойного слоя. В этом выражении прямое значение $\vec{w}(x_0)$ выражается формулой (3.54) через функцию $\gamma(s) = d\nu/ds$, где ν – плотность потенциала двойного слоя. Получим выражение для прямого значения градиента потенциала двойного слоя непосредственно через его плотность – функцию ν .

При этом будет получена формула, в которую входит сильно сингулярный интеграл, понимаемый в смысле конечного значения по Адамару.

Пусть L – элементарная гладкая разомкнутая кривая, заданная параметрически как $y = y_L(s)$, $s \in [a, b]$, $A = y_L(a)$ и $B = y_L(b)$ – концы кривой L .

Опять рассмотрим потенциал двойного слоя с плотностью ν . Пусть $\tilde{\nu}(s) = \nu(y_L(s))$, $s \in [a, b]$. Предположим, что функция $\tilde{\nu}(s)$ непрерывно дифференцируема и ее производная $\gamma(s) = \tilde{\nu}'(s)$ непрерывна по Гельдеру на отрезке $[a, b]$ с показателем $\alpha \in (0, 1]$.

Рассмотрим точку $x_0 = y_L(s_0)$, $s_0 \in (a, b)$. Тогда для краевых значений градиента потенциала двойного слоя в точке x_0 справедлива формула (3.55), в которой прямое значение $\vec{w}(x_0)$ выражается формулой (3.54).

Интеграл в выражении (3.54) понимается в смысле главного значения. Если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то пересечение кривой L и окрестности $U(x_0, \varepsilon)$ есть простая кривая, на которой параметр s лежит на отрезке $l_\varepsilon = [s_0 - \varepsilon_1, s_0 + \varepsilon_2]$, и концами которой являются точки $y^+ = y_L(s_0 + \varepsilon_2)$ и $y^- = y_L(s_0 - \varepsilon_1)$. При этом:

$$|y^+ - x_0| = |y^- - x_0| = \varepsilon.$$

Но

$$y^+ - x_0 = y_L(s_0 + \varepsilon_2) - y_L(s_0) = \varepsilon_2 \int_0^1 y'_L(s_0 + \theta\varepsilon_2) d\theta.$$

При этом

$$y'_L(s_0 + \theta\varepsilon_2) = y'_L(s_0) + y''_L(s_0)\theta\varepsilon_2 + O(\varepsilon_2^2),$$

$$(y'_L(s_0), y''_L(s_0)) = \frac{1}{2} \frac{d(y'_L(s_0), y'_L(s_0))}{ds_0} = 0,$$

т.к. $y'_L(s_0)$ есть единичный вектор. Поэтому

$$|y^+ - x_0| = \varepsilon_2 + O(\varepsilon_2^3).$$

Но тогда

$$\varepsilon = \varepsilon_2 + O(\varepsilon_2^3), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} = 1$$

и

$$\varepsilon_2 = \varepsilon + O(\varepsilon^3).$$

Аналогично доказывается, что

$$\varepsilon_1 = \varepsilon + O(\varepsilon^3).$$

3.6 Градиенты потенциалов. Плоский случай

Теперь можем записать:

$$\vec{w}(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \nu(A)\vec{V}(x_0 - A) - \nu(B)\vec{V}(x_0 - B) + \int_{[a,b] \setminus I_\varepsilon} \frac{d\tilde{\nu}(s)}{ds} \vec{V}(x_0 - y_L(s)) ds \right\}.$$

Интегрируя в последней формуле по частям, получаем:

$$\vec{w}(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{[a,b] \setminus I_\varepsilon} \tilde{\nu}(s) \frac{d\vec{V}(x_0 - y_L(s))}{ds} ds + \tilde{\nu}(s_0 - \varepsilon_1) \vec{V}(x_0 - y^-) - \tilde{\nu}(s_0 + \varepsilon_2) \vec{V}(x_0 - y^+) \right\}. \quad (3.56)$$

Далее заметим, что

$$\tilde{\nu}(s_0 + \varepsilon_2) = \tilde{\nu}(s_0) + \varepsilon_2 \int_0^1 \tilde{\nu}'(s_0 + \theta \varepsilon_2) d\theta = \tilde{\nu}'(s_0) \varepsilon + O(\varepsilon^{1+\alpha}).$$

Аналогично

$$\tilde{\nu}(s_0 - \varepsilon_1) = \tilde{\nu}(s_0) - \tilde{\nu}'(s_0) \varepsilon + O(\varepsilon^{1+\alpha}).$$

Вектор $\vec{V}(x_0 - y^+)$ получается поворотом на 90 градусов против часовой стрелки вектора

$$\vec{E}(x_0 - y^+) = \frac{y_L(s_0) - y_L(s_0 + \varepsilon_2)}{2\pi\varepsilon^2} = -\frac{y'_L(s_0)}{2\pi\varepsilon} - \frac{y''_L(s_0)}{4\pi} + O(\varepsilon).$$

Аналогично вектор $\vec{V}(x_0 - y_L(s_0 - \varepsilon_1))$ получается поворотом на 90 градусов против часовой стрелки вектора

$$\vec{E}(x_0 - y^-) = \frac{y'_L(s_0)}{2\pi\varepsilon} - \frac{y''_L(s_0)}{4\pi} + O(\varepsilon).$$

Заметим, что $y'_L(s_0)$ есть орт вектора касательной к контуру L в точке x_0 и при повороте его на 90 градусов против часовой стрелки возникает вектор $-\vec{n}(x_0)$ ($\vec{n}(x_0)$ – орт вектора нормали). Поэтому

$$\vec{V}(x_0 - y^-) - \vec{V}(x_0 - y^+) = -\frac{1}{\pi} \frac{\vec{n}(x_0)}{\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

Теперь можем записать:

$$\tilde{\nu}(s_0 - \varepsilon_1) \vec{V}(x_0 - y^-) - \tilde{\nu}(s_0 + \varepsilon_2) \vec{V}(x_0 - y^+) = -\frac{\tilde{\nu}(s_0) \vec{n}(s_0)}{\pi\varepsilon} + O(\varepsilon^{1+\alpha}).$$

Вспоминая соотношение (3.33) и используя формулу (3.56), можем записать в виде:

$$\vec{w}(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{L \setminus U(x_0, \varepsilon)} \tilde{v}(s) \operatorname{grad}_x \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} \Big|_{x=x_0} ds_y - \frac{\tilde{v}(s_0) \vec{n}(s_0)}{\pi \varepsilon} \right\}. \quad (3.57)$$

Полученное выражение есть интеграл в смысле конечного значения по Адамару – см. определение 1.15. Таким образом, для краевых значений потенциала двойного слоя справедлива формула (3.55), в которой функция $\vec{w}(x_0)$ определяется выражением (3.57).

Заметим, что для случая кусочно-гладкой кривой в предположениях теоремы 3.9 формулы (3.55)-(3.57) также верны. Для доказательства достаточно выделить на контуре L участок L' , содержащий точку x_0 , как внутреннюю точку, который является элементарной разомкнутой кривой и на котором функция \tilde{v} имеет производную, непрерывную по Гельдеру. Разобьем потенциал двойного слоя u на сумму потенциалов двойных слоев u_1 и размещенных на контуре L' и кривой $L \setminus L'$. При этом к градиенту потенциала u_1 применимы формулы (3.55)-(3.57). Поскольку градиент потенциала u_2 в точке x_0 можно вычислять, внося градиент под знак интеграла, получаем, что формулы (3.55)-(3.57) применимы к потенциалу u .

3.7 Градиенты потенциалов. Пространственный случай

3.7.1 Некоторые дополнительные свойства поверхностей. Поверхностный градиент. Средняя кривизна поверхности. Пусть Σ – гладкая поверхность с краем, заданная параметрически как $x = \varphi(u)$, $x \in \Sigma$, $u \in V$ – замыкание некоторой ограниченной области на плоскости R^2 .

Напомним, что в каждой точке x поверхности Σ определены независимые касательные векторы $\vec{\tau}_i = \partial x / \partial u^i$, $i = 1, 2$ и единичный вектор нормали

$$\vec{n}(x) = \frac{\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2}{|\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2|}. \quad (3.58)$$

На поверхности Σ введем метрический тензор

$$g_{ij} = (\vec{\tau}_i, \vec{\tau}_j), \quad i, j = 1, 2.$$

При этом Якобиан отображения $\varphi : u \rightarrow x$ (см. формулу (1.11)) можно выразить через метрический тензор:

$$J(u) = |\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2| = \sqrt{|\vec{\tau}_1|^2 |\vec{\tau}_2|^2 - (\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2)^2} = \sqrt{g}, \quad g = \det g_{ij}. \quad (3.59)$$

3.7 Градиенты потенциалов. Пространственный случай

В каждой точке $x \in \Sigma$ векторы $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{n}$ образуют правую ортонормированную тройку векторов. Так же заметим, что справедливо равенство:

$$\left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial u_i}, \vec{n} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{где } \vec{n} = \vec{n}(x(u)). \quad (3.60)$$

Это равенство следует из соотношений

$$(\vec{n}, \vec{n}) = 1 \text{ и } 2(\partial \vec{n} / \partial u_i, \vec{n}) = \partial (\vec{n}, \vec{n}) / \partial u_i.$$

Из равенств (3.60) следует, что в каждой точке $x \in \Sigma$ векторы $\partial \vec{n} / \partial u_i$ можно разложить по векторам $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$:

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial u_i} = - \sum_{j=1}^2 b_{ij} \vec{\tau}_j, \quad (3.61)$$

где $b_{ij} = b_{ij}(x)$ – коэффициенты, определяемые отображением φ . В дальнейшем нам также понадобится функция

$$H = \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22}). \quad (3.62)$$

Можно показать, что величина H для каждой точки $x \in \Sigma$ является инвариантом, в том смысле, что она не зависит выбора отображения φ . Действительно, если предположить, что в окрестности некоторой точки $x_0 \in \Sigma$ действуют 2 карты, так, что $x = \varphi(u)$ и $x = \psi(v)$, то между криволинейными координатами $u = (u_1, u_2)$ и $v = (v_1, v_2)$ имеется взаимнооднозначное соответствие. Тогда с одной стороны мы можем записать:

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial u_i} = - \sum_{j=1}^2 b_{ij} \frac{\partial x}{\partial u_j}.$$

С другой стороны

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial v_i} = - \sum_{j=1}^2 \tilde{b}_{ij} \frac{\partial x}{\partial v_j},$$

где \tilde{b}_{ij} – коэффициенты разложения типа (3.61), соответствующие криволинейным координатам $v = (v_1, v_2)$. При этом

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial u_i} = \sum_{m=1}^2 \frac{\partial \vec{n}}{\partial v_m} \frac{\partial v_m}{\partial u_i} = - \sum_{m,k=1}^2 \frac{\partial v_m}{\partial u_i} \tilde{b}_{mk} \frac{\partial x}{\partial v_k} = \sum_{k,m,j=1}^2 \frac{\partial v_m}{\partial u_i} \tilde{b}_{mk} \frac{\partial u_j}{\partial v_k} \frac{\partial x}{\partial u_j}.$$

Тогда

$$b_{ij} = \sum_{k,m=1}^2 \frac{\partial v_m}{\partial u_i} \tilde{b}_{mk} \frac{\partial u_j}{\partial v_k}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 b_{ll} &= \sum_{k,m,l=1}^2 \frac{\partial v_m}{\partial u_l} \tilde{b}_{mk} \frac{\partial u_l}{\partial v_k} = \sum_{k,m}^2 \left(\tilde{b}_{mk} \sum_{l=1}^2 \frac{\partial v_m}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial v_k} \right) = \\ &= \sum_{k,m}^2 \tilde{b}_{mk} \frac{\partial v_m}{\partial v_k} = \sum_{k=1}^2 \tilde{b}_{kk}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Величина H , определяемая равенством (3.62), называется средней кривизной поверхности.

Теперь пусть f функция, заданная на поверхности Σ . Напомним, что функция называется дифференцируемой в точке $x \in \Sigma$, если существует вектор \vec{A} такой, что в окрестности этой точки значения $f(y)$, $y \in \Sigma$, представляются в виде:

$$f(y) = f(x) + \left(\vec{A}, y - x \right) + \alpha(x, y), \text{ где } \lim_{y \rightarrow x} \frac{\alpha(x, y)}{|x - y|} = 0.$$

При этом вектор \vec{A} определен с точностью до слагаемого вида $\lambda \vec{n}(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и если последнее представление существует, то вектор \vec{A} можно однозначно выбрать при условии

$$\left(\vec{A}, \vec{n}(x) \right) = 0.$$

Такой вектор \vec{A} будем называть **поверхностным градиентом** функции f в точке x и обозначать как $Grad f(x)$.

Вектор $Grad f(x)$, как вектор, лежащий в касательной плоскости, можно разложить по касательным векторам $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$:

$$Grad f(x) = f_1 \vec{\tau}_1 + f_2 \vec{\tau}_2, \quad (3.63)$$

где f_1, f_2 – некоторые коэффициенты. Получим выражение для вектора $Grad f(x)$ через частные производные функции f по координатам u_1, u_2 .

С одной стороны, дифференциал функции f представляется в виде: $df = (Grad f, dx)$, где

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} du_2 = \vec{\tau}_1 du_1 + \vec{\tau}_2 du_2. \quad (3.64)$$

3.7 Градиенты потенциалов. Пространственный случай

Из равенств (3.63) и (3.64) следует, что

$$(\text{Grad } f, dx) = (f_1 \vec{\tau}_1 + f_2 \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_1 du_1 + \vec{\tau}_2 du_2) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} f_j du_i.$$

С другой стороны

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2, \text{ здесь } \frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial f(\varphi(u))}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда возникает система уравнений

$$\sum_{j=1}^2 g_{ij} f_j = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2.$$

Из этой системы получаем:

$$f_i = \sum_{j=1}^2 g_{ij}^{-1} \frac{\partial f}{\partial u_j},$$

где g_{ij}^{-1} – коэффициенты обратной матрицы к матрице (g_{ij}) .

Теперь мы можем записать:

$$\text{Grad } f(x) = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}^{-1} \frac{\partial f}{\partial u_j} \vec{\tau}_i. \quad (3.65)$$

Заметим, также, что если функция f определена не только на самой поверхности, но и в ее окрестности и является дифференцируемой в этой окрестности как функция точек трехмерного пространства, то справедлива формула

$$\text{grad } f(x) = \text{Grad } f(x) + \vec{n}(x) \frac{\partial f(x)}{\partial n}, \quad (3.66)$$

где x – точка гладкости поверхности Σ .

Также, легко показать, что если x – точка гладкости поверхности Σ и функции f и g , заданные на поверхности, дифференцируемы в этой точке, то

$$\text{Grad } (fg) = f \text{Grad } g + g \text{Grad } f. \quad (3.67)$$

Действительно, в этом случае для точек $y \in \Sigma$, лежащих в окрестности точки x , справедливы равенства

$$f(y) = f(x) + \text{Grad } f(x)(y - x) + \alpha(x, y),$$

$$g(y) = g(x) + \text{Grad} g(x)(y - x) + \beta(x, y),$$

где $\alpha(x, y) = o(|x - y|)$, $\beta(x, y) = o(|x - y|)$.

Тогда

$$f(y)g(y) = f(x)g(x) + \vec{A}(y - x) + \gamma(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} \vec{A} &= (f(x)\text{Grad} f(x) + g(x)\text{Grad} f(x)), \\ \gamma(x, y) &= \alpha(x, y)g(y) + \beta(x, y)f(y) + \\ &+ (\text{Grad} f(x)(y - x))(\text{Grad} g(x)(y - x)) \end{aligned}$$

и

$$\left(\vec{A}, \vec{n}(x) \right) = 0, \quad \gamma(x, y) = o(|x - y|).$$

Значит, вектор \vec{A} есть поверхностный градиент функции $f g$.

Получим еще одно полезное выражение для поверхностного градиента, которое будет использовано в дальнейшем.

Рассмотрим векторы

$$\vec{\tau}_j^* = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}^{-1} \vec{\tau}_i.$$

Заметим, что

$$\left(\vec{\tau}_k, \vec{\tau}_j^* \right) = \sum_{i=1}^2 \left(\vec{\tau}_k, \vec{\tau}_i \right) g_{ij}^{-1} = \sum_{i=1}^2 g_{ki} g_{ij}^{-1} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}. \quad (3.68)$$

Далее, справедливы следующие равенства

$$[\vec{n} \times \vec{\tau}_i] \vec{\tau}_i = 0, \quad i = 1, 2$$

и

$$\begin{aligned} [\vec{n} \times \vec{\tau}_1] \vec{\tau}_2 &= [\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2] \vec{n} = \sqrt{g}, \\ [\vec{n} \times \vec{\tau}_2] \vec{\tau}_1 &= [\vec{\tau}_2 \times \vec{\tau}_1] \vec{n} = -\sqrt{g}. \end{aligned}$$

Тогда легко увидеть, что соотношениям (3.68) удовлетворяют векторы:

$$\vec{\tau}_1^* = -\frac{1}{\sqrt{g}} [\vec{n} \times \vec{\tau}_2], \quad \vec{\tau}_2^* = \frac{1}{\sqrt{g}} [\vec{n} \times \vec{\tau}_1].$$

Значит

$$\text{Grad} f(x) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f}{\partial u_j} \vec{\tau}_j^* = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial f}{\partial u_2} [\vec{n} \times \vec{\tau}_1] - \frac{\partial f}{\partial u_1} [\vec{n} \times \vec{\tau}_2] \right). \quad (3.69)$$

3.7.2 Формулы для поверхностных интегралов, содержащих поверхностный градиент. Пусть Σ - гладкая или кусочно-гладкая поверхность, замкнутая или разомкнутая с краем, f - функция класса C^1 , заданная на поверхности Σ . Тогда

$$\int_{\Sigma} \text{Grad } f \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} f \vec{b} \, ds - 2 \int_{\Sigma} f H \vec{n} \, d\sigma, \quad (3.70)$$

$$\int_{\Sigma} \vec{n} \times \text{Grad } f \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} f \vec{\tau} \, ds, \quad (3.71)$$

где H - средняя кривизна поверхности, определяемая формулой (3.62), $\partial\Sigma$ - край поверхности, $\vec{\tau}$ - орт положительного вектора касательной на контуре $\partial\Sigma$, (положительное направление обхода контура выбирается как в формуле Стокса - теорема 2.2), $\vec{b}(x) = \vec{\tau}(x) \times \vec{n}(x)$, $x \in \partial\Sigma$ (\vec{b} - есть орт вектора нормали к контуру $\partial\Sigma$, ортогональный вектору нормали \vec{n} к поверхности Σ и направленный наружу от поверхности).

Замечание: В случае если поверхность Σ замкнутая, формулы (3.70)-(3.71) верны, с учетом отсутствия (равенства нулю) интегралов по краю $\partial\Sigma$ поверхности Σ .

Рассмотрим случай, когда поверхность Σ есть элементарная поверхность с краем, так, что поверхность Σ есть множество точек $x = \varphi(u)$, $u \in D \subset R^2$, D - замыкание некоторой области на плоскости, граница которой есть кусочно-гладкая замкнутая кривая.

Доказательство формулы (3.70). Используя формулу (3.69), можем записать:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \text{Grad } f \, d\sigma &= \int_D \text{Grad } f \sqrt{g} \, du_1 \, du_2 = \\ &= \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial u_2} [\vec{n} \times \vec{\tau}_1] - \frac{\partial f}{\partial u_1} [\vec{n} \times \vec{\tau}_2] \right) \, du_1 \, du_2. \end{aligned}$$

Преобразуем подынтегральное выражение

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} [\vec{n} \times \vec{\tau}_1] = \frac{\partial}{\partial u_2} (f [\vec{n} \times \vec{\tau}_1]) - f \left[\frac{\partial \vec{n}}{\partial u_2} \times \vec{\tau}_1 \right] - f \left[\vec{n} \times \frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial u_2} \right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} [\vec{n} \times \vec{\tau}_2] = \frac{\partial}{\partial u_1} (f [\vec{n} \times \vec{\tau}_2]) - f \left[\frac{\partial \vec{n}}{\partial u_1} \times \vec{\tau}_2 \right] - f \left[\vec{n} \times \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial u_1} \right].$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2 \partial u_1} = \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial u_1}.$$

Тогда

$$\int_{\Sigma} \text{Grad } f \, d\sigma = \int_D \left(\frac{\partial}{\partial u_2} (f [\vec{n} \times \vec{\tau}_1]) - \frac{\partial}{\partial u_1} (f [\vec{n} \times \vec{\tau}_2]) \right) du_1 du_2 - \\ - \int_D f \left(\left[\frac{\partial \vec{n}}{\partial u_2} \times \vec{\tau}_1 \right] - \left[\frac{\partial \vec{n}}{\partial u_1} \times \vec{\tau}_2 \right] \right) du_1 du_2 = I_1 - I_2.$$

Для интеграла I_1 по формуле Грина (2.5) имеем

$$\int_D \left(\frac{\partial}{\partial u_2} (f [\vec{n} \times \vec{\tau}_1]) - \frac{\partial}{\partial u_1} (f [\vec{n} \times \vec{\tau}_2]) \right) du_1 du_2 = \\ = - \int_{\partial D} (f [\vec{n} \times \vec{\tau}_1] du_1 + f [\vec{n} \times \vec{\tau}_2] du_2).$$

Пусть контур ∂D – граница множества D , задан параметрически как $u = u_L(s)$, где s – естественный параметр. Тогда

$$\vec{\tau}_1 du_1 + \vec{\tau}_2 du_2 = \frac{d\varphi(x_L(s))}{ds} ds = \vec{\tau} ds,$$

где $\vec{\tau}$ – орт положительного вектора касательной на контуре $\partial \Sigma$. В результате получаем

$$I_1 = - \int_{\partial \Sigma} f [\vec{n} \times \vec{\tau}] ds = \int_{\partial \Sigma} f \vec{b} ds.$$

Для интеграла I_2 имеем

$$\left[\frac{\partial \vec{n}}{\partial u_2} \times \vec{\tau}_1 \right] - \left[\frac{\partial \vec{n}}{\partial u_1} \times \vec{\tau}_2 \right] = \\ = - [(b_{21} \vec{\tau}_1 + b_{22} \vec{\tau}_2) \times \vec{\tau}_1] + [(b_{11} \vec{\tau}_1 + b_{12} \vec{\tau}_2) \times \vec{\tau}_2] = \\ = (b_{11} + b_{22}) [\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2] = -2H \vec{n} \sqrt{g}$$

и тогда

$$I_2 = -2 \int_D f H \vec{n} \sqrt{g} du_1 du_2 = -2 \int_{\Sigma} f H \vec{n} d\sigma.$$

Из полученных выражений для интегралов I_1 и I_2 получаем формулу (3.70).

Доказательство формулы (3.71). Опять, используя формулу (3.69), имеем:

$$\int_{\Sigma} \vec{n} \times \text{Grad } f \, d\sigma = \int_D \vec{n} \times \left(\frac{\partial f}{\partial u_2} [\vec{n} \times \vec{\tau}_1] - \frac{\partial f}{\partial u_1} [\vec{n} \times \vec{\tau}_2] \right) du_1 du_2.$$

Преобразуем подынтегральное выражение

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \left(\frac{\partial f}{\partial u_2} [\vec{n} \times \vec{\tau}_1] - \frac{\partial f}{\partial u_1} [\vec{n} \times \vec{\tau}_2] \right) &= \frac{\partial f}{\partial u_2} \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{\tau}_1] - \frac{\partial f}{\partial u_1} \vec{n} \times [\vec{n} \times \vec{\tau}_2] = \\ &= -\frac{\partial f}{\partial u_2} \vec{\tau}_1 + \frac{\partial f}{\partial u_1} \vec{\tau}_2 = -\frac{\partial}{\partial u_2} (f \vec{\tau}_1) + \frac{\partial}{\partial u_1} (f \vec{\tau}_2) + f \left(\frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial u_1} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial u_2} = \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial u_1},$$

получаем:

$$\int_{\Sigma} \vec{n} \times \text{Grad } f \, d\sigma = \int_D \left(-\frac{\partial}{\partial u_2} (f \vec{\tau}_1) + \frac{\partial}{\partial u_1} (f \vec{\tau}_2) \right) du_1 du_2.$$

Опять, применяя формулу Грина (2.5), имеем

$$\int_{\Sigma} \vec{n} \times \text{Grad } f \, d\sigma = \int_{\partial D} (f \vec{\tau}_1 du_1 + f \vec{\tau}_2 du_2) = \int_{\partial \Sigma} f \frac{\partial \varphi(x_L(s))}{ds} ds = \int_{\partial \Sigma} f \vec{\tau} ds.$$

Формула (3.71) доказана.

Мы доказали формулы (3.70) и (3.71) для элементарной поверхности. Для произвольной гладкой поверхности справедливость формул устанавливается интегрированием по элементарным компонентам с учетом того, что интегралы по общим границам этих компонент элементов взаимно уничтожаются.

3.7.3 Свойства контура, являющегося пересечением границы окрестности точки на поверхности с поверхностью. Пусть Σ – гладкая поверхность, $a \in \Sigma$ – точка поверхности, не лежащая на ее краю. Построим окрестность (открытый шар) $U(a, r)$ точки a радиуса $r > 0$. Границей этой окрестности является сфера $\partial U(a, r)$. На интуитивном уровне понятно, что при малом значении параметра r пересечение поверхности Σ и сферы $\partial U(a, r)$ есть некоторая замкнутая кривая, близкая к окружности. Докажем это, а именно получим параметрическое представление для этой кривой и оценки, указывающее на близость кривой к окружности.

Введем специальную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ с центром $O = a$ так, что бы ось $O\xi_3$ была сонаправлена с вектором $\vec{n}(a)$. Построим цилиндр $\mathbf{C}(a, r_0)$ (см. п. 1.2.4) радиуса $r_0 > 0$ и пусть $\Sigma(a, r) = \mathbf{C}(a, r) \cap \Sigma$ – пересечение поверхности Σ и цилиндра. Выберем параметр r_0 столь малым, что бы проекцией участка $\Sigma(a, r)$ на плоскость $O\xi_1\xi_2$ был круг, и чтобы этот участок поверхности задавался в специальной системе координат уравнением $\xi_3 = \psi(\xi_1, \xi_2)$ (см. предположение 1.5). При этом выполнены оценки (1.27). В силу этих оценок параметр r_0 можно выбрать столь малым, что бы также были выполнены оценки

$$|\psi(\xi)| \leq \frac{1}{2} |\xi|, \quad \left| \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial \xi_i} \right| \leq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad \text{при всех } |\xi| \equiv \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \leq r_0. \quad (3.72)$$

Теперь пусть $r \in (0, r_0)$, $L = \Sigma \cap \partial U(a, r)$ – множество точек пересечения поверхности Σ и сферы, ограничивающей окрестность точки a .

Построим, также, в касательной плоскости $O\xi_1\xi_2$ окружность L_0 радиуса r с центром в точке a . Эту окружность можно задать параметрически $x = y_0(\theta)$, где $y_0(\theta)$ – точка, координаты которой в специальной системе координат имеют вид:

$$\xi_1 = r \cos \theta, \quad \xi_2 = r \sin \theta, \quad \xi_3 = 0, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Направляющий вектор на кривой L_0 имеет вид $\vec{\tau}_0 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, векторы $\vec{n}_0 = (0, 0, 1)$ и $\vec{b}_0 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ есть векторы нормали к контуру L_0 , ортогональный плоскости $O\xi_1\xi_2$, и лежащий в этой плоскости, соответственно.

Лемма 3.6. *Контур $L = \Sigma \cap \partial U(a, r)$ можно задать параметрически как $x = x_L(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, где $x_L(\theta) \in C^1(R)$ – 2π периодическая функция, представляющаяся в виде:*

$$x_L(\theta) = y_0(\theta) + \Delta y(\theta), \quad \text{где } |\Delta y(\theta)| \leq Cr^2.$$

При этом

$$\frac{dx_L(\theta)}{d\theta} = r (\vec{\tau}_0(\theta) + \Delta \vec{\tau}(\theta)),$$

орт вектора нормали к поверхности в точке $x_L(\theta)$ имеет вид

$$\vec{n}(\theta) = \vec{n}_0 + \Delta \vec{n}(\theta),$$

орт вектора нормали к контуру L в точке $x_L(\theta)$, ортогональный вектору $\vec{n}(\theta)$, имеет вид:

$$\vec{b}(\theta) = \vec{b}_0(\theta) + \Delta \vec{b}(\theta),$$

3.7 Градиенты потенциалов. Пространственный случай

где:

$$|\Delta\vec{\tau}(\theta)| \leq Cr, \quad |\Delta\vec{n}(\theta)| \leq Cr, \quad \left| \Delta\vec{b}(\theta) \right| \leq Cr,$$

$$|\Delta\vec{\tau}(\theta) \times \vec{n}_0| \leq Cr^2, \quad |(\Delta\vec{n}(\theta), \vec{n}_0)| \leq Cr^2, \quad \left| \Delta\vec{b}(\theta) \times \vec{n}_0 \right| \leq Cr^2,$$

C – некоторая константа, зависящая только от поверхности Σ .

Доказательство. Пусть $\xi(\rho, \theta)$ – точка на плоскости $O\xi_1\xi_2$ с координатами $\xi_1 = \rho \cos \theta$, $\xi_2 = \rho \sin \theta$.

При $\rho \in (0, r_0)$ точке $\xi(\rho, \theta)$ соответствует единственная точка $x(\rho, \theta)$ на поверхности Σ с координатами $(\xi_1, \xi_2, \psi(\xi_1, \xi_2))$. При этом расстояние от точки a удовлетворяет соотношению:

$$|x - a|^2 = \rho^2 + \psi^2.$$

Для каждого θ найдем значение ρ , при котором точка $x(\rho, \theta)$ лежит контуре L из уравнения:

$$f(\rho, \theta, r) = 0, \quad (3.73)$$

где

$$f(\rho, \theta, r) = \rho^2 + \psi^2 - r^2,$$

$$\psi = \psi(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Производная $\partial f / \partial \rho$ имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = 2\rho + 2\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \cos \theta + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \sin \theta \right) \quad (3.74)$$

В силу неравенств (3.72) выполнены соотношения: $f(\rho, \theta, r) \geq 0$ при $\rho = r$, $f(\rho, \theta, r) < 0$ при $\rho = r/2$, $\partial f / \partial \rho > 0$ при $0 < \rho < r_0$. Поэтому уравнение (3.73) имеет единственное решение относительно неизвестной ρ на промежутке $r/2 < \rho \leq r$ и значит, определяет неявно функцию $\rho(\theta, r)$, причем, эта неявная функция дифференцируема и сразу можно записать оценку:

$$\frac{r}{2} < \rho(\theta, r) \leq r. \quad (3.75)$$

При этом рассматриваемое множество точек L есть контур, задаваемый параметрически как $x = x_L(\theta) \equiv x(\rho(\theta, r), \theta)$.

В специальной системе координат точка $x_L(\theta)$ имеет координаты:

$$x_L(\theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \psi(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)), \quad \text{где } \rho = \rho(\theta, r).$$

Перейдем к оценкам. Сразу можно заметить, что

$$|\rho - r| = \left| \frac{\psi^2}{\rho + r} \right| \leq Cr^3, \quad (3.76)$$

здесь и далее при доказательстве леммы мы обозначаем через C константы, зависящие только от поверхности Σ , причем, в различных неравенствах значение константы C может быть различным.

Для координат величины $\Delta y(\theta) = x_L(\theta) - y_0(\theta)$ справедливо выражение:

$$\Delta y(\theta) = ((\rho - r) \cos \theta, (\rho - r) \sin \theta, \psi(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta))$$

из которого следует оценка

$$|\Delta y(\theta)| \leq Cr^2.$$

Рассмотрим вектор:

$$\Delta \vec{\tau}(\theta) = \frac{1}{r} \left(\frac{dx_L(\theta)}{d\theta} - \vec{\tau}_0(\theta) \right).$$

Для этого вектора справедливо выражение

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\tau}(\theta) &= \frac{1}{r} \frac{d\Delta y(\theta)}{d\theta} = \\ &= \frac{\rho - r}{r} (-\sin \theta, \cos \theta, 0) + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} (\cos \theta, \sin \theta, 0) + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} \vec{n}_0, \end{aligned} \quad (3.77)$$

где под производной $d\psi/d\theta$ понимается производная сложной функции $\psi(\rho(\theta, r) \cos \theta, \rho(\theta, r) \sin \theta)$ при фиксированном r .

Производную $\partial \rho / \partial \theta$ найдем как производную неявной функции:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = - \frac{\partial f / \partial \theta}{\partial f / \partial \rho}.$$

Для производной $\partial f / \partial \theta$ имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 2\rho\psi \left(-\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \sin \theta + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \cos \theta \right),$$

откуда получаем оценку:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \theta} \right| \leq Cr^4.$$

Для производной $\partial f / \partial \rho$ из формулы (3.74) и оценок (3.75), получаем:

$$\left| \frac{1}{\partial f / \partial \rho} \right| \leq \frac{C}{r}.$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right| \leq Cr^3.$$

Наконец, из формулы

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta} \cos\theta - \rho \sin\theta \right) + \frac{\partial\psi}{\partial\xi_2} \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta} \sin\theta - \rho \cos\theta \right)$$

имеем оценку:

$$\left| \frac{d\psi}{d\theta} \right| \leq Cr^2.$$

Из формулы (3.77), учитывая оценку (3.76) и используя полученные оценки для производных $\partial\rho/\partial\theta$ и $d\psi/d\theta$, получаем:

$$|\Delta\vec{\tau}(\theta)| \leq Cr, \quad |\Delta\vec{\tau}(\theta) \times \vec{n}_0| \leq Cr^2.$$

Орт вектора нормали к поверхности в точке $x(\rho, \theta)$ на поверхности Σ с координатами $(\xi_1, \xi_2, \psi(\xi_1, \xi_2))$ определяется выражением:

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|}, \quad \vec{n}' = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}, -\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}, 1 \right).$$

При этом

$$|\vec{n}' - \vec{n}_0| \leq Cr, \quad (\vec{n}' - \vec{n}_0, \vec{n}_0) = 0, \quad |\vec{n}' - 1| \leq Cr^2.$$

Тогда

$$|\Delta\vec{n}(\theta)| \leq Cr, \quad |(\Delta\vec{n}(\theta), \vec{n}_0)| \leq Cr^2,$$

где $\Delta\vec{n} = \vec{n} - \vec{n}_0$.

Наконец, вектор $\vec{b}(\theta)$ – орт вектора нормали к контуру L в точке $x_L(\theta)$, ортогональный вектору $\vec{n}(\theta)$ можно представить в виде:

$$\vec{b}(\theta) = \frac{\vec{b}'(\theta)}{|\vec{b}'(\theta)|}, \quad \vec{b}'(\theta) = \vec{n}(\theta) \times \frac{1}{r} \frac{dx_L(\theta)}{d\theta}.$$

Тогда

$$\vec{b}'(\theta) = (\vec{n}_0(\theta) + \Delta\vec{n}(\theta)) \times (\vec{\tau}_0(\theta) + \Delta\vec{\tau}(\theta)),$$

откуда

$$\vec{b}'(\theta) = \vec{v}_0(\theta) + \vec{n}_0 \times \Delta\vec{\tau}(\theta) + \Delta\vec{n}(\theta) \times \vec{\tau}_0 + \Delta\vec{n}(\theta) \times \Delta\vec{\tau}(\theta).$$

Из полученных ранее оценок имеем:

$$|\vec{n}_0 \times \Delta\vec{\tau}(\theta)| \leq Cr^2, \quad |\Delta\vec{n}(\theta) \times \Delta\vec{\tau}(\theta)| \leq Cr^2, \quad |\Delta\vec{n}(\theta) \times \vec{\tau}_0| \leq Cr.$$

Значит

$$\left| \vec{b}'(\theta) - \vec{v}_0(\theta) \right| \leq Cr.$$

При этом

$$\vec{n}_0 \times [\Delta \vec{n}(\theta) \times \vec{\tau}_0] = \Delta \vec{n}(\theta)(\vec{n}_0, \vec{\tau}_0) - \vec{\tau}_0(\vec{n}_0, \Delta \vec{n}(\theta)) = -\vec{\tau}_0(\vec{n}_0, \Delta \vec{n}(\theta)).$$

Тогда

$$\left| (\vec{b}'(\theta) - \vec{b}_0(\theta)) \times \vec{n}_0 \right| \leq Cr^2.$$

Последнее неравенство означает, что у вектора $\vec{b}'(\theta) - \vec{b}_0(\theta)$ проекция на плоскость $O\xi_1\xi_2$ не превосходит по модулю величины порядка r^2 .

Тогда

$$\left| \vec{b}'(\theta) - 1 \right| \leq Cr^2.$$

Отсюда следуют оценки:

$$\left| \vec{b}(\theta) - \vec{b}_0(\theta) \right| \leq Cr, \quad \left| (\vec{b}(\theta) - \vec{b}_0(\theta)) \times \vec{n}_0 \right| \leq Cr^2.$$

Лемма доказана.

3.7.4 Краевые значения градиента потенциала простого слоя. Рассмотрим потенциал простого слоя в трехмерном случае

$$u(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) F(x-y) dy, \quad x \in R^3 \setminus \Sigma, \quad (3.78)$$

где функция F определяется формулой (2.15) (как частный случай формулой (2.12)), Σ – кусочно-гладкая поверхность, замкнутая или разомкнутая с краем.

Теорема 3.10. Пусть функция ν непрерывна на поверхности Σ . Пусть $x_0 \in \Sigma$ – точка гладкости поверхности Σ , не лежащая на ее краю и пусть функция ν непрерывна по Гельдеру в окрестности точки x_0 . Тогда у градиента потенциала простого слоя, определяемого выражением (3.78), существуют краевые значения в этой точке, для которых справедливо выражение:

$$\text{grad } u^{\pm}(x_0) = \text{grad } u(x_0) \mp \frac{1}{2} \vec{n}(x_0) \nu(x_0), \quad (3.79)$$

где $\text{grad } u(x_0)$ прямое значение градиента потенциала простого слоя, которое мы будем понимать как

$$\text{grad } u(x_0) = \int_{\Sigma} \nu(y) \text{grad}_x F(x-y)|_{x=x_0} dy, \quad (3.80)$$

При этом интеграл в выражении (3.80) существует в смысле главного значения.

Доказательство. Обозначим $\vec{w} = grad u$. Для поля \vec{w} , определенного вне поверхности Σ , справедливо выражение:

$$\vec{w}(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) grad_x F(x - y) dy.$$

Рассмотрим случай, когда Σ — элементарная гладкая разомкнутая поверхность и функция ν непрерывна по Гельдеру на всей поверхности.

Пусть $x_0 \in \Sigma$ — точка поверхности, не лежащая на ее краю. Сначала преобразуем выражение для градиента потенциала простого слоя, удобное для анализа в окрестности точки x_0 , которую считаем фиксированной:

$$\begin{aligned} \vec{w}(x) &= \nu(x_0) \vec{w}_1(x) + \vec{w}_2(x), \\ \vec{w}_1(x) &= \int_{\Sigma} grad_x F(x - y) dy, \\ \vec{w}_2(x) &= \int_{\Sigma} (\nu(y) - \nu(x_0)) grad_x F(x - y) dy. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Рассмотрим поле $\vec{w}_1(x)$. Используя формулу (3.66), можем записать:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1(x) &= \int_{\Sigma} grad_x F(x - y) dy = - \int_{\Sigma} grad_y F(x - y) dy = -\vec{w}_{11}(x) - \vec{w}_{12}(x), \\ \vec{w}_{11}(x) &= \int_{\Sigma} Grad_y F(x - y) dy, \\ \vec{w}_{12}(x) &= \int_{\Sigma} \vec{n}(y) \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy. \end{aligned}$$

Применяя к полю \vec{w}_{11} формулу (3.70), и учитывая, что Σ есть поверхность без края, получаем:

$$\vec{w}_{11}(x) = -2 \int_{\Sigma} F(x - y) H(y) \vec{n}(y) d\sigma,$$

где $H(y)$ — средняя кривизна поверхности Σ (см. формулу (3.62)). В последней формуле правая часть определена в точке $x = x_0$ и непрерывна в окрестности этой точки — это следует из леммы 3.1, причем интеграл сходится как несобственный. Поэтому у функции $\vec{w}_{11}(x)$ существуют краевые значения в точке x_0 , для которых справедлива формула:

$$\vec{w}_{11}^{\pm}(x_0) = \vec{w}_{11}(x_0) \equiv - \int_{\Sigma} F(x_0 - y) H(y) \vec{n}(y) d\sigma. \quad (3.82)$$

Рассмотрим поле \vec{w}_{12} . Пусть \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$, есть базисные векторы декартовой системы координат. Каждая из координат вектора $\vec{w}_{12}(x)$ есть потенциал двойного слоя с непрерывной плотностью:

$$\vec{w}_{12}(x) \vec{e}_i = \int_{\Sigma} (\vec{n}(y) \vec{e}_i) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy.$$

Тогда

$$(\vec{w}_{12}(x_0) \vec{e}_i)^{\pm} = (\vec{w}_{12}(x_0) \vec{e}_i) \pm \frac{1}{2} (\vec{n}(x_0) \vec{e}_i),$$

где

$$\vec{w}_{12}(x_0) = \int_{\Sigma} \vec{n}(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} \Big|_{x=x_0} dy. \quad (3.83)$$

Тогда поле \vec{w}_{12} имеет в точке x_0 краевые значения, для которых справедлива формула:

$$\vec{w}_{12}(x_0)^{\pm} = \vec{w}_{12}(x_0) \pm \frac{1}{2} \vec{n}(x_0), \quad (3.84)$$

интеграл в выражении (3.83) для значения $\vec{w}_{12}(x_0)$ сходится как несобственный.

К функции $\vec{w}_2(x)$, определяемой выражением (3.81), применима лемма 3.2, из которой следует, что существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Sigma} \vec{w}_2(x) = \vec{w}_2(x_0),$$

где $\vec{w}_2(x_0)$ есть прямое значение функции \vec{w}_2 , т.е. значение, получаемое непосредственно по формуле (3.81) для точки x_0 .

Таким образом, мы доказали, что функция \vec{w} имеет краевые значения в точке x_0 , для которых справедлива формула:

$$\vec{w}^{\pm}(x_0) = \vec{w}(x_0) \mp \frac{1}{2} \vec{n}(x_0),$$

$$\vec{w}(x_0) = -\vec{w}_{11}(x_0) - \vec{w}_{12}(x_0) + \vec{w}_2(x_0),$$

\vec{w}_{11} определяется формулой (3.82), \vec{w}_{12} – формулой (3.83), \vec{w}_2 – формулой (3.81).

Вернемся к функции \vec{w}_{11} , определяемой формулой (3.82).

Построим окрестность $\partial U(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 радиуса ε , граница которой $\partial U(x_0, \varepsilon)$ есть сфера, и пусть $L_{\varepsilon} = \Sigma \cap \partial U(x_0, \varepsilon)$. По лемме 3.6 при достаточно малом значении $\varepsilon > 0$ множество L_{ε} есть гладкий контур, задаваемый параметрически как $x = x_L(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Как и в лемме 3.6, обозначим $\vec{n}(\theta)$ – орт нормали к поверхности Σ в точке $x_L(\theta)$, $\vec{b}(\theta)$ – орт нормали к контуру L_{ε} в этой же точке, ортогональный вектору $\vec{n}(\theta)$. Заметим, что вектор $\vec{b}(\theta)$, построенный

3.7 Градиенты потенциалов. Пространственный случай

как в лемме 3.6, направлен в сторону поверхности $\Sigma \setminus U(x_0, \varepsilon)$ (т.е. наружу от рассматриваемой окрестности).

Теперь представим вектор $\vec{w}_{11}(x_0)$, определяемый выражением (3.82), в виде

$$\begin{aligned} \vec{w}_{11}(x_0) &= \vec{w}_{11}^\varepsilon(x_0) + I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon \\ \vec{w}_{11}^\varepsilon(x_0) &= - \int_{L_\varepsilon} F(x_0 - y) \vec{b}(\theta) ds_y - \\ &\quad - \int_{\Sigma \setminus U(x_0, \varepsilon)} F(x_0 - y) H(y) \vec{n}(y) d\sigma, \\ I_1^\varepsilon &= \int_{L_\varepsilon} F(x_0 - y) \vec{b}(\theta) ds_y, \quad I_2^\varepsilon = \int_{U(x_0, \varepsilon)} F(x_0 - y) H(y) \vec{n}(y) d\sigma. \end{aligned}$$

По формуле (3.70), с учетом ориентации вектора $\vec{b}(\theta)$ на контуре L_ε , имеем:

$$\vec{w}_{11}^\varepsilon(x_0) = \int_{\Sigma \setminus U(x_0, \varepsilon)} \text{Grad}_y F(x_0 - y) d\sigma.$$

В интеграле I_2^ε подынтегральная функция имеет абсолютно интегрируемую особенность, поэтому $I_2^\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Интеграл I_1^ε , используя лемму 3.6, запишем в виде:

$$I_1^\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} \vec{b}(\theta) \left| \frac{dx_L(\theta)}{d\theta} \right| d\theta.$$

Далее:

$$\int_0^{2\pi} \vec{b}(\theta) \left| \frac{dx_L(\theta)}{d\theta} \right| d\theta = \int_0^{2\pi} \varepsilon \vec{b}_0(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \left(\vec{b}(\theta) \left| \frac{dx_L(\theta)}{d\theta} \right| - \varepsilon \vec{b}_0(\theta) \right) d\theta.$$

Т.к. первый интеграл в правой части последнего равенства равен 0, а во втором интеграле для подынтегральной функции справедлива оценка:

$$\left| \vec{b}(\theta) \left| \frac{dx_L(\theta)}{d\theta} \right| - \varepsilon \vec{b}_0(\theta) \right| \leq \varepsilon^2,$$

закключаем, что и $I_1^\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, делаем вывод, что

$$\vec{w}_{11}(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma \setminus U(x_0, \varepsilon)} \text{Grad}_y F(x_0 - y) d\sigma = \int_{\Sigma} \text{Grad}_y F(x_0 - y) d\sigma,$$

где последний интеграл понимается в смысле главного значения.

Теперь можем провести для точки x_0 преобразования, обратные тем, которые были проведены в начале доказательства для функции $\vec{w}(x)$ при $x \notin \Sigma$.

Для величины $\vec{w}_1(x_0)$ имеем:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1(x_0) &= - \int_{\Sigma} \text{Grad}_y F(x_0 - y) d\sigma - \int_{\Sigma} \vec{n}(y) \left. \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} \right|_{x=x_0} dy = \\ &= - \int_{\Sigma} \text{grad}_y F(x_0 - y) d\sigma = \int_{\Sigma} \text{grad}_x F(x - y) \Big|_{x=x_0} d\sigma. \end{aligned}$$

Тогда

$$\vec{w}(x_0) = \nu(x_0) \vec{w}_1(x_0) + \vec{w}_2(x_0) = \int_{\Sigma} \nu(y) \text{grad}_x F(x - y) \Big|_{x=x_0} d\sigma,$$

где последний интеграл существует в смысле главного значения. Таким образом, для случая гладкой замкнутой поверхности теорема доказана.

Теперь пусть Σ - кусочно-гладкая поверхность, замкнутая или разомкнутая с краем, а $x_0 \in \Sigma$ - точка гладкости поверхности Σ , не лежащая на ее краю и пусть функция ν непрерывна по Гельдеру в окрестности точки x_0 .

Найдется участок Σ' поверхности Σ такой, что Σ' есть элементарная гладкая поверхность с краем, точка x_0 лежит на этом участке, не являясь точкой его края и функция ν непрерывна по Гельдеру на Σ' . Рассматриваемый потенциал простого слоя u распадается на сумму потенциалов u_1 и u_2 , размещенных на поверхности Σ' и на оставшейся части, соответственно. При этом для потенциала u_1 справедлива формула (3.80), а потенциал u_2 есть непрерывная функция в точке x_0 . Тогда формула (3.80) справедлива и для всего потенциала.

Теорема доказана.

3.7.5 Формула для градиента потенциала двойного слоя. Градиент потенциала двойного слоя уравнения Лапласа: вихревая нить, вихревой слой. Рассмотрим потенциал двойного слоя в трехмерном случае

$$u(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma, \quad (3.85)$$

где функция F определяется формулой (2.15) (как частный случай формулой (2.12)), Σ - кусочно-гладкая поверхность, замкнутая или разомкнутая с краем.

Предположим, что функция ν является непрерывно дифференцируемой на каждой компоненте гладкости поверхности.

Получим формулу, дающую выражение для градиента потенциала двойного слоя через поверхностный градиент его плотности.

3.7 Градиенты потенциалов. Пространственный случай

Заметим, что при $y \in \Sigma$, $x \neq y$, справедливы формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} &= (\text{grad}_y F(x-y), \vec{n}(y)) = -(\text{grad}_x F(x-y), \vec{n}(y)) = \\ &= -\text{div}_x (F(x-y)\vec{n}(y)). \end{aligned}$$

Тогда при $x \notin \Sigma$

$$u(x) = -\text{div} \int_{\Sigma} \nu(y) F(x-y) \vec{n}(y) dy. \quad (3.86)$$

Рассмотрим векторное поле $\vec{w}(x) = \text{grad} u(x)$, $x \notin \Sigma$. В силу формулы (3.86), можем записать:

$$\vec{w}(x) = -\text{grad} \text{div} \int_{\Sigma} \nu(y) F(x-y) \vec{n}(y) dy.$$

Применяя к векторному полю $\vec{A}(x) = F(x-y)\vec{n}(y)$, где точка y считается фиксированной, формулу векторного анализа:

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A},$$

и, учитывая, что

$$\Delta \vec{A} = \Delta_x (F(x-y)\vec{n}(y)) = \vec{n}(y) \Delta_x F(x-y) = -k^2 F(x-y)\vec{n}(y),$$

получаем формулу:

$$\vec{w}(x) = -\text{rot} \text{rot} \int_{\Sigma} \nu(y) F(x-y) \vec{n}(y) dy + k^2 \int_{\Sigma} \nu(y) F(x-y) \vec{n}(y) dy. \quad (3.87)$$

Теперь рассмотрим векторное поле:

$$\vec{h}(x) = \text{rot} \int_{\Sigma} \nu(y) F(x-y) \vec{n}(y) dy.$$

Применяя формулу векторного анализа

$$\text{rot} (\varphi \vec{A}) = \text{grad} \varphi \times \vec{A} + \varphi \text{rot} \vec{A}, \quad (3.88)$$

можем записать:

$$\text{rot}_x (\nu(y) F(x-y) \vec{n}(y)) = \nu(y) \text{grad}_x F(x-y) \times \vec{n}(y)$$

и

$$h(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \text{grad}_x F(x-y) \times \vec{n}(y) dy.$$

Далее:

$$\begin{aligned} & \operatorname{grad}_x F(x-y) \times \vec{n}(y) = \vec{n}(y) \times \operatorname{grad}_y F(x-y) = \\ & = \vec{n}(y) \times \left(\operatorname{Grad}_y F(x-y) + \vec{n}(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} \right) = \vec{n}(y) \times \operatorname{Grad}_y F(x-y). \end{aligned}$$

Тогда

$$h(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \vec{n}(y) \times \operatorname{Grad}_y F(x-y) dy.$$

Применяя формулу (3.67) можем записать:

$$\nu(y) \operatorname{Grad}_y F(x-y) = \operatorname{Grad}_y (\nu(y) F(x-y)) - F(x-y) \operatorname{Grad} \nu(y).$$

Отсюда

$$h(x) = \int_{\Sigma} \vec{n}(y) \times \operatorname{Grad}_y (\nu(y) F(x-y)) dy - \int_{\Sigma} F(x-y) \vec{n}(y) \times \operatorname{Grad} \nu(y) dy.$$

Применяя формулу (3.71) имеем:

$$h(x) = \int_{\partial \Sigma} \nu(y) F(x-y) \vec{\tau}(y) dy - \int_{\Sigma} F(x-y) \vec{n}(y) \times \operatorname{Grad} \nu(y) dy.$$

Из формулы (3.87) получаем:

$$\begin{aligned} \vec{w}(x) &= -\operatorname{rot} \int_{\partial \Sigma} \nu(y) F(x-y) \vec{\tau}(y) dy + \operatorname{rot} \int_{\Sigma} F(x-y) \vec{n}(y) \times \operatorname{Grad} \nu(y) dy + \\ &+ k^2 \int_{\Sigma} \nu(y) F(x-y) \vec{n}(y) dy. \end{aligned}$$

Наконец, внося оператор *rot* под знаки интегралов и применяя формулу (3.88), получаем:

$$\begin{aligned} \vec{w}(x) &= - \int_{\partial \Sigma} \nu(y) \operatorname{grad}_x F(x-y) \times \vec{\tau}(y) dy + \\ &+ \int_{\Sigma} \operatorname{grad}_x F(x-y) \times [\vec{n}(y) \times \operatorname{Grad} \nu(y)] dy + \\ &+ k^2 \int_{\Sigma} \nu(y) F(x-y) \vec{n}(y) dy. \end{aligned} \tag{3.89}$$

Прежде чем перейти к исследованию свойств краевых значений векторного поля \vec{w} (это будет сделано в следующем пункте на основе формулы (3.89)), приведем несколько важных частных случаев полученной формулы.

Случай оператора Лапласа. Рассмотрим случай потенциала двойного слоя для оператора Лапласа ($k = 0$).

В этом случае формула (3.89) имеем вид

$$\begin{aligned} \vec{w}(x) = & - \int_{\partial\Sigma} \nu(y) \text{grad}_x F(x-y) \times \vec{\tau}(y) dy + \\ & + \int_{\Sigma} \text{grad}_x F(x-y) \times [\vec{n}(y) \times \text{Grad} \nu(y)] dy, \end{aligned} \quad (3.90)$$

где

$$F(x-y) = \frac{1}{4\pi |x-y|}.$$

Потенциал двойного слоя с постоянной плотностью для оператора Лапласа. Рассмотрим случай, когда Σ есть поверхность с краем, и плотность потенциала двойного слоя для оператора Лапласа есть константа: $\nu(y) \equiv \nu_0$. В этом случае из формулы (3.90) имеем

$$\vec{w}(x) = -\nu_0 \int_{\partial\Sigma} \text{grad}_x F(x-y) \times \vec{\tau}(y) dy, \quad (3.91)$$

Формула (3.71) известна как закон Био-Савара для проводника с током: поле, определяемое формулой (3.91) есть взятое с противоположным знаком, магнитное поле, индуцируемое проводником, размещенным на замкнутом контуре L , по которому течет ток ν_0 в направлении вектора $\vec{\tau}$.

В аэродинамике это же векторное поле известно, как векторное поле, индуцируемое вихревой нитью с интенсивностью (циркуляцией) $-\nu_0$, размещенной на контуре L .

Векторное поле, индуцируемое вихревым слоем. Пусть Σ – поверхность, замкнутая или разомкнутая с краем. Рассмотрим потенциал двойного слоя для оператора Лапласа с плотностью ν , удовлетворяющей дополнительному условию

$$\nu(y) = 0 \text{ при } y \in \partial\Sigma,$$

если рассматривается поверхность в краем. Введем на поверхности Σ касательное векторное поле

$$\vec{\gamma}(y) = \vec{n}(y) \times \text{Grad} \nu(y). \quad (3.92)$$

Тогда для градиента такого потенциала двойного слоя справедлива формула:

$$\vec{w}(x) = \int_{\Sigma} \text{grad}_x F(x-y) \times \vec{\gamma}(y) dy. \quad (3.93)$$

В аэрогидродинамике такое векторное поле называют векторным полем, индуцируемым вихревым слоем с интенсивностью $\vec{\gamma}(y)$, размещенным на поверхности Σ . Если сравнить эту формулу с формулой (3.91), то рассматриваемое векторное поле можно трактовать как поле, индуцируемое системой вихревых нитей, которые распределены по поверхности Σ . Поэтому здесь также употребляется термин – поле вихревого слоя, подчиняющееся закону Био-Савара. Отметим, также, что с точки зрения электродинамики поле $\vec{w}(x)$, определяемое формулой (3.93), есть магнитное поле, индуцируемое поверхностными токами с поверхностной плотностью $\vec{\gamma}(y)$ (в данном случае речь идет о стационарных токах, не зависящих от времени).

3.7.6 Краевые значения градиента потенциала двойного слоя. Продолжим рассмотрение потенциала двойного слоя (3.85), где Σ – кусочно-гладкая поверхность, замкнутая или разомкнутая с краем.

Теорема 3.11. Пусть функция ν непрерывно дифференцируема во всех точках гладкости поверхности Σ , не являющихся точками края, функция ν и ее поверхностный градиент интегрируемы на поверхности Σ . Пусть $x_0 \in \Sigma$ – точка на поверхности Σ , являющейся точкой гладкости поверхности и не лежащая на краю поверхности и пусть в некоторой окрестности точки x_0 поверхностный градиент функции ν непрерывен по Гельдеру. Тогда в этой точке у градиента потенциала двойного слоя, определяемого выражением (3.85), существуют краевые значения, для которых справедливо выражение:

$$\text{grad } u^\pm(x_0) = \vec{w}(x_0) \pm \frac{1}{2} \text{Grad } \nu(x_0), \quad (3.94)$$

где значение $\vec{w}(x_0)$ определяется формулой (3.89), при подстановке в нее $x = x_0$. При этом первый интеграл в правой части этой формулы не имеет особенностей, второй интеграл понимается в смысле главного значения, третий как несобственный.

Также справедлива формула

$$\vec{w}(x_0) = \text{grad } u(x_0),$$

где $\text{grad } u(x_0)$ – прямое значение градиента потенциала двойного слоя, которое мы будем понимать как

$$\text{grad } u(x_0) = \int_{\Sigma} \nu(y) \text{grad}_x \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} \Big|_{x=x_0} dy, \quad (3.95)$$

интеграл в выражении (3.95) существует в смысле конечного значения по Адамару.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда Σ – элементарная гладкая поверхность с краем, функция ν непрерывно-дифференцируема

на поверхности Σ и ее поверхностный градиент непрерывен по Гельдеру на всей поверхности.

В соответствии с формулой (3.89) представим градиент рассматриваемого потенциала двойного слоя в точках вне поверхности Σ в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u(x) &\equiv \vec{w}(x) = \vec{w}_1(x) + \vec{w}_2(x) + \vec{w}_3(x), \\ \vec{w}_1(x) &= - \int_{\partial\Sigma} \nu(y) \operatorname{grad}_x F(x-y) \times \vec{\tau}(y) dy, \\ \vec{w}_2(x) &= \int_{\Sigma} \operatorname{grad}_x F(x-y) \times [\vec{n}(y) \times \operatorname{Grad} \nu(y)] dy, \\ \vec{w}_3(x) &= k^2 \int_{\Sigma} \nu(y) F(x-y) \vec{n}(y) dy. \end{aligned}$$

Поле $\vec{w}_1(x)$ определено в точке x_0 и бесконечно дифференцируемо в этой точке. Поле \vec{w}_3 также определено в рассматриваемой точке x_0 – каждая координата этого векторного поля есть потенциал простого слоя. Поэтому существуют краевые значения

$$\vec{w}_1^{\pm}(x_0) = \vec{w}_1(x_0), \quad \vec{w}_3^{\pm}(x_0) = \vec{w}_3(x_0).$$

Рассмотрим поле \vec{w}_2 . Для этого поля справедлива формула:

$$\vec{w}_2(x) = \int_{\Sigma} \operatorname{grad}_x F(x-y) \times \vec{\gamma}(y) dy,$$

где

$$\vec{\gamma}(y) = [\vec{n}(y) \times \operatorname{Grad} \nu(y)]$$

– касательное векторное поле на поверхности Σ , непрерывное по Гельдеру на каждой гладкой компоненте поверхности Σ . Представим это поле в координатной форме:

$$\vec{\gamma}(y) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(y) \vec{e}_i,$$

где \vec{e}_i – орты координатных осей. Тогда

$$\vec{w}_2(x) = \sum_{i=1}^3 \left(\operatorname{grad}_x \int_{\Sigma} F(x-y) \gamma_i(y) dy \right) \times \vec{e}_i.$$

Выражение в круглых скобках есть градиент потенциала простого слоя. Применяя теорему 3.10, получаем, что поле \vec{w}_2 имеет в точке x_0 краевые значения, для которых справедлива формула:

$$\vec{w}_2^{\pm}(x_0) = \sum_{i=1}^3 \left(\operatorname{grad}_x \int_{\Sigma} F(x-y) \gamma_i(y) dy \Big|_{x=x_0} \mp \frac{1}{2} \gamma_i(x_0) \vec{n}(x_0) \right) \times \vec{e}_i,$$

где интегралы существуют в смысле главного значения.

Последнее выражение можно переписать в виде:

$$\vec{w}_2^\pm(x_0) = \int_{\Sigma} \text{grad}_x F(x-y)|_{x=x_0} \times \vec{\gamma}(y) dy \mp \frac{1}{2} \vec{n}(x_0) \times \vec{\gamma}(x_0).$$

Т.к.

$$\vec{n}(x_0) \times [\vec{n}(x_0) \times \text{Grad} \nu(x_0)] = -\text{Grad} \nu(x_0),$$

имеем:

$$\vec{w}_2^\pm(x_0) = \int_{\Sigma} \text{grad}_x F(x-y)|_{x=x_0} \times [\vec{n}(y) \times \text{Grad} \nu(y)] dy \pm \frac{1}{2} \text{Grad} \nu(x_0),$$

где интеграл существует в смысле главного значения. Собирая полученные формулы, получаем формулу (3.94).

Докажем формулу (3.95).

Построим окрестность $\partial U(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 радиуса ε , граница которой $\partial U(x_0, \varepsilon)$ есть сфера, и пусть $L_\varepsilon = \Sigma \cap \partial U(x_0, \varepsilon)$. По лемме 3.6 при достаточно малом значении $\varepsilon > 0$ множество L_ε есть гладкий контур, задаваемый параметрически как $x = x_L(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Построим направляющий вектор на контуре L_ε в виде

$$\vec{\tau}(\theta) = \frac{dx_L/d\theta}{|dx_L/d\theta|}.$$

Пусть $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \setminus U(x_0, \varepsilon)$. В силу формулы (3.94)

$$\begin{aligned} \vec{w}(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\partial \Sigma} \nu(y) \text{grad}_x F(x-y) \times \vec{\tau}(y) dy + \right. \\ \left. + \int_{\Sigma_\varepsilon} \text{grad}_x F(x-y) \times [\vec{n}(y) \times \text{Grad} \nu(y)] dy + \right. \\ \left. + k^2 \int_{\Sigma_\varepsilon} \nu(y) F(x-y) \vec{n}(y) dy \right\}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \Sigma} \nu(y) \text{grad}_x F(x-y) \times \vec{\tau}(y) dy = \\ & = \int_{\partial \Sigma_\varepsilon} \nu(y) \text{grad}_x F(x-y) \times \vec{\tau}_\Sigma(y) dy + \int_{L_\varepsilon} \nu(y) \text{grad}_x F(x-y) \times \vec{\tau}(\theta) dy, \end{aligned}$$

где $\vec{\tau}_\Sigma(y)$ – направляющий вектор на контурах, являющихся краем поверхности $\partial \Sigma_\varepsilon$, выбираемый как в формуле Стокса (как в формуле

(3.71)). При этом на контуре $\partial\Sigma$ вектор $\vec{\tau}_\Sigma(y)$ совпадает с рассматриваемым ранее вектором $\vec{\tau}(y)$, а на контуре L_ε в точке $y = x_L(\theta)$ векторы $\vec{\tau}_\Sigma(y)$ и $\vec{\tau}(\theta)$ противоположно направлены.

Тогда применяя к потенциалу двойного слоя на поверхности Σ_ε формулу (3.89) и используя формулу (3.96), можем записать:

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial\Sigma} \nu(y) \operatorname{grad}_x F(x-y) \times \vec{\tau}(y) dy + \\ & + \int_{\Sigma_\varepsilon} \operatorname{grad}_x F(x-y) \times [\vec{n}(y) \times \operatorname{Grad} \nu(y)] dy + \\ & + k^2 \int_{\Sigma_\varepsilon} \nu(y) F(x-y) \vec{n}(y) dy = \\ = & \operatorname{grad} \int_{\Sigma_\varepsilon} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} \Big|_{x=x_0} dy - \int_{L_\varepsilon} \nu(y) \operatorname{grad}_x F(x-y) \times \vec{\tau}(\theta) dy. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \vec{w}(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \operatorname{grad} \int_{\Sigma_\varepsilon} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} \Big|_{x=x_0} dy - \right. \\ \left. - \int_{L_\varepsilon} \nu(y) \operatorname{grad}_x F(x-y) \Big|_{x=x_0} \times \vec{\tau}(\theta) dy \right\}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{L_\varepsilon} \nu(y) \operatorname{grad}_x F(x-y) \Big|_{x=x_0} \times \vec{\tau}(\theta) dy.$$

Основная идея дальнейшего рассуждения состоит в том, что бы показать, что если в данном интеграле заменить функцию $\nu(y)$ значением $\nu(x_0)$, а контур L_ε окружностью с центром x_0 радиуса ε , лежащей в касательной плоскости к поверхности, проведенной в точке x_0 , то значение данного интеграла изменится на величину, стремящуюся к 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. При проведении оценок воспользуемся леммой 3.6.

Обозначим

$$\vec{V}(x, y) = \operatorname{grad}_x F(x-y)$$

и перейдем в данном интеграле к интегрированию по параметру θ :

$$I = \int_0^{2\pi} \nu(y) \vec{V}(x, y) \times \vec{\tau}(\theta) \left| \frac{dx_L(\theta)}{d\theta} \right| d\theta,$$

где $y = x_L(\theta)$. Используя обозначения, введенные в лемме 3.6 и оценки, полученные в этой лемме, можем записать:

$$\left| \frac{dx_L(\theta)}{d\theta} \right| = \varepsilon |\vec{\tau}_0(\theta) + \Delta\vec{\tau}(\theta)| = \varepsilon + \beta(\varepsilon, \theta),$$

где

$$\beta(\varepsilon, \theta) = \varepsilon (|\vec{\tau}_0(\theta) + \Delta\vec{\tau}(\theta)| - 1).$$

При этом в силу равенств

$$|\vec{\tau}_0(\theta) + \Delta\vec{\tau}(\theta)|^2 = 1 + 2(\vec{\tau}_0(\theta), \Delta\vec{\tau}(\theta)) + \Delta\vec{\tau}(\theta)^2$$

и оценки

$$|(\vec{\tau}_0(\theta), \Delta\vec{\tau}(\theta))| \leq \varepsilon^2,$$

имеем:

$$|\beta(\varepsilon, \theta)| \leq \varepsilon^3,$$

здесь мы обозначаем через C константы, зависящие только от поверхности Σ и, возможно, функции ν , причем, в различных неравенствах значение константы C может быть различным.

Далее сразу заметим, что

$$|\vec{V}(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^2}.$$

Поэтому можем записать:

$$I = I_1 + \Delta I_1,$$

$$I_1 = \varepsilon \int_0^{2\pi} \nu(y) \vec{V}(x, y) \times \vec{\tau}(\theta) d\theta,$$

$$\Delta I_1 = \int_0^{2\pi} \nu(y) \vec{V}(x, y) \times \vec{\tau}(\theta) \beta(\varepsilon, \theta) d\theta,$$

причем,

$$|\Delta I_1| \leq \varepsilon.$$

Для функции $\vec{V}(x, y)$ справедливо выражение:

$$\vec{V}(x, y) = \vec{V}_0(x, y) + \Delta\vec{V}(x, y),$$

$$\vec{V}_0(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{y - x}{|y - x|^3},$$

3.7 Градиенты потенциалов. Пространственный случай

$$\Delta \vec{V}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \text{grad}_x \frac{e^{ik|x-y|} - 1}{|x-y|}.$$

При этом можно показать, что при любых $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$, справедлива оценка:

$$\left| \Delta \vec{V}(x, y) \right| \leq C. \quad (3.98)$$

Теперь пусть $y = x_L(\theta)$. Тогда

$$|y - x_0| = \varepsilon,$$

$$y - x_0 = (y_0 - x_0) + (y - y_0), \quad y_0 = y_0(\theta)$$

и

$$y_0 - x_0 = \varepsilon \vec{b}_0(\theta).$$

Поэтому можем записать:

$$\vec{V}_0(x_0, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{b}_0(\theta)}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4\pi} \frac{y - y_0}{\varepsilon^3}.$$

Далее, представим вектор $\vec{\tau}(\theta)$ в виде:

$$\vec{\tau}(\theta) = \vec{\tau}_0(\theta) + \Delta \vec{\tau}_L(\theta).$$

Заметим, что вектор $\vec{\tau}(\theta)$ можно построить как

$$\vec{\tau}(\theta) = \frac{dx_L/d\theta}{|dx_L/d\theta|} = \frac{\vec{\tau}_0(\theta) + \Delta \vec{\tau}(\theta)}{|\vec{\tau}_0(\theta) + \Delta \vec{\tau}(\theta)|}.$$

При этом из леммы 3.6 следует, что

$$|\Delta \vec{\tau}_L(\theta)| = |\vec{\tau}(\theta) - \vec{\tau}_0(\theta)| \leq \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\left| |\vec{\tau}_0(\theta) + \Delta \vec{\tau}_L(\theta)| - 1 \right| = |\beta(\varepsilon, \theta)| \leq \varepsilon^2.$$

Поэтому из оценки

$$|(\Delta \vec{\tau}(\theta), \vec{n}_0(\theta))| \leq C\varepsilon^2$$

следует оценка:

$$|(\Delta \vec{\tau}_L(\theta), \vec{n}_0(\theta))| \leq C\varepsilon^2. \quad (3.99)$$

Также справедлива оценка:

$$|(\Delta \vec{\tau}_L(\theta), \vec{\tau}_0(\theta))| \leq C\varepsilon^2. \quad (3.100)$$

Она следует из равенства:

$$1 = \vec{\tau}(\theta)^2 = (\vec{\tau}_0 + \Delta \vec{\tau}_L(\theta))^2 = 1 + 2(\vec{\tau}_0, \Delta \vec{\tau}_L(\theta)) + \Delta \vec{\tau}_L(\theta)^2$$

в силу которого имеем:

$$(\vec{\tau}_0, \Delta \vec{\tau}_L(\theta)) = -\frac{\Delta \vec{\tau}_L(\theta)^2}{2}.$$

Вернемся к интегралу I_1 . Представим его в виде:

$$\begin{aligned} I_1 &= \tilde{I}_1 + \Delta I_2 + \Delta I_3 + \Delta I_4, \\ \tilde{I}_1 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} \nu(y) [\vec{b}_0 \times \vec{\tau}_0] d\theta, \\ \Delta I_2 &= \varepsilon \int_0^{2\pi} \nu(y) \Delta \vec{V}(x, y) \times \vec{\tau}(\theta) d\theta, \\ \Delta I_3 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} \nu(y) [\vec{b}_0 \times \Delta \vec{\tau}_L] d\theta, \\ \Delta I_4 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_0^{2\pi} \nu(y) [(y - y_0) \times \vec{\tau}] d\theta. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл \tilde{I}_1 . Заметим, что $\vec{b}_0 \times \vec{\tau}_0 = \vec{n}_0$. Функцию $\nu(y)$ представим в виде:

$$\nu(y) = v(x_0) + \text{Grad}v(x_0)(y - x_0) + \alpha(y),$$

где $|\alpha(y)| = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда

$$\tilde{I}_1 = \frac{\vec{n}_0 \nu(x_0)}{4\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{\vec{n}_0}{4\pi\varepsilon} \left(\text{Grad}v(x_0), \int_0^{2\pi} (y - x_0) d\theta \right) + \frac{\vec{n}_0}{4\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} \alpha(y) d\theta.$$

Заметим, что

$$\int_0^{2\pi} (y - x_0) d\theta = \int_0^{2\pi} (y_0 - x_0) d\theta + \int_0^{2\pi} (y - y_0) d\theta,$$

где в правой части первый интеграл равен нулю, а во втором $|y - y_0| \leq \varepsilon^2$. Поэтому:

$$\tilde{I}_1 = \frac{\vec{n}_0 \nu(x_0)}{2\varepsilon} + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

3.7 Градиенты потенциалов. Пространственный случай

Для интегралов ΔI_2 и ΔI_3 справедливы оценки

$$|\Delta I_2| \leq \varepsilon, \quad |\Delta I_3| \leq \varepsilon,$$

в силу оценок (3.98), (3.99) и (3.100).

Наконец, рассмотрим интеграл ΔI_4 . Перепишем его в виде:

$$\begin{aligned} \Delta I_4 &= \frac{\nu(x_0)}{4\pi\varepsilon^2} \int_0^{2\pi} [(y - y_0) \times \vec{\tau}_0] d\theta + \\ &+ \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_0^{2\pi} [(y - y_0) \times (\nu(y)\vec{\tau} - \nu(x_0)\vec{\tau}_0)] d\theta. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части последней формулы по модулю не превосходит ε . Для оценки первого слагаемого запишем координаты точки y в специальной системе координат в виде

$$y = x_L(\theta) = (\xi_1, \xi_2, \psi(\xi_1, \xi_2)), \quad \xi_1 = \rho \cos \theta, \quad \xi_2 = \rho \sin \theta,$$

где $\rho = \rho(\varepsilon, \theta)$ – величина, подчиненная оценке (3.76). Функцию ψ представим в виде:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \xi_i \xi_j + o(\varepsilon^2),$$

где вторые производные берутся в точке x_0 .

Пусть, также, $\xi_1^0 = \varepsilon \cos \theta$, $\xi_2^0 = \varepsilon \sin \theta$. Тогда

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \xi_i^0 \xi_j^0 + o(\varepsilon^2)$$

и

$$y - y_0 = \vec{n}_0 \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \xi_i^0 \xi_j^0 + o(\varepsilon^2).$$

Значит, рассматриваемый интеграл можно записать в виде:

$$\Delta I_4 = \frac{\nu(x_0)}{4\pi\varepsilon^2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \int_0^{2\pi} \xi_i^0 \xi_j^0 [\vec{n}_0 \times \vec{\tau}_0] d\theta + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Остается заметить, что

$$\vec{n}_0 \times \vec{\tau}_0 = -b_0 = -(\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

и что

$$\int_0^{2\pi} \xi_i^0 \xi_j^0 \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \xi_i^0 \xi_j^0 \sin \theta d\theta = 0.$$

Значит

$$\Delta I_4 = \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Таким образом, мы получили, что

$$I = \frac{\vec{n}_0 \nu(x_0)}{2\varepsilon} + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Значит, формулу (3.97) можно переписать в виде

$$\vec{w}(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \text{grad} \int_{\Sigma_\varepsilon} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} \Big|_{x=x_0} dy - \frac{\vec{n}_0 \nu(x_0)}{2\varepsilon} \right\}. \quad (3.101)$$

Правая часть полученной формулы есть интеграл из формулы (3.95), понимаемый в смысле конечного значения по Адамару.

Теперь рассмотрим общий случай кусочно-гладкой поверхности, с предположениями, сформулированными в условии теоремы. Найдется участок Σ' поверхности Σ такой, что Σ' есть элементарная гладкая поверхность с краем, точка x_0 лежит на этом участке, не являясь точкой его края, и функция ν имеет поверхностный градиент непрерывный по Гельдеру на участке Σ' . Рассматриваемый потенциал двойного слоя u распадается на сумму потенциалов u_1 и u_2 , размещенных на поверхности Σ' и на оставшейся части, соответственно. При этом для потенциала u_1 справедливы формулы (3.94) и (3.95), а потенциал u_2 есть непрерывная функция в точке x_0 . При этом для градиента функции u_2 в точке x_0 справедлива формула (3.93) и тогда формула (3.94) верна для функции u .

Формула (3.95) так же верна для функции u_2 в точке x_0 , причем с интегралом, понимаемым в обычно смысле. Тогда для всего потенциала u формула (3.95) также верна.

Теорема доказана.

Глава 4

Уравнения Фредгольма. О численных методах

В этой главе мы сформулируем понятие уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода и сформулируем теоремы Фредгольма. Эти теоремы дают критерии разрешимости для уравнений Фредгольма 2-го рода. Также в этой главе мы, на примере уравнений Фредгольма, опишем численные методы решения интегральных уравнений: а именно метод кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций и конечно-элементный вариант метода Галеркина. Сразу оговоримся, что в нашем изложении дается только конструктивное описание этих методов и приводятся некоторые результаты по сходимости этих методов. Но вопросы обоснования сходимости этих методов мы не рассматриваем (эти вопросы можно найти в [39]).

4.1 Уравнения Фредгольма. Теоремы Фредгольма

Пусть D есть множество в пространстве \mathbb{R}^n одного из видов, рассмотренных в п.1.1.4: замыкание некоторой ограниченной области в пространстве \mathbb{R}^n (при $n = 1$ множество D есть некоторый отрезок $[a, b]$ на числовой прямой), кусочно-гладкая кривая на плоскости или в пространстве, кусочно-гладкая поверхность в пространстве. Во всех описанных случаях множество D предполагаем компактным (замкнутым и ограниченным).

Уравнением Фредгольма первого рода называется уравнение

$$\int_D K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in D, \quad (4.1)$$

где $f(x)$ – заданная функция, $\varphi(y)$ – неизвестная функция на множестве D , $K(x, y)$ – непрерывное или полярное ядро с интегрируемой особенностью (см. п.1.4., формула (1.41)). Как и в пункте 1.4 в случае, если D – замыкание области в \mathbb{R}^n , интеграл понимается как кратный (определенный при $n = 1$) или несобственный.

Для случая кривой или поверхности интеграл понимается как криволинейный или поверхностный первого рода (в том числе несобственный).

Уравнением Фредгольма второго рода называется уравнение

$$\varphi(x) + \int_D K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in D, \quad (4.2)$$

где опять $f(x)$ – заданная функция, $\varphi(y)$ – неизвестная функция на множестве D , $K(x, y)$ – непрерывное или полярное ядро.

Рассмотрим уравнения Фредгольма второго рода.

Уравнение (4.2) с произвольной правой частью будем как обычно называть неоднородным уравнением, а если $f(x) \equiv 0$ – однородным.

Рассмотрим уравнение (4.2) в классе непрерывных функций $C(D)$. Это есть линейное уравнение, которое в операторном виде можно записать как:

$$(I + K)\varphi = f, \quad (4.3)$$

$\varphi \in C(D)$ – неизвестная функция, $f \in C(D)$ – заданная правая часть, K – интегральный оператор, рассмотренный в п. 1.1.4, I – тождественный оператор.

Как и для любого линейного уравнения, общее решение неоднородного уравнения есть сумма частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения, причем, множество решений однородного уравнения есть линейное пространство.

Для уравнения Фредгольма (4.2) вводится также понятие союзного уравнения, которое записывается в виде:

$$\psi(x) + \int_D K(y, x)\psi(y)dy = g(x), \quad x \in D \quad (4.4)$$

Заметим, что если линейное пространство непрерывных функций рассматривать как Евклидово пространство $C_2[G]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_G f(x)g(x)dx,$$

то операторы K и K^* , определяемые формулами

$$(K\varphi)(y) = \int_G K(x, y)\varphi(x)dx$$

и

$$(K^*\psi)(y) = \int_D K(y, x)\varphi(x)dx, \quad \varphi, \psi \in C(D),$$

являются сопряженными операторами, т.е., для любых $\varphi, \psi \in C(D)$ выполнено условие:

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K^*\psi).$$

Для уравнения Фредгольма 2-го рода (4.2) следующие теоремы, которые называются теоремами Фредгольма, устанавливают условия разрешимости данного уравнения в классе непрерывных функций $C(D)$.

Теорема 4.1. 1-я теорема Фредгольма (альтернатива Фредгольма). Либо уравнение (4.2) имеет решение $\varphi \in C(D)$ для любой правой части $f \in C(D)$, либо у соответствующего ему однородного уравнения нулевое решение не является единственным в классе функций $C(D)$.

Теорема 4.2. 2-я теорема Фредгольма. Однородное уравнение, соответствующее уравнению (4.2), и однородное уравнение, соответствующее союзному с ним уравнению (4.4), имеют в классе функций $C(D)$ одно и то же, и при этом конечное, число линейно независимых решений.

Теорема 4.3. 3-я теорема Фредгольма. Неоднородное уравнение (4.2) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\int_G f(x)\psi(x)dx = 0$$

для любой функции $\psi \in C(D)$, являющейся решением однородного уравнения, соответствующего союзному уравнению (4.4).

Доказательство теорем Фредгольма можно найти в ([23, глава 1], [7, глава 4, §18], [44, глава 22, §22.9-22.10]).

Справедливость теорем Фредгольма связана с таким свойством как компактность оператора K , действующего из пространства $C(D)$ с нормой (1.39) в себя. Напомним, что это означает.

Множество M элементов нормированного пространства называется предкомпактным если из любого бесконечного подмножества этого множества можно извлечь фундаментальную подпоследовательность.

Линейный оператор K , действующий из нормированного пространства L_1 в нормированное пространство L_2 , называется компактным, если он любое ограниченное множество переводит в предкомпактное.

Компактность рассматриваемого оператора K , действующего из пространства $C(D)$ в пространство $C(D)$ означает, что если $\{\varphi_n\}$ – ограниченная последовательность функций в пространстве $C(D)$, то из последовательности $\{f_n = K\varphi_n \in C(D)\}$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.

В литературе, особенно прикладного характера, иногда называют уравнениями Фредгольма любые уравнения вида (4.1) или (4.2), не оговаривая какие-то свойства ядра интегрального оператора (функции $K(x, y)$). Мы будем называть к интегральным уравнениям Фредгольма именно уравнения вида (4.1) или (4.2), в которых интегральный оператор является компактным оператором, при действии из некоторого нормированного функционального пространства в себя. Именно в этом случае заведомо справедливы теоремы Фредгольма. В частности, как уже отмечалось, это верно для случая непрерывного и полярного ядра с интегрируемой особенностью, оговоренной в п.1.1.4, уравнение при этом рассматривается в пространстве непрерывных функций $C(D)$.

При применении метода интегральных уравнений к решению задач математической физики уравнения Фредгольма 2-го рода выделяют отдельно, поскольку для них есть теория разрешимости, приводящая к сформулированным теоремам. Уравнения первого рода, то же встречаются, но их теория в некотором смысле сложнее. Сделаем некоторые пояснения на примерах.

Особенностью уравнений Фредгольма 1-го рода является то, что если оператор, стоящий в левой части данного уравнения рассматривать как оператор, действующий из пространства непрерывных функций $C[G]$ в себя, то он является компактным и по соответствующим теоремам из функционального анализа (см., например [1]) не может иметь обратного оператора, определенного на всем пространстве $C[G]$. Поэтому уравнение (4.1) является некорректным в равномерной метрике: уравнение (4.1) заведомо не может быть разрешимым в классе непрерывных функций для всех непрерывных правых частей. Кроме того, как мы сейчас увидим, и множество решений однородного уравнения может оказаться очень “широким”.

Для примера рассмотрим уравнение (4.1) на отрезке $[-1, 1] = D$ с ядром $K(x, y) = x^2 y^3$, т.е. рассмотрим уравнение:

$$\int_{-1}^1 x^2 y^3 \nu(y) dx = f(x), \quad x \in [-1, 1].$$

Тогда для любой функции $\varphi \in C[-1, 1]$ имеем

$$\int_{-1}^1 K(x, y) \varphi(y) dy = x^2 \int_{-1}^1 y^3 \varphi(y) dy.$$

Значит, данное уравнение разрешимо, только если $f(x) = Cx^2$, где C

– константа. Если же функция f имеет последний вид, то уравнение имеет бесконечно много решений, определяемых соотношением

$$\int_{-1}^1 y^3 \varphi(y) dy = C,$$

где C – указанная выше константа.

Здесь обратим внимание, что если рассмотреть соответствующее однородное уравнение ($f(x) = 0$, $x \in [-1, 1]$), то его решением, в частности, будет любая непрерывная четная функция на отрезке $[-1, 1]$. Уже множество таких функций бесконечномерно (а это еще не все решения данного уравнения). Таким образом, подпространство решений однородного уравнения Фредгольма 1-го рода может быть бесконечномерным. Для уравнений Фредгольма 2-го рода такое не возможно – это утверждается во 2-й теореме Фредгольма (теореме 4.2).

Уравнения первого рода с полярным ядром более содержательны и во многих случаях бывают однозначно разрешимы для правых частей, удовлетворяющих определенным условиям гладкости. Далее мы рассмотрим применимость таких уравнений к решению краевых задач.

Нужно, также, заметить, что утверждения теорем Фредгольма могут быть выполнены и для некоторых других конкретных уравнений, например, с сингулярными и гиперсингулярными интегралами – такие уравнения иногда называют уравнениями Фредгольмового типа. Но в этом случае эти теоремы необходимо доказывать отдельно, причем, идеи таких доказательств будут сильно отличаться от случая уравнения (4.2) с компактным оператором. Кроме того, в случае уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами в значительной степени стирается различие между уравнениями 1-го и 2-го рода (вида (4.1) и (4.2)) (см., например, [30, глава 3, §49]).

4.2 О численных методах решения интегральных уравнений

4.2.1 Общие замечания. Рассмотрим уравнение вида

$$\alpha(x)\varphi(x) + \int_D K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in D, \quad (4.5)$$

где D есть множество в пространстве \mathbb{R}^n одного из рассматриваемых видов, $f(x)$ – заданная правая часть, $K(x, y)$ – заданное ядро, $\alpha(x)$ – заданная функция (коэффициент), определенные при $x, y \in D$, φ – неизвестная функция на множестве D .

Заметим, что в случае, когда $K(x, y)$ есть непрерывное или полярное ядро, как частный случай уравнения (4.5) могут выступать уравнение Фредгольма 1-го рода (при $\alpha(x) \equiv 0$) или второго рода (при $\alpha(x) \equiv 1$, а, по сути, и при $\alpha(x) > \varepsilon > 0$, т.к. в этом случае на эту функцию уравнение можно разделить).

Ниже мы приведем на конструктивном уровне численные схемы метода коллокации с кусочно-постоянной аппроксимацией неизвестной функции и метода Галеркина с конечно-элементной аппроксимацией неизвестной функции. Отметим, что общие схемы этих методов являются едиными для уравнений вида (4.5) с различными типами ядра: в частности и для случая уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода, и для уравнения с сингулярным и гиперсингулярным ядром. Однако тип уравнения является существенным как с точки зрения факта сходимости возникающей численной схемы и оценок для приближенного уравнения, так и при вычислении интегралов по ячейкам, которые появятся при записи коэффициентов дискретных уравнений.

4.2.2 Метод коллокации с кусочно-постоянной аппроксимацией неизвестной функцией. Осуществим разбиение множества D на систему ячеек σ_i , $i = 1, \dots, N$ (разбиение множества – см. определение 1.1).

Пусть σ_i^{in} есть множество внутренних точек ячейки σ_i .

В случае, когда множество D есть кривая, и, соответственно, σ_i есть дуга этой кривой – σ_i^{in} есть множество точек, не являющихся концом для дуги σ_i . В случае, когда множество D есть поверхность, и, соответственно, σ_i есть участок этой поверхности, σ_i^{in} есть множество точек, не лежащих на краю поверхности σ_i .

Во всех случаях $\sigma_i^{in} \cap \sigma_j^{in} = \emptyset$ при $i \neq j$. Соответственно множество остальных точек ячейки будем обозначать как $\partial\sigma_i$ и называть границей (здесь мы имеем в виду, что для кривой границей мы назвали множество концов, а для поверхности ее край).

На каждой ячейке σ_i выберем точку коллокации $x^i \in \sigma_i^{in}$. Системе ячеек с выбранными точками коллокации $\{(\sigma_i, x^i)\}$, $i = 1, \dots, N$, мы уже называли отмеченным разбиением.

Приближенное решение уравнения (4.5) будем искать в виде функции $\tilde{\varphi}$, принимающей на каждой ячейке разбиения постоянное значение:

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi_i \text{ при } x \in \sigma_i^{in}. \quad (4.6)$$

Заметим, что значения, которые функция $\tilde{\varphi}$ принимает на границах ячеек не существенны. Для строгости можно положить $\tilde{\varphi}(x) = 0$, если x – лежит на границе одной или нескольких ячеек.

Далее приближенную функцию $\tilde{\varphi}$ ищем так, чтобы для нее выполнялось уравнение (4.5) в точках коллокации:

$$\alpha(x^i)\tilde{\varphi}(x^i) + \int_D K(x^i, y)\tilde{\varphi}(y)dy = f(x^i), \quad i = 1, \dots, N.$$

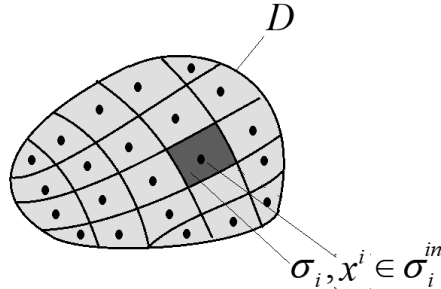


Рис. 4.1: Разбиение множества

Разбивая интеграл на сумму интегралов по ячейкам, получаем:

$$\alpha(x^i)\tilde{\varphi}(x^i) + \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_j^{in}} K(x^i, y)\tilde{\varphi}(y)dy = f(x^i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Отсюда, учитывая, что функция $\tilde{\varphi}$ имеет вид (4.6), имеем систему линейных алгебраических уравнений для значений φ_i :

$$\alpha_i \varphi_i + \sum_{j=1}^n K_{ij} \varphi_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.7)$$

где

$$\alpha_i = \alpha(x^i), \quad f_i = f(x^i), \quad K_{ij} = \int_{\sigma_j} K(x^i, y)dy. \quad (4.8)$$

Приведем без доказательства некоторые факты, относящиеся к сходимости описанного метода для уравнения Фредгольма 2-го рода, являющегося однозначно разрешимым в классе непрерывных функций (см. первую теорему Фредгольма – альтернативу Фредгольма). Доказательство всех приводимых утверждений можно найти в [39, глава 3, §3.2].

Напомним, что диаметром разбиения называется число $h = \max_{i=1, \dots, N} h_i$, где $h_i = \sup_{x, y \in \sigma_i} |x - y|$ – диаметр ячейки σ_i .

Если уравнение (4.5) является уравнением Фредгольма второго рода, то существуют константы h_0 и C такие, что для любого отмеченного разбиения с диаметром $h < h_0$ система уравнений (4.7) однозначно разрешима и для ее матрицы A справедлива оценка

$$\|A^{-1}\| \leq C, \quad (4.9)$$

где $\|A^{-1}\|$ – операторная норма матрицы, соответствующая норме вектора

$$\|(\varphi_1, \dots, \varphi_N)\| = \max_{i=1, \dots, N} |\varphi_i|. \quad (4.10)$$

Это означает, что для любого набора правых частей в системе (4.8) ее решение подчинено оценке:

$$\max_{i=1, \dots, N} |\varphi_i| \leq C \max_{i=1, \dots, N} |f_i|.$$

При этом точное решение уравнения (4.5) $\varphi(x)$ и решение соответствующей системы (4.8) связаны оценкой:

$$\max_{i=1, \dots, N} |\varphi_i - \varphi(x^i)| \leq C \max_{i=1, \dots, N} |\delta_i|, \quad (4.11)$$

где

$$\delta_i = \int_D K(x^i, y) \varphi(y) dy - \sum_{j=1}^N K_{ij} \varphi(x^j).$$

Отметим, что сумма в последнем выражении есть квадратурная формула для вычисления интеграла, стоящего в этой же формуле. При этом δ_i есть погрешность такой квадратурной формулы вычисления интеграла на точном решении в точке x^i .

Далее, если точное решение удовлетворяет на множестве D условию Гельдера с показателем $\mu \in (0, 1]$, то для погрешностей δ_i справедлива оценка:

$$|\delta_i| \leq Ch^\mu, \quad (4.12)$$

где C – некоторая константа, в данном случае, определяемая функциями K и φ (значение константы C здесь и ниже в этом пункте различных оценках может быть различным). Отметим, что данная оценка справедлива и в случае непрерывного и в случае полярного ядра с интегрируемой особенностью, если только решение имеет указанную гладкость.

В случае, когда решается уравнение (4.5) типа Фредгольма второго рода с определенным или кратным интегралом (множество D есть замыкание области в пространстве \mathbb{R}^n), ядро уравнения – функция $K(x, y)$, и его решение есть дважды непрерывно дифференцируемые функции, справедлива более сильная оценка для погрешности при специальном выборе точек коллокации. Здесь сразу заметим, что если в уравнении (4.7) $\alpha \equiv 1$, а ядро уравнения и его правая часть есть дважды непрерывно дифференцируемые функции, то решение будет также дважды непрерывно дифференцируемым в силу формулы

$$\varphi(x) = - \int_D K(x, y) \varphi(y) dy + f(x), \quad x \in D,$$

где правая часть дважды дифференцируема.

Предположим, что множество D позволяет использовать разбиения на систему выпуклых ячеек σ_i , $i = 1, \dots, N$. В этом случае выберем точку коллокации на каждой ячейке как ее центр масс:

$$x^i = \frac{\int y dy}{\int 1 dy}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.13)$$

Тогда для погрешностей δ_i справедлива оценка:

$$|\delta_i| \leq Ch^2 \quad (4.14)$$

и, соответственно, в силу оценки (4.11) погрешность приближенного решения также оценивается величиной порядка h^2 .

Более того, оценка (4.14) сохраняется, если в этом случае коэффициенты K_{ij} вычислять приближенно по формуле:

$$K_{ij} = K(x^i, x^j)\mu(\sigma_j), \quad (4.15)$$

$\mu(\sigma_j)$ – мера ячейки σ_j .

4.2.3 О разбиении области интегрирования на ячейки. В предыдущем подпункте 4.2.2. мы предполагали, что ячейки образуют разбиение области интегрирования D . Это означает, что объединение всех ячеек совпадает с множеством D . Однако это не всегда целесообразно и не всегда возможно. Часто применяют аппроксимацию множества D системой ячеек. При этом объединением всех ячеек будет некоторое множество \tilde{D} . Разбиение стараются строить так, чтобы получить множество \tilde{D} , в некотором смысле близкое к множеству D .

Если решается уравнение (4.5) типа Фредгольма второго рода с определенным или кратным интегралом (множество D есть замыкание области в пространстве \mathbb{R}^n), к аппроксимации множества D приходится прибегать в случае, когда его граница имеет сложную форму. При этом ячейки $\tilde{\sigma}_i$ должны образовывать разбиение своего объединения – множества \tilde{D} .

Можно оценить дополнительную погрешность, возникающую из-за такой аппроксимации в случае, когда аппроксимация множества D получена путем упрощения формы ячеек, образующих разбиение множества D . А именно, предположим, что существует разбиение σ_i , $i = 1, \dots, N$, множества D , такое, что

$$\bigcup_{i=1}^N \sigma_i = D,$$

$$\mu(\tilde{\sigma}_i \cap \sigma_j) \neq 0 \text{ при } i = j,$$

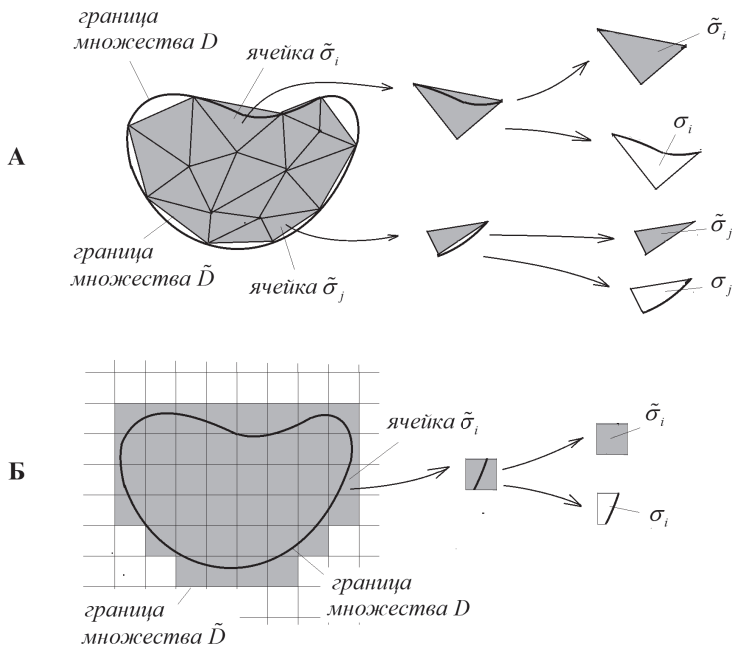


Рис. 4.2: Аппроксимация множества на плоскости

$$\mu(\tilde{\sigma}_i \cap \sigma_j) = 0 \text{ при } i \neq j.$$

При этом мы предполагаем, что $x^i \in \sigma_i \cap \tilde{\sigma}_i$ и что функции $K(x^i, y)$ определены (доопределены) при $y \in \tilde{D}$ (это существенно в случае, когда множество \tilde{D} содержит точки, не лежащие в множестве D) и что .

На рисунке 4.2. показаны примеры таких аппроксимаций множества D на плоскости системами ячеек треугольной (случай А) и прямоугольной (случай Б) формы. В случае А осуществляется аппроксимация множества D системой треугольных ячеек так, что граница множества \tilde{D} – объединения треугольных ячеек, есть ломаная линия, вершины которой лежат на границе множества D . В случае Б) прямоугольная сетка накладывается на фигуру D и в ней выделяются те прямоугольные ячейки, которые имеют пересечение с фигурой D . Также на этом рисунке показаны примеры построения ячеек разбиения исходного множества σ_i , $i = 1, \dots, N$, связанных с ячейками $\tilde{\sigma}_i$ сформулированными только что соотношениями (для ячеек, не лежащих у края фигуры D считаем что $\sigma_i = \tilde{\sigma}_i$).

При использовании аппроксимации множества D системой ячеек

$\tilde{\sigma}_i, i = 1, \dots, N$, мы решаем систему уравнений:

$$\alpha_i \tilde{\varphi}_i + \sum_{j=1}^n \tilde{K}_{ij} \tilde{\varphi}_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.16)$$

где

$$\alpha_i = \alpha(x^i), \quad \tilde{K}_{ij} = \int_{\tilde{\sigma}_j} K(x^i, y) dy. \quad (4.17)$$

Матрица $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ системы (4.16), где $\tilde{a}_{ij} = \alpha_i + \tilde{K}_{ij}$, связана с матрицей $A = (a_{ij})$ системы (4.7), где $a_{ij} = \alpha_i + K_{ij}$, оценкой

$$|a_{ij} - \tilde{a}_{ij}| = \int_{\sigma_j \Delta \tilde{\sigma}_j} |K(x^i, y)| dy,$$

здесь $\sigma_j \Delta \tilde{\sigma}_j$ – симметрическая разность множеств.

Тогда матрица

$$\Delta A = (a_{ij} - \tilde{a}_{ij})$$

имеет операторную норму, порождаемую нормой вектора (4.10), удовлетворяющую оценке:

$$\|\Delta A\| \leq \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N |\Delta a_{ij}| \leq \max_{i=1, \dots, N} \sum_{j=1}^N \int_{\sigma_j \Delta \tilde{\sigma}_j} |K(x^i, y)| dy. \quad (4.18)$$

Далее, при выполнении оценки (4.9) найдутся константы C_1 и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при условии $\|\Delta A\| < \varepsilon_0$ система (4.16) однозначно разрешима и решение этой системы связано с решением системы (4.7) оценкой (см., например, теорему 2.6 из [39]):

$$|\varphi_i - \tilde{\varphi}_i| \leq C_1 \|\Delta A\|. \quad (4.19)$$

Таким образом, дополнительную погрешность решения, по сравнению с погрешностью, оцененной в неравенстве (4.11), можно получить из неравенств (4.19) и (4.18).

Например, если ядро $K(x, y)$ есть ограниченная функция и

$$|K(x, y)| \leq M,$$

то

$$\|\Delta A\| \leq M \sum_{i=1}^N \mu(\sigma_i \Delta \tilde{\sigma}_i),$$

μ – мера множества. В частности в двумерном случае, когда аппроксимация происходит путем спрямления дуг границы, как на рисунке

4.2 случай А, или построения внешнего покрытия системой ячеек, каждая из которых имеет общие точки с множеством D , как на рисунке 4.2 Б, может быть получена оценка

$$\|\Delta A\| \leq O(h^2),$$

где h – диаметр разбиения.

В случае, когда уравнение решается на кривой, или на поверхности, ситуация может быть сложнее.

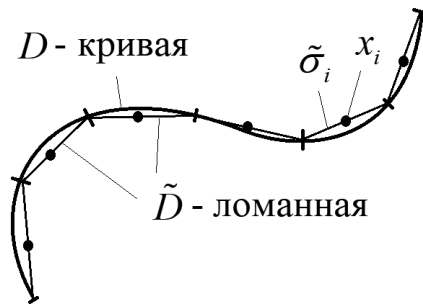


Рис. 4.3: Аппроксимация кривой

Если множество D есть кривая, то аппроксимацию этой кривой можно осуществить ломанной линией \tilde{D} , вершины которой лежат на кривой (рисунок 4.3). В этом случае в качестве ячеек разбиения $\tilde{\sigma}_i$, $i = 1, \dots, N$, рассматриваются звенья ломанной линии. При этом функцию $K(x, y)$ необходимо доопределить в окрестности кривой так, чтобы ее можно было вычислять на ломаной линии \tilde{D} : точки коллокации x^i берутся на ломаной линии \tilde{D} , решается система (4.16), коэффициенты которой вычисляются по формуле (4.17). Вывод оценок для погрешности можно получить, сравнив матрицы систем (4.16) и (4.7), где предполагается, что система (4.7) записывается на разбиении кривой D на дуги $\sigma_i \subset D$, так, что дуга σ_i и отрезок $\tilde{\sigma}_i$ имеют общие концы. В случае уравнения на кривой такой способ аппроксимации обычно позволяет получить приближенное решение.

В случае, когда уравнение решается на поверхности D , обычно, также, строят аппроксимацию поверхности системой ячеек, допускающих универсальную форму параметризации. Например, часто используют триангуляцию поверхности, т.е. аппроксимацию поверхности системой треугольных ячеек, вершины которых лежат на поверхности. Возможно также использование четырехугольных ячеек, края которых есть пространственные ломаные из четырех звеньев.

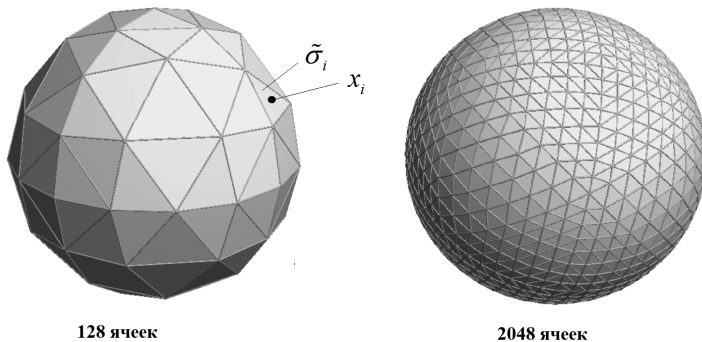


Рис. 4.4: Аппроксимация поверхности

На рисунке 4.4 показаны примеры триангуляций поверхности сферы. Слева приведено грубое разбиение с использованием 128 ячеек. Здесь хорошо видно, что вместо и реальной поверхности сферы мы имеем многогранник. Слева приведено разбиение поверхности сферы на 2048 ячеек. Хотя визуально аппроксимирующая поверхность выглядит как гладкая сфера, в действительности это то же есть многогранник.

Важно заметить, что при аппроксимации поверхностей одной только малости диметров ячеек, аппроксимирующих поверхность, не достаточно для получения приемлемого приближенного решения. Нужно иметь виду возможное проявление эффекта так называемого «сапога Шварца» (см. например, [45, глава 17, §2, п.623]).

Напомним, что «сапог Шварца» - это приведенный математиком Шварцем (Schwarz, H. A.) пример, показывающий несостоятельность определения площади поверхности как точной верхней грани площадей поверхностей, состоящих из плоских многоугольников с вершинами на рассматриваемой поверхности. Здесь проявляется противоположность тому, что длина кривой может быть определена как точная верхняя грань длин ломаных, вершины которых лежат на кривой.

Говоря современным языком, сапог Шварца – это триангуляция боковой поверхности кругового цилиндра, построенная следующим образом.

Рассмотрим боковую поверхность цилиндра, заданную в системе координат $Oxyz$ уравнением

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq H.$$

Проведем на поверхности цилиндра окружности $z = z_i$, где $z_i = ih$, $h = H/n$, $i = 0, 1, \dots, n$. На каждой окружности с номером i построим

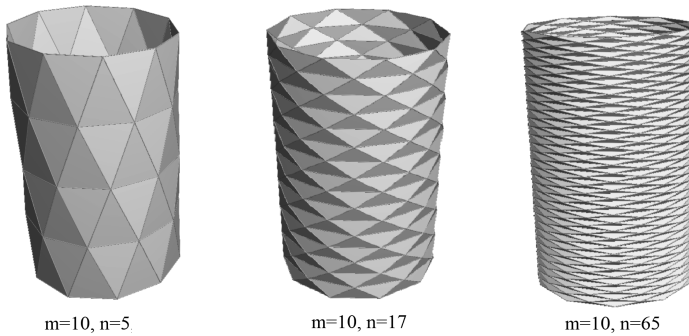


Рис. 4.5: Сапог Шварца

систему точек M_{ij} , $j = 1, \dots, m$, так, что если i четное, то

$$M_{ij} = (\cos \varphi_j, \sin \varphi_j, z_i), \quad \varphi_j = j\Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = 2\pi/m,$$

а если i нечетное, то

$$M_{ij} = (\cos \psi_j, \sin \psi_j, z_i), \quad \psi_j = \varphi_j + \Delta\varphi/2$$

и пусть для удобства дальнейших записей $M_{im+1} = M_{i1}$.

Говоря простым языком, мы разместили на нижней окружности m точек, а далее n раз сместили эту окружность на высоту h , каждый раз поворачивая на угол $\Delta\varphi/2$.

Далее соединим каждую точку M_{ij} с ближайшими точками на соседних окружностях. В результате получим систему треугольников, образующих триангуляцию поверхности. Все эти треугольники конгруэнтны и число этих треугольников равно $2mn$.

Пусть площадь одного такого треугольника равна s , а диаметр (наибольшая из длин сторон) равна d . Спроектируем такой треугольник на плоскость основания цилиндра $z = 0$. Получим треугольник, площадь которого равна некоторому числу s' , причем, $0 < s' < s$ и площадь s' зависит от m и не зависит от n . Площадь поверхности \tilde{S} , составленной из наших треугольников, определяется формулой

$$S = 2mn s \geq 2mn s'.$$

Теперь ясно, что для любых сколь угодно малого $d_0 > 0$ и сколь угодно большого S_0 можно сначала найти такое m , чтобы при $n > m$ было выполнено условие $d < d_0$, а затем найти такое n , что $n > m$ и $S > S_0$.

Это означает, что при соответствующем выборе значений n и m , диаметры треугольников, образующих нашу триангуляцию, могут

быть сделаны сколь угодно малыми, а при этом значение интеграла

$$\int_{\tilde{\Sigma}} 1 dy,$$

может быть сколь угодно большим. Аппроксимировать поверхностные интегралы по поверхности цилиндра и решать интегральное уравнение на его поверхности, используя такую триангуляцию, бессмысленно.

Анализируя этот пример можно обнаружить 2 закономерности. Увеличение площади боковой поверхности аппроксимирующей фигуры происходит, во-первых, при условии сильного отклонения ориентации векторов нормалей к поверхностям треугольников, от нормалей к боковой поверхности цилиндра, проведенной в каждой из вершин. Во-вторых, это увеличение площади сопровождается появлением треугольников, у которых есть очень малый угол.

Пусть Σ – гладкая поверхность, а $\tilde{\Sigma}$, ее триангуляция. Вопросы об условиях, обеспечивающих аппроксимацию интегралов по поверхности Σ интегралами по поверхности $\tilde{\Sigma}$, рассматривались, в частности, в статье [35]. Было показано, что при близости поверхностей Σ и $\tilde{\Sigma}$ условием, обеспечивающим близость интегралов при стремлении диаметра триангуляции к 0, является ограничение на величину углов треугольников снизу: при стремлении диаметра триангуляции к 0 все углы всех треугольников должны быть больше некоторого $\alpha_0 > 0$.

4.2.4 О приближенном вычислении интегралов по ячейкам. Далее, остановимся на вопросе вычисления коэффициентов K_{ij} системы линейных уравнений (4.7). Вычисление каждого такого коэффициента состоит в вычислении интеграла по ячейке разбиения, указанного в формулах (4.8). Оценки (4.9) – (4.12) приведены для случая, когда этот интеграл вычислен точно.

Конечно, если интегралы в выражении для коэффициентов K_{ij} можно вычислить аналитически, это нужно делать. Если интегралы не вычисляются аналитически, их нужно вычислять приближенно.

Наиболее универсальным и, в то же время, достаточно эффективным является подход, основанный на доразбиении каждой ячейки на систему более мелких ячеек второго уровня и применении формулы прямоугольников. Разобьем каждую ячейку σ_j на систему ячеек второго уровня σ_j^p , $p = 1, \dots, M$. Выберем на каждой ячейке σ_j^p узел

$y^j \in \sigma_j^p$ и, в случае непрерывного ядра, положим:

$$\tilde{K}_{ij} = \sum_{p=1}^M K(x^i, y^j) s_j^p, \quad (4.20)$$

s_j^p – площадь ячейки σ_j^p .

Если рассматривается полярное ядро вида

$$K(x, y) = \frac{K^*(x, y)}{|x - y|^\alpha},$$

то для приближенного вычисления интегралов по ячейкам можно применять формулу (4.20) с домножением на сглаживающий множитель:

$$\tilde{K}_{ij} = \sum_{p=1}^M K(x^i, y^j) \theta_\varepsilon(|x^i - y^j|) s_j^p, \quad (4.21)$$

$\theta_\varepsilon(r)$ – сглаживающая функция, выбираемая так, что $\theta_\varepsilon(r) \in C^1[0, \infty)$, $\theta_\varepsilon(r) = 1$ при $r \geq \varepsilon$, $0 \leq \theta_\varepsilon(r) \leq C_0 (r/\varepsilon)^\alpha$ при $0 \leq r \leq \varepsilon$, C_0 – константа, не зависящая от r и ε . Например, при $\alpha < 2$, можно положить

$$\theta_\varepsilon(r) = 3(r/\varepsilon)^2 - 2(r/\varepsilon)^3.$$

При этом ε – малый параметр, который рекомендуется выбирать порядка диаметра разбиения второго уровня, состоящего из ячеек σ_j^p .

Заметим, что применение формул вида (4.20) и (4.21) с большими значениями параметра M требует определенных вычислительных затрат. Однако, следует иметь в виду, что при этом число уравнений в системе (4.7) не меняется, а следовательно не меняются ни время решения системы, ни затраты на хранение ее матрицы в памяти, при использовании как прямых так и итерационных алгоритмов.

При этом, в случае уравнения с гладким ядром нет смысла использовать вторичное разбиение с большим значением параметра M – числа ячеек второго уровня на каждой ячейке.

В случае ядер с полярной особенностью, при вычислении коэффициентов K_{ij} целесообразно использовать схему с переменным значением параметра M в зависимости от расстояния между ячейками σ_i и σ_j (на практике удобно оценивать это расстояние как расстояние между точками коллокации x^i и x^j). При этом число ячеек второго уровня $M = M(i, j)$ можно уменьшать с увеличением расстояния между точками x^i и x^j (отметим, что сглаживающий множитель на больших расстояниях равен 1).

4.2.5 Метод Галеркина. Конечно-элементная реализация. Скалярное произведение. Предположим, что решение уравнения (4.5) – функция $\varphi(x)$ ищется в некотором функциональном пространстве L , в котором введено скалярное произведение. Напомним, что если L – некоторое пространство, элементами которого являются действительные функции на множестве D , скалярное произведение функций f и g можно ввести по формуле:

$$(f, g) = \int_D \rho(x) f(x) g(x) dx, \quad (4.22)$$

где $\rho(x)$ – весовая функция (вес), удовлетворяющая условию $\rho(x) \geq 0$ всюду на множестве D , причем. $\rho(x) > 0$ за исключением может быть, множества нулевой меры.

Если L – некоторое пространство, элементами которого являются комплексные функции на множестве D , скалярное произведение функций f и g можно ввести по формуле:

$$(f, g) = \int_D \rho(x) f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (4.23)$$

где $\overline{g(x)}$ – функция, комплексно-сопряженная с $g(x)$, весовая функция $\rho(x)$ по-прежнему берется действительной.

В качестве пространства L могут выступать действительное или комплексное пространство непрерывных функций со скалярным произведением (4.22) или (4.23), соответственно. Но это пространство не является полным, если его рассматривать как нормированное пространство с нормой, порождаемой скалярным произведением:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Его пополнением является пространство $L_{2,\rho}(D)$, элементами которого являются функции, для которых следующий интеграл существует как интеграл Лебега [22, глава 7, §2]:

$$(f, f) = \int_D \rho(x) |f(x)|^2 dx. \quad (4.24)$$

Будем, как обычно, обозначать $L_2(D)$ указанное пространство в случае $\rho \equiv 1$.

Некоторые определения, связанные с понятием ортогональности элементов. Если для двух элементов f и g выполнено равенство $(f, g) = 0$, то такие элементы называются ортогональными.

Пусть N – некоторое подпространство пространства L .

Ортогональным дополнением к подпространству N называется множество N^\perp элементов $f \in L$ таких, что $(f, g) = 0$ для всех элементов $g \in N$.

Ортогональной проекцией элемента $f \in L$ на подпространство N называется такой элемент $g \in N$, что разность $h = f - g$ лежит в ортогональном дополнении N^\perp к подпространству N .

Заметим, что в этом случае выполнено равенство:

$$f = g + h, \text{ где } g \in N, \quad h \in N^\perp. \quad (4.25)$$

Таким образом, операция нахождения ортогональной проекции, которую называют ортогональным проектированием элемента, есть разложение элемента по подпространствам N и N^\perp .

Будем обозначать ортогональную проекцию элемента на подпространство N как $g = \Pi_N^\perp f$.

В случае, когда подпространство N конечномерно, существование и единственность ортогональной проекции следуют из следующего конструктивного алгоритма нахождения ортогональной проекции. Если подпространство N имеет размерность n , то в нем найдется некоторый базис e_1, \dots, e_n . При этом элемент $h \in N^\perp$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$(h, e_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.26)$$

Будем искать ортогональную проекцию $g = \Pi_N^\perp f$ в виде:

$$g = g_1 e_1 + \dots + g_n e_n,$$

где g_1, \dots, g_n — некоторые неизвестные коэффициенты. Уравнения для этих коэффициентов получаем из равенств (4.24) для вектора $h = f - g$:

$$\left(f - \sum_{j=1}^n g_j e_j, e_i \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

что можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} g_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.27)$$

$$a_{ij} = (e_i, e_j), \quad f_i = (f, e_i).$$

Заметим, что система (4.27) с использованием произвольного базиса является полезной в случае практического нахождения ортогональной проекции. Для доказательства существования и единственности ортогональной проекции вспомним, что базис e_1, \dots, e_n можно выбрать ортонормированным. Это означает, что

$$a_{ij} = (e_i, e_j) = 1 \text{ при } i = j, \quad a_{ij} = (e_i, e_j) = 0 \text{ при } i \neq j.$$

В этом случае система (4.27) имеет вид

$$g_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n$$

и является однозначно разрешимой. Тогда ортогональная проекция существует и единственна.

Заметим, что теперь из существования и единственности ортогональной проекции следует однозначная разрешимость системы (4.27) и в случае любого базиса.

Далее заметим, что если подпространство N бесконечномерное, приведенное свойство о существовании и единственности ортогональной проекции нуждается в корректировке. Единственность по-прежнему будет иметь место, а существование ортогональной проекции гарантируется, в частности, в случае сепарабельности (существования счетного базиса) и полноты подпространства N .

Общая схема метода Галеркина. Запишем уравнение (4.5) в операторном виде

$$\alpha\varphi + K\varphi = f, \quad (4.28)$$

где $f \in L$, K – оператор, который функции $\varphi \in L$ ставит в соответствие функцию

$$f(x) \equiv (K\varphi)(x) = \int_D K(x, y)\varphi(y)dy,$$

α – строго говоря, оператор, который функции $\varphi \in L$ ставит в соответствие функцию

$$f(x) \equiv (\alpha\varphi)(x) = \alpha(x)\varphi(x).$$

При этом предполагаем, что для любой функции $\varphi \in L$ выполнены условия $K\varphi \in L$, $\alpha\varphi \in L$.

Пусть теперь M и N – некоторые конечномерные подпространства пространства L одинаковой размерности. Приближенное решение уравнения (4.28) – функцию $\tilde{\varphi}(x)$, ищем как элемент подпространства M из условия:

$$P_N^\perp(\alpha\tilde{\varphi} + K\tilde{\varphi} - f) = 0. \quad (4.29)$$

Далее, пусть n – размерность подпространств M и N , e_1, \dots, e_n – некоторый базис в подпространстве M , u_1, \dots, u_n – некоторый базис в подпространстве N . Тогда ищем приближенное решение в виде:

$$\tilde{\varphi} = \varphi_1 e_1 + \dots + \varphi_n e_n. \quad (4.30)$$

Равенства (4.29) равносильны системе уравнений:

$$(\alpha\tilde{\varphi} + K\tilde{\varphi}, u_i) = (f, u_i). \quad (4.31)$$

Подставляя в уравнения (4.31) функцию $\tilde{\varphi}$ в виде (4.30), после несложных преобразований приходим к системе линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \varphi_j + \sum_{j=1}^n K_{ij} \varphi_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.32)$$

где:

$$\alpha_{ij} = (\alpha e_j, u_i), \quad K_{ij} = (K e_j, u_i), \quad f_j = (f, u_i). \quad (4.33)$$

Полученная численная схема (4.32)-(4.33) применима к любому операторному уравнению вида (4.28).

Отметим, что функции e_1, \dots, e_n в разложении (4.30) называют также базисными функциями метода Галеркина, а функции u_1, \dots, u_n – тестовыми метода Галеркина.

Описанный метод, в котором подпространства M и N , вообще говоря, различны, называется также методом Галеркина-Петрова.

Однако во многих случаях удобно использовать одно и то же подпространство $N = M$ и как подпространство, содержащее приближенное решение, и как подпространство, на которое осуществляется проектирование уравнения. В этом случае естественно использовать один и тот же набор функций в качестве базовых и тестовых. Такой вариант метода Галеркина, в котором: $e_i = u_i, i = 1, \dots, n$, называется методом Бубнова – Галеркина.

Вернемся к случаю, когда решается интегральное уравнение (4.5), а скалярное произведение имеет вид (4.22) или (4.23). Здесь заметим, что даже если решается комплексное уравнение, тестовые функции часто берутся действительными. В этом случае выражения для коэффициентов α_{ij} и K_{ij} имеют вид:

$$\alpha_{ij} = \int_D \rho(x) \alpha(x) e_j(x) u_i(x) dx, \quad (4.34)$$

$$K_{ij} = \int_D \rho(x) u_i(x) \left(\int_D K(x, y) e_j(y) dy \right) dx. \quad (4.35)$$

$$f_i = \int_D \rho(x) f(x) u_i(x) dx. \quad (4.36)$$

Если тестовые функции комплексные, следует в последних формулах заменить $u_i(x)$ на $\overline{u_i(x)}$.

В случае, когда решается одномерное интегральное уравнение на отрезке, в качестве базисных функций можно использовать различные системы гладких функций, обладающих хорошими аппроксимационными свойствами: тригонометрическую систему функций, многочлены и различные системы специальных функций. Такой вариант

аппроксимации неизвестной функции можно назвать аппроксимацией функциями с глобальным носителем. Напомним, что носитель функции f , определенной на множестве D , – множество $\text{supp} f$, – это замыкание множества точек $x \in D$, таких, что $f(x) \neq 0$.

В многомерных задачах, когда множество D имеет сложную форму, осуществляется аппроксимация этого множества ячейками и удобно использовать базисные и тестовые функции, имеющие локальный носитель, включающий в себя одну или несколько ячеек. Такие функции, носитель которых является локальным и привязан к расчетной сетке, называют конечными элементами. Метод конечных элементов нашел широкое применение при решении дифференциальных уравнений. При решении интегральных уравнений его также можно использовать. Рассмотрим некоторые особенности метода конечных элементов (с проектированием уравнения по схеме метода Галеркина), в случае решения интегральных уравнений.

Конечно-элементный вариант метода Галеркина. Пусть множество D разбито на систему ячеек σ_i , $i = 1, \dots, n$, или аппроксимируется этой системой ячеек. В случае если множество аппроксимируется системой ячеек, мы предполагаем, что объединение всей ячеек есть некоторое множество \tilde{D} , и что функции $\alpha(x)$, $K(x, y)$, $f(x)$, определяющие уравнение (4.5), определены или могут быть продолжены на множество \tilde{D} .

В методе конечных элементов для аппроксимации решения и в качестве тестовых используются системы функций, каждая из которых имеет носителем одну или несколько ячеек. В случае, когда решаются дифференциальные уравнения в частных производных, в качестве таких функций обычно используют кусочно-линейные функции. Аппроксимация кусочно-линейными функциями обеспечивает непрерывность приближенного решения. Однако, в случае интегральных уравнений Фредгольма достаточно кусочной непрерывности базисных функций, и, поэтому, эффективной и, в то же время, наиболее простой при реализации, становится кусочно-постоянная аппроксимация, аналогичная той, которая уже была описана в методе кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций.

Кусочно-постоянные базисные и тестовые функции.

Рассмотрим численную схему метода Галеркина, в которой решение ищется в виде (4.30) и решается система (4.32)-(4.33) с базисными и тестовыми функциями вида:

$$e_i(x) = u_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \sigma_i^{in} \\ 0, & x \in \tilde{D}, x \notin \sigma_i^{in} \end{cases}, \quad (4.37)$$

здесь мы полагаем $\tilde{D} = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i$, $\sigma_i^{in} = \sigma_i \setminus \partial\sigma_i$ – внутренние точки ячейки (в случае кривой $\partial\sigma_i$ – множество концов ячейки, в случае поверхности $\partial\sigma_i$ – край ячейки).

Заметим, что приближенное решение ищется в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i e_i(x)$$

и

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi_i \text{ при } x \in \sigma_i^{in}.$$

Выражения (4.34)-(4.36) для коэффициентов и правых частей системы (4.32) при этом принимают вид:

$$\alpha_{ii} = \int_{\sigma_i} \rho(x) \alpha(x) dx, \quad \alpha_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \quad (4.38)$$

$$K_{ij} = \int_{\sigma_i} \rho(x) \left(\int_{\sigma_j} K(x, y) dy \right) dx, \quad (4.39)$$

$$f_i = \int_{\sigma_i} \rho(x) f(x) dx. \quad (4.40)$$

Мы видим, что вычисление коэффициентов и правых частей системы требует вычисления интегралов по ячейкам, причем, среди этих интегралов есть повторные. Заметим, что если функции $\alpha(x)$, $K(x, y)$, $f(x)$ являются гладкими, для приближенного вычисления интегралов по ячейкам можно использовать формулу прямоугольников с узлом в точке коллокации. Для случая $\rho(x) \equiv 1$ имеем:

$$\alpha_{ii} = \alpha(x^i) \mu(\sigma_i),$$

$$K_{ij} = K(x^i, x^j) \mu(\sigma_i) \mu(\sigma_j),$$

$$f_i = f(x^i) \mu(\sigma_i).$$

В результате получаем систему:

$$\alpha(x^i) \varphi_i \mu(\sigma_i) + \sum_{j=1}^n K(x^i, x^j) \mu(\sigma_i) \mu(\sigma_j) \varphi_j = f(x^i) \mu(\sigma_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

После сокращения каждого уравнения на $\mu(\sigma_i)$, эта система в точности совпадает с системой (4.7) для метода коллокаций, если коэффициенты системы (4.7) приближенно по формуле (4.15). Напомним, что как уже отмечалось, для уравнения с кратными интегралами при выборе точек коллокации в центрах ячеек справедлива оценка погрешности (4.14), т.е. метод имеет второй порядок точности.

Это рассуждение показывает на близость методов коллокации и Галеркина для интегральных уравнений, по крайней мере, в случае гладкого ядра.

Для полярных ядер при вычислении интегралов в формулах (4.38)-(4.40) возможно применение квадратурных формул с доразбиением ячеек, наподобие описанных в п. 4.2.4. Поскольку здесь фигурируют повторные интегралы, вычислительная сложность при наборе матрицы системы линейных уравнений оказывается выше, чем в методе коллокации. Однако, число уравнений в системе линейных уравнений при этом не меняется.

Для уравнений с полярным ядром, а также для сингулярных и некоторых гиперсингулярных уравнений, метод Галеркина может иметь преимущество, хотя это тема для отдельных научных исследований.

Кусочно-линейные базисные и тестовые функции. Здесь можно использовать те же кусочно-линейные функции, что и при решении дифференциальных уравнений, которые описаны в классической литературе по методу конечных элементов (см. [29], [42]).

В случае, когда решается интегральное уравнение на отрезке, ячейками разбиения также являются отрезки. Пусть уравнение решается на отрезке $D = [a, b]$, на отрезке выбраны точки x^i , $i = 1, \dots, n$, так, что $x^1 = a < x^2 < \dots < x^n = b$.

Рассмотрим разбиение отрезка на ячейки-отрезки $\sigma_i = [x^i, x^{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$. Базисная функция $e_i(x)$ строится как функция, являющаяся линейной на каждом отрезке $\sigma_i = [x^i, x^{i+1}]$, и удовлетворяющей условиям

$$e_i(x^j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Графики таких функций показаны на рисунке 4.6.

Будем считать, что тестовые функции $u_i(x)$ совпадают с базисными $e_i(x)$.

При этом для любой функции $\varphi \in C(D)$ можно построить ее приближение

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{j=1}^n \varphi(x^j) e_j(x), \quad (4.41)$$

причем, $\tilde{\varphi}(x)$ есть кусочно линейная функция (линейная на каждом элементе σ_j), удовлетворяющая равенствам

$$\tilde{\varphi}(x^j) = \varphi(x^j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, построенная система конечных элементов и базисных функций позволяет эффективно осуществлять кусочно-линейную интерполяцию в пространстве непрерывных функций.

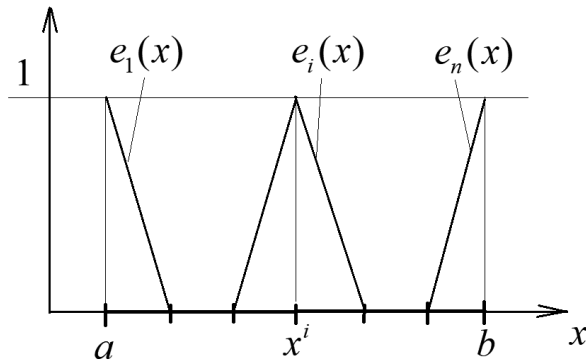


Рис. 4.6: Кусочно-линейные базисные функции на отрезке

Аналогичную систему конечных элементов и базисных функций на плоском множестве или на поверхности можно осуществить следующим образом. Осуществим аппроксимацию множества D системой треугольных ячеек σ_i , $i = 1, \dots, m$, так, что вершины всех ячеек лежат в множестве D . При этом будем считать, что любые две ячейки могут либо не пересекаться, либо иметь общую сторону, либо иметь общую вершину. В этом случае говорят, что ячейки образуют конформную сетку. Пусть x^j , $j = 1, \dots, n$, есть множество всех уникальных вершин треугольников σ_i (термин уникальная вершина означает, что каждая точка x^j может являться общей вершиной нескольких треугольников, но при этом все точки x^j различны). Для каждой вершины x^j построим кусочно-линейную базисную функцию $e_j(x)$, которая является линейной на каждом треугольнике σ_i , $i = 1, \dots, m$, и удовлетворяет равенствам (4.37). При этом функция $e_j(x)$ непрерывна в фигуре \bar{D} , являющейся объединением всех ячеек, и отлична от нуля только на тех ячейках σ_i , для которых точка x^j есть одна из вершин.

В пространственном случае можно построить аналогичное разбиение (аппроксимацию) множества D и систему базисных функций, используя в качестве ячеек тетраэдры. При этом опять должно выполняться свойство конформности: два различных тетраэдра могут иметь либо общую грань, либо общее ребро, либо общую вершину.

4.3 Численное решение уравнений Фредгольма 2-го рода в случае неоднозначной разрешимости

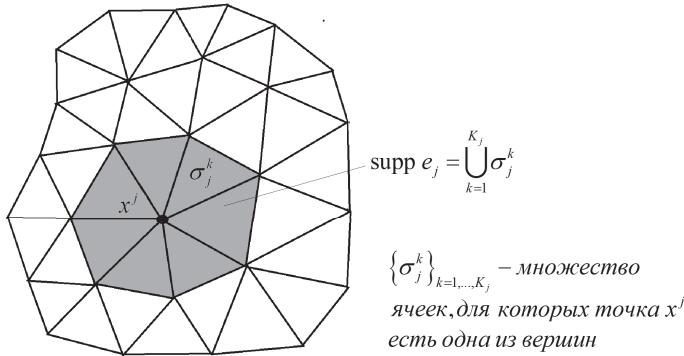


Рис. 4.7: Кусочно-линейные базисные функции на плоскости

4.3 Численное решение уравнений Фредгольма 2-го рода в случае неоднозначной разрешимости

4.3.1. Случай 1 независимого решения однородного уравнения.

Рассмотрим уравнение (4.5) в случае, когда это уравнение является уравнением Фредгольма 2-го рода: коэффициент α равен 1, либо $\alpha(x)$ – непрерывная функция, не обращающаяся в нуль (тогда делением на эту функцию уравнение приводится к стандартному виду), $K(x, y)$ – непрерывное, либо полярное интегрируемое ядро. Описываемый подход может быть применен и к уравнениям других типов, но он применим при условии, что для рассматриваемого уравнения выполнены теоремы Фредгольма.

Сначала рассмотрим случай, когда однородное уравнение (4.5) (т.е. уравнение (4.5) с правой частью $f = 0$) имеет ровно 1 независимое решение, которое обозначим как φ^1 . В силу 2-й теоремы Фредгольма союзное уравнение так же имеет ровно 1 независимое решение, которое мы обозначим как ψ^1 . В силу третьей теоремы Фредгольма уравнение (4.5) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\int_D f(x)\psi^1(x)dx = 0, \quad (4.42)$$

при этом общее решение уравнения (4.5) имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi^0(x) + C_1\varphi^1(x), \quad (4.43)$$

φ^0 – некоторое частное решение, C_1 – произвольная константа.

Возьмем какие либо функции $h_1(x)$ и $v_1(x)$, определенные и непрерывные на множестве D и удовлетворяющие условиям:

$$\int_D h_1(x)\varphi^1(x)dx \neq 0, \quad \int_D v_1(x)\psi^1(x)dx \neq 0. \quad (4.44)$$

Тогда для любой заданной константы A_1 из множества решений вида (4.43) выделяется и при том единственное решение, удовлетворяющее условию:

$$\int_D \varphi(x)h_1(x)dx = A_1. \quad (4.45)$$

Далее, для любой правой части $f \in C(D)$ существует единственная константа λ_1 , при которой правая часть \tilde{f} вида

$$\tilde{f} = f - \lambda_1 v_1$$

удовлетворяет условию разрешимости (4.42). Поэтому рассмотрим вместо уравнения (4.5) уравнение с правой частью \tilde{f} , которое можно записать в виде:

$$\alpha(x)\varphi(x) + \int_D K(x,y)\varphi(y)dy + \lambda_1 v_1(x) = f(x), \quad x \in D. \quad (4.46)$$

Рассмотрим систему из уравнений (4.46) и (4.45), в которой неизвестными являются функция $\varphi \in C(D)$ и число λ_1 . Функция $f \in C(D)$ и число A_1 заданы.

Из проведенного рассуждения следует, что для любой пары (f, A_1) существует, и при том, единственное решение системы (4.45)-(4.46) – пара (φ, λ_1) . Предлагается численно решать эту систему. Незвестная λ_1 называется регуляризирующей переменной, а описанный подход называется методом регуляризирующей переменной.

Заметим, что система (4.45)-(4.46) есть корректно поставленная задача при соответствующем выборе метрики для решения. Рассмотрим нормированное пространство L , элементами которого являются пары (φ, λ) , где $\varphi \in C(D)$, $\lambda \in R$ с нормой

$$\|(\varphi, \lambda)\| = \|\varphi\|_{C[D]} + |\lambda|.$$

Легко показать, что это пространство полное.

Если в соотношения (4.45) и (4.46) подставить заданные функцию $\varphi \in C(D)$ и число λ_1 , то эти соотношения определяют соответствующие функцию $f \in C(D)$ и число A_1 . Тем самым эти соотношения

4.3 Численное решение уравнений Фредгольма 2-го рода в случае неоднозначной разрешимости

определяют оператор \tilde{K} , который каждому элементу $(\varphi, \lambda_1) \in L$ ставит в соответствие элемент $(f, A_1) \in L$, причем, этот оператор ограничен (это следует из ограниченности оператора K , рассмотренного в теоремах 1.9 и 1.10). Однозначная разрешимость системы (4.45) - (4.46) означает, что у оператора L существует обратный оператор, определенный на всем пространстве L . Из теоремы Банаха об обратном операторе заключаем, что обратный оператор ограничен.

Тем самым мы доказали, что система (4.45) - (4.46) есть корректно поставленная задача в пространстве L : для любой пары $(f, A_1) \in L$ система однозначно разрешима и ее решение (пара $(\varphi, \lambda_1) \in L$) непрерывно зависит от правой части (пары (f, A_1)), в метрике пространства L .

При построении численного метода решения уравнения (4.5) вместо этого уравнения решается система уравнений (4.45)-(4.46). Это можно осуществить с применением уже описанных методов.

При применении метода кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций вместо системы (4.7) решаем систему

$$\alpha_i \varphi_i + \sum_{j=1}^n K_{i,j} \varphi_j + \lambda_1 v_{1,i} = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.47)$$

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j h_{1,j} = A_1, \quad (4.48)$$

где

$$v_{1,i} = v_1(x^i), \quad h_{1,j} = \int_{\sigma_j} h_1(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

При применении метода Галеркина вместо уравнений (4.32) решаем уравнения

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \varphi_j + \sum_{j=1}^n K_{i,j} \varphi_j + \lambda_1 \tilde{v}_{1,i} = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.49)$$

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j \tilde{h}_{1,j} = A_1, \quad (4.50)$$

где

$$\tilde{v}_{1,i} = (v_1, u_i(x)), \quad \tilde{h}_{1,j} = \int_D e_j(x) h_1(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Заметим, что если функция f удовлетворяет условию разрешимости (4.42), то при решении системы уравнений (4.45)-(4.46) в ответе

будет выполняться равенство $\lambda_1 = 0$. В случае решения дискретной системы (4.49)-(4.50) последнее равенство будет выполняться уже не точно, а приближенно. Равенство $\lambda_1 = 0$ будет приближенно выполняться и в том случае, когда правая часть удовлетворяет условию разрешимости с некоторой погрешностью. При этом абсолютное значение величины λ_1 может являться одним из оценочных критериев точности численного решения.

4.3.1. Случай произвольного числа независимых решений однородного уравнения. Теперь пусть однородное уравнение (4.5) (т.е. уравнение (4.5) с $f = 0$) имеет K независимых решений

$$\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^K.$$

В силу 2-й теоремы Фредгольма союзное уравнение так же имеет K независимых решений, которые мы обозначим как

$$\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^K.$$

В силу третьей теоремы Фредгольма уравнение (4.5) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\int_D f(x)\psi^m(x)dx = 0, \quad m = 1, \dots, K. \quad (4.51)$$

При этом общее решение уравнения (4.5) имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi^0(x) + C_1\varphi^1(x) + \dots + C_K\varphi^K(x), \quad (4.52)$$

φ^0 – некоторое частное решение, C_1, C_2, \dots, C_K – произвольные константы.

Возьмем какие либо функции $h_1(x), \dots, h_K(x)$ и $v_1(x), \dots, v_K(x)$, определенные и непрерывные на множестве D и удовлетворяющие условиям:

$$\det(\xi_{ij}) \neq 0, \quad \text{где } \xi_{ij} = \int_D h_i(x)\varphi^j(x)dx \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, K, \quad (4.53)$$

$$\det(\eta_{ij}) \neq 0, \quad \text{где } \eta_{ij} = \int_D v_i(x)\psi^j(x)dx \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, K, \quad (4.54)$$

Тогда для любого набора констант $A_m, m = 1, \dots, K$, из множества решений вида (4.52) выделяется, и при том, единственное решение, удовлетворяющее условиям:

$$\int_D \varphi(x)h_m(x)dx = A_m, \quad m = 1, \dots, K. \quad (4.55)$$

4.3 Численное решение уравнений Фредгольма 2-го рода в случае неоднозначной разрешимости

Далее, для любой правой части $f \in C(D)$ существует единственный набор констант $\lambda_1, \dots, \lambda_K$, при котором правая часть \tilde{f} вида

$$\tilde{f} = f - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_K v_K$$

удовлетворяет условиям разрешимости (4.51).

Запишем вместо уравнения (4.5) уравнение:

$$\alpha(x)\varphi(x) + \int_D K(x, y)\varphi(y)dy + \sum_{m=1}^K \lambda_m v_m(x) = f(x), \quad x \in D. \quad (4.56)$$

Будем решать систему из уравнений (4.56) и (4.55), в которой неизвестными являются функция $\varphi \in C(D)$ и числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$.

При применении метода кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций вместо системы (4.7) решаем систему

$$\alpha_i \varphi_i + \sum_{j=1}^n K_{i,j} \varphi_j + \sum_{m=1}^K \lambda_m v_{m,i} = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.57)$$

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j h_{m,j} = A_m, \quad m = 1, \dots, K, \quad (4.58)$$

где

$$v_{m,i} = v_m(x^i), \quad h_{m,j} = \int_{\sigma_j} h_m(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, K.$$

При применении метода Галеркина вместо уравнений (4.32) решаем уравнения

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \varphi_j + \sum_{j=1}^n K_{i,j} \varphi_j + \sum_{m=1}^K \lambda_m \tilde{v}_{m,i} = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.59)$$

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j \tilde{h}_{m,j} = A_m, \quad m = 1, \dots, K, \quad (4.60)$$

где

$$\tilde{v}_{m,i} = (v_m, u_i(x)), \quad \tilde{h}_{m,j} = \int_D e_j(x) h_m(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, K.$$

Глава 5

Краевые задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца

5.1 Случай области с замкнутой границей

5.1.1 Постановка основных краевых задач. Напомним, что уравнением Лапласа для неизвестной функции $u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ называется уравнение

$$\Delta u = 0, \quad (5.1)$$

где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

есть оператор Лапласа.

Уравнением Гельмгольца называется уравнение

$$\Delta u + k^2 u = f, \quad (5.2)$$

где k – заданное число. Заметим, что уравнение Гельмгольца обычно рассматривают в классе функций $u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, с комплексными значениями. При этом число k может принимать комплексные значения, а правая часть f также может быть функцией с комплексными значениями. Всюду далее будем считать, что $\operatorname{Im} k \geq 0$.

Мы будем рассматривать численные методы для решения однородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (5.3)$$

считая, что уравнение Лапласа является его частным случаем при $k = 0$.

5.1 Случай области с замкнутой границей

В дальнейшем мы будем рассматривать двумерные и трехмерные уравнения Лапласа и Гельмгольца ($n = 2$ и $n = 3$ соответственно).

Пусть Σ есть замкнутая гладкая поверхность класса C^2 , которая делит пространство \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, на области Ω^- – внутреннюю и Ω^+ – внешнюю (в плоском случае, т.е. при $n = 2$, Σ есть гладкая замкнутая кривая).

Краевой задачей Дирихле для уравнения (5.3) называется задача отыскания решения данного уравнения, удовлетворяющего на поверхности Σ граничному условию :

$$u_{\Sigma}(x) = f(x), \quad x \in \Sigma. \quad (5.4)$$

Краевой задачей Неймана для уравнения (5.3) называется задача отыскания решения данного уравнения, удовлетворяющего на поверхности Σ граничному условию:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{\Sigma} = f(x). \quad (5.5)$$

В граничных условиях (5.4) и (5.5) u_{Σ} и $(\partial u / \partial n)_{\Sigma}$ есть краевые значения функции u и ее нормальной производной на поверхности Σ со стороны области Ω .

В случае задачи Неймана будем требовать, чтобы граничное условие (5.5) выполнялось для правильной нормальной производной на поверхности Σ (см. формулу (3.3)).

Решение данных задач будем рассматривать в классе функций, дважды дифференцируемых в области Ω , которые можно продолжить по непрерывности на поверхность Σ со стороны области Ω , т.е. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. В случае краевой задачи Неймана потребуем, также, чтобы функция u также имела на поверхности Σ правильные значения нормальной производной со стороны области Ω . При этом f – функция, заданная на поверхности Σ , которая предполагается непрерывной.

Заметим, что классическое решение уравнения Гельмгольца, являющееся дважды дифференцируемым в области Ω автоматически является бесконечно дифференцируемым в этой области. Это следует из формулы (2.33): достаточно для любой точки $x_0 \in \Omega$ провести сферу с центром в этой точке, целиком лежащую в области Ω и записать внутри этой сферы для функции u представление в виде (2.33). Интегралы в правой части этой формулы бесконечно дифференцируемы по переменной x под знаком интеграла.

В случае внешних задач для уравнения Лапласа также ставится условие на бесконечности:

$$u(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (5.6)$$

При этом, как уже отмечалось в главе 2, в случае внешней задачи для уравнения Лапласа, решение, удовлетворяющее граничному

условию (5.6) автоматически удовлетворяет следующим условиям на бесконечности (см. [43, глава 4, §2, п.6], [7, глава 5, §24, п.10]):

$$|u(x)| \leq O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right| \leq O\left(\frac{1}{|x|^2}\right). \quad (5.7)$$

В случае внешней задачи для уравнения Гельмгольца при $k \neq 0$ будем также ставить на бесконечности условие Зоммерфельда (см. п.2.3):

$$\left(\frac{x}{|x|}, \text{grad } u(x)\right) - iku = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (5.8)$$

Основная идея сведения поставленных краевых задач состоит в том, чтобы искать решение в виде поверхностного потенциала простого или двойного слоя, причем, вид потенциала подбирается так, что бы при подстановке его в граничное условие возникало выражение, содержащее интегральный оператор и вне интегральный член.

5.1.2 Сведение краевых задач к уравнениям Фредгольма 2-го рода. Решение поставленных краевых задач будем искать в виде поверхностных потенциалов: либо потенциала простого слоя

$$u(x) = V_{\Sigma}[\nu](x) = \int_{\Sigma} \nu(y) F(x-y) dy, \quad (5.9)$$

либо потенциала двойного слоя

$$u(x) = U_{\Sigma}[\nu](x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy. \quad (5.10)$$

Здесь, как и ранее, $F(x-y)$ – потенциал точечного заряда для рассматриваемого уравнения Гельмгольца (Лапласа), см. п.2.3.

Напомним, что, как было показано в п.3.3 и 3.5, для функции $\nu \in C[\Sigma]$, потенциал простого слоя, определяемый формулой (5.9), имеет в каждой точке x на поверхности Σ краевые значения

$$u^+(x) = u^-(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) F(x-y) dy, \quad x \in \Sigma, \quad (5.11)$$

и имеет на поверхности Σ правильные значения нормальной производной (см. формулу (3.3)), для которых справедлива формула:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{\pm}(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_x} dy \mp \frac{1}{2}\nu(x), \quad x \in \Sigma, \quad (5.12)$$

При этом если функция ν непрерывна по Гельдеру, то формулы (5.12) выполнены уже в обычном смысле, т.е. в смысле формул (3.1) и (3.2). Это следует из теоремы 3.10.

5.1 Случай области с замкнутой границей

Для потенциала двойного слоя, определяемого формулой (5.10), доказано (см. п.3.4) что для функции $\nu \in C[\Sigma]$ на поверхности Σ существуют краевые значения

$$u^\pm(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy \pm \frac{1}{2} \nu(x), \quad x \in \Sigma. \quad (5.13)$$

При отыскании решений краевых задач с граничными условиями (5.4) или (5.5) в виде потенциалов простого или двойного слоя, в граничное условие нужно поставлять именно краевые значения этих потенциалов или их производных со стороны области Ω . Если мы хотим получить уравнения второго рода, нужно использовать тип поверхностного потенциала, для которого соответствующие краевые значения выражаются формулой, содержащей вне интегральный член. Поэтому решения поставленных краевых задач будем искать в следующем виде.

Решение краевой задачи Дирихле, внешней или внутренней, ищем в виде потенциала двойного слоя (5.10). При подстановке в граничное условие (5.4) возникают следующие уравнения:

для внутренней задачи Дирихле:

$$-\frac{1}{2} \nu(x) + \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy = f(x), \quad x \in \Sigma; \quad (5.14)$$

для внешней задачи Дирихле:

$$\frac{1}{2} \nu(x) + \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy = f(x), \quad x \in \Sigma. \quad (5.15)$$

Решение краевой задачи Неймана, внешней или внутренней, ищем в виде потенциала простого слоя (5.9). При подстановке в граничное условие (5.5) возникают следующие уравнения:

для внутренней задачи Неймана:

$$\frac{1}{2} \nu(x) + \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_x} dy = f(x), \quad x \in \Sigma. \quad (5.16)$$

для внешней задачи Неймана:

$$-\frac{1}{2} \nu(x) + \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_x} dy = f(x), \quad x \in \Sigma. \quad (5.17)$$

Для любой функции $\nu \in C(\Sigma)$, функция $u(x)$, определяемая формулой (5.9) или (5.10) – потенциал простого или двойного слоя, удовлетворяет уравнению Гельмгольца (5.3) в каждой из областей Ω^+ и Ω^- . В трехмерном случае (краевая задача решается в области пространства \mathbb{R}^3) данные потенциалы, так же, удовлетворяют условиям (5.6) на бесконечности и условиям (5.7) при $k \neq 0$, $\text{Im}k \geq 0$.

Поэтому в трехмерном случае справедливо следующее утверждение. Для всех рассмотренных задач функция $u(x)$, представленная в виде соответствующего потенциала с плотностью $\nu \in C[\Sigma]$, является решением указанной краевой задачи тогда и только тогда, когда функция ν является решением соответствующего интегрального уравнения (5.14)-(5.17).

В случае краевых задач на плоскости данное утверждение выполнено для внутренних задач. В случае внешних задач отличие состоит в том, что для функции $u(x)$, представленной в виде соответствующего потенциала с плотностью $\nu \in C[\Sigma]$, следует отдельно проверять выполнение условий на бесконечности. Это может накладывать определенные ограничения на правую часть в граничном условии [7, глава 5, §31].

Пусть

$$K(x, y) = \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y}. \quad (5.18)$$

Тогда для этой функции справедливо выражение

$$K(x, y) = \text{grad}_y F(x - y) \vec{n}(y).$$

Заметим, также, что $K(y, x) = \text{grad}_x F(x - y) \vec{n}(x)$ и мы можем записать:

$$K(y, x) = \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_x}. \quad (5.19)$$

Напомним, также, что при любом $\mu \in (0, 1)$ ядро $K(x, y)$ представляется в виде (см. формулу (3.12))

$$K(x, y) = \frac{K^*(x, y)}{|x - y|^{n-2+\mu}}, \quad (5.20)$$

где $n = 2$ или $n = 3$ – размерность пространства, в котором рассматривается задача, функция $K^*(x, y)$ непрерывна при $(x, y) \in \Sigma \times \Sigma$. Поэтому уравнения (5.14)-(5.17) есть уравнения Фредгольма второго рода с полярным ядром. Интегральный оператор в этих уравнениях есть компактный оператор в пространстве $C(\Sigma)$ и для этих уравнений выполнены теоремы Фредгольма (см. п. 4.1).

Важным фактом, следующим из соотношений (5.18) и (5.19), является то, что уравнения (5.14)-(5.17) являются попарно сопряженными, а именно:

- уравнения (5.14) для внутренней задачи Дирихле и (5.17) для внешней задачи Неймана;
- уравнения (5.15) для внешней задачи Дирихле и (5.16) для внутренней задачи Неймана.

5.1.3 Анализ разрешимости краевых задач для уравнения Лапласа и соответствующих интегральных уравнений. Метод интегральных уравнений является одним из важных инструментов анализа разрешимости краевых задач. В этом пункте мы рассмотрим внешние и внутренние краевые задачи Неймана и Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Мы исследуем вопросы о существовании и единственности решений уравнений Фредгольма (5.14)-(5.17), получим условия разрешимости этих уравнений, а также докажем существование решений соответствующих краевых задач (с указанием условий их разрешимости, если нужно). При этом сразу обратим внимание на такой важный факт, что однозначная разрешимость краевой задачи и однозначная разрешимость соответствующего интегрального уравнения – это не всегда одно и то же.

Отправной точкой нашего анализа будут являться следующие сведения о свойствах решений краевых задач с однородным граничным условием для трехмерного уравнения Лапласа, т.е. о решениях для случая, когда в граничном условии (4.4) или (4.5) $f(x) \equiv 0$, $x \in \Sigma$, которые собраны в виде следующей теоремы (см. [43, глава 4, §2]), [7, глава 5, §28, п.2].

Теорема 5.1. *А) Внешняя и внутренняя краевые задачи Дирихле для уравнения Лапласа (5.1) с функцией $f(x) \equiv 0$, $x \in \Sigma$ в граничном условии (5.4) имеют и при том единственное решение $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$.*

Б) Внешняя краевая задачи Неймана для уравнения Лапласа (5.1) с функцией $f(x) \equiv 0$, $x \in \Sigma$ в граничном условии (5.5) имеет и при том единственное решение $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$.

В) Общим решением внутренней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа (5.1) с функцией $f(x) \equiv 0$, $x \in \Sigma$, в граничном условии (5.5) является функция вида $u(x) \equiv C$, $x \in \Omega$, C – произвольная константа. Г) Необходимым условием разрешимости внутренней краевой задачи Неймана с граничным условием (5.5) является условие

$$\int_{\Sigma} f(x)dx = 0. \quad (5.21)$$

Теперь исследуем более подробно вопрос о разрешимости краевых задач и соответствующих интегральных уравнений.

Внешняя задача Неймана и внутренняя задача Дирихле.

Теорема 5.2. *Для любой функции $f \in C[\Sigma]$ уравнения (5.17) и (5.14) однозначно разрешимы в классе функций $v \in C[\Sigma]$.*

При этом:

- внешняя задача Неймана имеет единственное решение, это решение представляется в виде потенциала простого слоя, $u(x) = V[\nu](x)$, где ν – решение уравнения (5.17).

- внутренняя задача Дирихле имеет единственное решение, это решение представляется в виде потенциала двойного слоя, $u(x) = U[\nu](x)$, где ν - решение уравнения (5.14).

Доказательство. Рассмотрим уравнение (5.17). Пусть $\nu \in C[\Sigma]$ - решение однородного уравнения (5.17), т.е. уравнения (5.17) с правой частью $f = 0$. Построим потенциал простого слоя $u(x) = V[\nu](x)$, причем для всех точек x как из области Ω^+ , так из области Ω^- . Т.к. функция ν есть решение уравнения (5.17) с правой частью $f = 0$, функция $u(x)$ удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+(x) = 0$$

и условиям (5.6) на бесконечности. Но тогда, по теореме 5.1, пункт Б), $u(x) \equiv 0$ при $x \in \Omega^+$. Значит, эта функция имеет краевые значения со стороны области Ω^+ :

$$u^+ = 0.$$

В силу соотношений (5.11), для краевых значений потенциала простого слоя со стороны области Ω^- имеем

$$u^- = u^+ = 0 \text{ на поверхности } \Sigma.$$

Но тогда построенная функция u есть решение внутренней задачи Дирихле с однородным граничным условием. По теореме 5.1, пункт А), заключаем, что

$$u(x) \equiv 0 \text{ при } x \in \Omega^-.$$

Но тогда и нормальные производные этой функции со стороны области Ω^- удовлетворяют соотношению:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^-(x) = 0.$$

Теперь из формулы (5.12) заключаем, что

$$\nu(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^-(x) - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+(x) \equiv 0, \quad x \in \Sigma.$$

Таким образом, однородное уравнение, соответствующее уравнению (5.17), имеет только нулевое решение.

По 1-й и 2-й теоремам Фредгольма заключаем, что уравнение (5.17) и сопряженное с ним уравнение (5.14) однозначно разрешимы в классе функций $\nu \in C[\Sigma]$ для любой правой части $f \in C[\Sigma]$.

Тогда для любой функции $f \in C[\Sigma]$ внешняя краевая задача Неймана имеет решение $u(x) = V[\nu](x)$, $x \in \Omega^+$, где ν – решение уравнения (5.17), внутренняя задача Дирихле имеет решение $u(x) = U[\nu](x)$, $x \in \Omega^-$, где ν – решение уравнения (5.14). Единственность этих решений уже отмечалась в теореме 5.1.

Теорема доказана.

Внешняя задача Дирихле и внутренняя задача Неймана. Предварительные замечания.

Сначала сделаем некоторые предварительные замечания.

Вспомним формулы (3.8) для потенциала двойного слоя с плотностью равной 1. Из этих формул следует, что в случае $\nu(x) = 1$, $x \in \Sigma$, функция $u(x) = U[\nu](x)$ удовлетворяет равенству $u(x) = 0$ при $x \in \Omega^+$. Но тогда такая функция есть решение внешней задачи Дирихле с правой частью $f \equiv 0$, а функция $\nu_0(x) \equiv 1$ есть решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (5.15).

Таким образом, однородное уравнение (5.15) имеет, по крайней мере, 1 независимое решение. Тогда и однородное уравнение (5.16) имеет, по крайней мере, 1 независимое решение, которое мы обозначим, как ν_0^* .

Внутренняя задача Неймана. Рассмотрим более подробно внутреннюю задачу Неймана и соответствующее ей интегральное уравнение (5.16).

Теорема 5.3. *Однородное уравнение (5.16) имеет ровно 1 независимое решение – это некоторая функция ν_0^* , которую можно выбрать так, что $\nu_0^*(x) \geq 0$ для всех $x \in \Sigma$.*

Неоднородное уравнение (5.16) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие (5.21), причем, если $\nu_1(x)$ – некоторое решение уравнения (5.16), то общее решение имеет вид

$$\nu(x) = \nu_1(x) + C_\nu \nu_0^*(x), \quad C_\nu - \text{произвольная константа.} \quad (5.22)$$

Внутренняя краевая задача Неймана имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено условие (5.21). Если $u_1(x)$ – некоторое решение краевой задачи, то общее решение имеет вид

$$u(x) = u_1(x) + C_u, \quad C_u - \text{произвольная константа.} \quad (5.23)$$

При этом каждому решению интегрального уравнения (5.15) вида (5.22) соответствует ровно 1 решение краевой задачи вида (5.23) и каждое решение краевой задачи представляется в виде потенциала простого слоя (5.9), где функция ν есть некоторое решение уравнения (5.16).

Замечание. Свойство знакопостоянства решения однородного уравнения (5.16) понадобится в дальнейшем при регуляризации этого уравнения.

Доказательство. Как уже было показано, однородное уравнение (5.16) имеет, по крайней мере, 1 независимое решение, которое мы обозначили, как ν_0^* . Покажем, что других независимых решений нет.

Построим функцию $u_0^*(x) = V_\Sigma[\nu_0^*](x)$ – соответствующий потенциал простого слоя, для точек $x \in \Omega^-$ и $x \in \Omega^+$. В области Ω^- функция u_0^* является решением краевой задачи Неймана с однородным граничным условием (в условии (5.5) $f = 0$). Тогда по теореме 5.1

$$u_0^*(x) \equiv \theta, \quad x \in \Omega^-,$$

где θ – некоторая константа.

Докажем, что $\theta \neq 0$. Действительно, Если предположить, что $\theta = 0$, то $u_0^*(x) \equiv 0$ при $x \in \Omega^-$. Как потенциал простого слоя функция u_0^* удовлетворяет на поверхности Σ условиям:

$$u_0^{*+}(x) = u_0^{*-}(x) = 0, \quad x \in \Sigma.$$

Но тогда функция u_0^* в области Ω^+ является решением внешней задачи Дирихле с однородным граничным условием, а значит $u_0^*(x) \equiv 0$, $x \in \Omega^+$. Но тогда

$$\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial n}\right)^+(x) = 0, \quad x \in \Sigma,$$

и

$$\nu_0^*(x) = \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial n}\right)^-(x) - \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial n}\right)^+(x) \equiv 0, \quad x \in \Sigma.$$

Получили противоречие. Значит, $\theta \neq 0$.

Теперь пусть $\nu'(x)$ – некоторое другое решение однородного уравнения (5.16). Построим соответствующую функцию $u'(x) = V_\Sigma[\nu'](x)$. Функция $u'(x)$ опять есть решение внутренней краевой задачи Неймана с однородным условием, и $u'(x) = C'$ в области $x \in \Omega^-$, C' – некоторая константа. Эту константу можно представить в виде:

$$C' = \lambda\theta, \quad \text{где } \lambda = C'/\theta.$$

Теперь построим функцию

$$\nu = \nu' - \lambda\nu_0^*.$$

Функция ν также является решением однородного уравнения (5.16) и, значит, $u(x) \equiv C$ в области $x \in \Omega^-$. Если предположить, что ν есть ненулевое решение, то, так же, как ранее для функции ν_0^* , получаем, что $C \neq 0$. Но, с другой стороны, $C = C' - \lambda\theta = 0$. Значит $\nu(x) \equiv 0$, $x \in \Sigma$, т.е. функции ν_0^* и ν' линейно зависимы.

Таким образом, других независимых решений, кроме ν_0^* , у однородного уравнения (5.16) нет. Тогда союзное уравнение (5.15) так же имеет ровно 1 независимое решение и это решение, как отмечалось,

есть функция $\nu_0(x) \equiv 1$. Тогда условие (5.21) есть условие разрешимости уравнения (5.16).

Мы уже упоминали, что условие (5.21) является необходимым условием разрешимости внутренней краевой задачи Неймана. Теперь мы можем утверждать, что это условие является и достаточным. При выполнении условия (5.21) существует функция ν – решение уравнения (5.16) и тогда потенциал простого слоя (5.9) с такой плотностью есть решение рассматриваемой краевой задачи.

Покажем, что два разных решения уравнения (5.16) с одной и той же правой частью f порождают разные решения краевой задачи. Действительно, если предположить, что ν_1 и ν_2 два решения и при этом функции $u_1 = V[\nu_1]$ и $u_2 = V[\nu_2]$ есть совпадающие решения, то функция $\nu = \nu_1 - \nu_2$ есть решение однородного уравнения (5.16), и при этом $u = V[\nu] \equiv 0$ в области Ω^- . Но, как уже было показано на примере функции ν_0^* , в этом случае $\nu \equiv 0$ на поверхности Σ .

Докажем, что любое решение рассматриваемой краевой задачи представляется в виде потенциала простого слоя (5.9). Действительно, пусть функция u есть решение для правой части f в граничном условии (5.5), причем, эта правая часть должна удовлетворять необходимому условию (5.21). Тогда уравнение (5.16) так же разрешимо и пусть ν_1 – некоторое решение этого уравнения, а функция $u_1 = V[\nu_1]$ – соответствующее решение краевой задачи. Тогда функция $\tilde{u} = u - u_1$ есть решение задачи с однородным граничным условием и $\tilde{u} \equiv \tilde{C}$, где \tilde{C} – некоторая константа. Но тогда $\tilde{C} = \mu\theta$, где $\theta = V_\Sigma[\nu_0^*]$, ν_0^* – выбранное нами независимое решение однородного уравнения (5.16), μ – некоторая константа. Тогда $u = V_\Sigma[\nu_1 + \mu\nu_0^*]$.

Наконец, докажем, что функцию $\nu_0^*(x)$ можно выбрать неотрицательной. Опять рассмотрим функцию $u_0^*(x) = V_\Sigma[\nu_0^*](x)$. Эта функция удовлетворяет условию $u_0^*(x) \equiv \theta$, где θ – ненулевая константа. Можем считать, что $\theta > 0$ (в противном случае домножим функцию $\nu_0^*(x)$ на -1). Функция u_0^* удовлетворяет на внешней стороне поверхности Σ условиям:

$$u_0^{*+} = \theta,$$

$$\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial n}\right)^+ = \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial n}\right)^+ - \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial n}\right)^- = -\nu_0^*.$$

Если предположить, что в некоторой точке $x \in \Sigma$ выполнено условие $\nu_0^*(x) < 0$, то в этой точке выполнено условие $\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial n}\right)^+ > 0$. Тогда в окрестности точки такой x найдется некоторая точка y , которая является внутренней точкой области Ω^+ и в которой выполнено условие $u_0^*(y) > u_0^*(x) = \theta$. Но тогда, в силу условия (5.6) на бесконечности, функция $u_0^*(x)$ достигает своего глобального максимума по области Ω^+ в некоторой внутренней точке этой области. А это противоречит принципу максимума, который утверждает, что если функция является гармонической в некоторой области и непрерывна на границе этой области, то она достигает своих максимального

и минимального значений на границе этой области [43, глава 4, §2, п. 2], [7, глава 5, §24, п. 4].

Теорема доказана.

Для численного решения краевой задачи Неймана следует осуществить регуляризацию уравнения (5.16) по схеме, описанной в п. 4.3.1. В данном случае мы можем записать вместо уравнения (5.16) систему уравнений:

$$\frac{1}{2}\nu(x) + \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_x} dy + \lambda = f(x), x \in \Sigma, \quad (5.24)$$

$$\int_{\Sigma} \nu(y) dy = A, \quad (5.25)$$

где A – заданная константа. В нашем случае, поскольку условие разрешимости уравнения (5.16) имеет вид (5.21), для любой функции $f \in C(\Sigma)$ найдется, и при том единственная, константа λ , при которой уравнение (5.24) разрешимо. Общее решение уравнения (5.24) имеет вид (5.22) и, в силу знакопостоянства функции ν_0^* (решения однородного уравнения), уравнение (5.25) позволяет выделить единственное решение.

Заметим, что с физической точки зрения, более естественно выделение единственного решения интегрального уравнения через наложение какого либо условия на решение краевой задачи. Поскольку общее решение внутренней краевой задачи Неймана имеет вид (5.23), для любой константы C и для любой точки $a \in \Omega^-$ существует единственное решение краевой задачи, удовлетворяющее условию:

$$u(a) = C. \quad (5.26)$$

Если мы ищем решение краевой задачи в виде потенциала простого слоя, то последнее условие равносильно уравнению:

$$\int_{\Sigma} \nu(y) F(a-y) dy = C. \quad (5.27)$$

Таким образом, для нахождения решения, краевой задачи Неймана, удовлетворяющего условию (5.26), необходимо решать систему интегральных уравнений (5.24), (5.27) относительно функции $\nu \in C(\Sigma)$ и константы λ . Эта система однозначно разрешима для любых правой части $f \in \Sigma$ и константы C . Заметим, также, что мы получим в виде потенциала простого слоя (5.9) решение краевой задачи с граничным условием (5.5) при выполнении условия разрешимости (5.21). Если это условие не выполнено, построенная функция $u = V_{\Sigma}[\nu]$ будет удовлетворять граничному условию (5.5) с правой частью $f - \lambda$.

Внешняя задача Дирихле. Теперь рассмотрим внешнюю задачу Дирихле.

5.1 Случай области с замкнутой границей

Теорема 5.4. *Однородное уравнение (5.15) имеет ровно 1 независимое решение – $\nu_0 \equiv 1$.*

Неоднородное уравнение (5.15) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\int_{\Sigma} f(x)\nu_0^*(x)dx = 0, \quad (5.28)$$

$\nu_0^*(x)$ – решение однородного уравнения (5.16). Если $\nu_1(x)$ – некоторое решение уравнения, то общее решение имеет вид

$$\nu(x) = \nu_1(x) + C_\nu, \quad (5.29)$$

C_ν – произвольная константа, и для любой функции ν – решения уравнения (5.28), потенциал двойного слоя, определяемый формулой (5.10), является решением внешней задачи Дирихле.

Доказательство. По теореме 5.3 уравнение (5.16), союзное с рассматриваемым уравнением (5.15), имеет в однородном случае ровно 1 независимое решение ν_0^* . Тогда неоднородное уравнение (5.15) разрешимо при условии (5.28), а однородное уравнение (5.15) имеет тоже ровно 1 независимое решение. Это решение уже было найдено – это функция $\nu_0 \equiv 1$.

Тогда общее решение уравнения (5.15) имеет вид (5.29) и тогда для любого такого решения функция u (5.10) есть решение внешней краевой задачи Дирихле.

Теорема доказана.

Продолжим исследование внешней задачи Дирихле.

Сначала заметим, что для любой правой части, удовлетворяющей условию разрешимости (5.28), уравнение (5.15) имеет множество решений, определяемое формулой (5.29). В то же время, как было отмечено в теореме 5.1, решение краевой задачи единственно. В этом нет противоречия, поскольку для функции $\nu(x)$, равной константе, функция $u = U_\Sigma[\nu]$ удовлетворяет в области Ω^+ равенству $u \equiv 0$. Поэтому все семейство функций $\nu(x)$ (5.29) порождает одно единственное решение краевой задачи.

Возникает вопрос, а нет ли у внешней краевой задачи Дирихле решений, не представляющихся в виде потенциала двойного слоя? В частности, нет ли у краевой задачи решений в случае, когда условие разрешимости интегрального уравнения (5.28) не выполнено.

Здесь заметим, что мы ставим условие на бесконечности (5.6), что равносильно условию

$$|u(x)| \leq O\left(\frac{1}{|x|}\right). \quad (5.30)$$

Однако, потенциал двойного слоя удовлетворяет на бесконечности более сильному условию:

$$|u(x)| \leq O\left(\frac{1}{|x|^2}\right). \quad (5.31)$$

Тогда становится ясно, что для отыскания других решений нужно искать решения, подчиняющиеся на бесконечности условию (5.30).

Будем искать решение внешней краевой задачи Дирихле в виде:

$$u(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy + \lambda F(x-q), \quad (5.32)$$

где q – некоторая фиксированная точка, выбранная произвольным образом внутри области Ω^- , λ – неизвестная константа. Функция u вида (5.32) автоматически удовлетворяет уравнению Лапласа в области Ω^+ , условию на бесконечности (5.6), а граничное условие (5.4) равносильно уравнению

$$\frac{1}{2}\nu(x) + \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy + \lambda F(x-q) = f(x), x \in \Sigma \quad (5.33)$$

относительно пары неизвестных: функции ν и константы λ . Поскольку функции $F(x-q)$ и $\nu_0^*(x)$ знакопостоянны на поверхности Σ , существует и при том единственное значение λ , при котором функция $\tilde{f}(x) = f(x) - F(x-q)$, $x \in \Sigma$ удовлетворяет условию разрешимости (5.28). В этом случае уравнение (5.15) разрешимо, и для выделения единственного решения можно использовать дополнительное уравнение

$$\int_{\Sigma} \nu(y) dy = A, \quad (5.34)$$

где A – произвольная заданная константа.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.5. *Для любых функции $f \in C(\Sigma)$ и числа A система уравнений (5.33)-(5.34) имеет единственное решение – пару, состоящую из функции $\nu \in C(\Sigma)$ и числа λ . При этом функция u вида (5.32) есть единственное решение внешней краевой задачи Дирихле.*

5.2 О численном решении краевых задач

Мы видим, что решение краевых задач для уравнения Лапласа (5.1) или Гельмгольца (5.3) в трехмерной области, границей которой является замкнутая поверхность с граничными условиями Дирихле (5.4) или Неймана (5.5) можно искать в виде потенциалов простого

или двойного слоев. При этом решение краевой задачи сводится к решению одного из уравнений (5.14)-(5.17). Все эти уравнения имеют структуру (4.5) и для их решения применимы численные методы, описанные в разделе 4.2.

Отметим, что мы решаем уравнение на замкнутой поверхности. При реализации описанных в п.4.2 методов коллокации и метода Галеркина могут быть использованы универсальные алгоритмы, основанные на аппроксимации уравнений системами ячеек.

Случай треугольных ячеек. В настоящее время наиболее универсальной считается аппроксимация поверхности системой треугольников, вершины которых лежат на поверхности и которые образуют конформную сетку (см. п.4.2) – такая система называется триангуляцией поверхности (рисунок 5.1, слева).

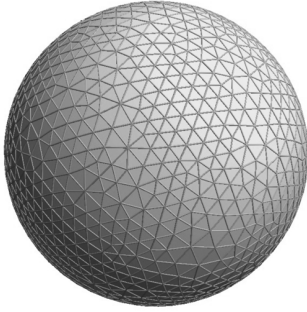
Пусть поверхность аппроксимирована системой ячеек σ_i , $j = 1, \dots, N$, каждая ячейка σ_i есть треугольник $(A_i B_i C_i)$. Для каждого треугольника строятся точка коллокации x^i , вектор нормали n_i , определяется его площадь s_i :

$$\begin{aligned} x^i &= (A_i + B_i + C_i)/3, \\ \vec{n}_i &= \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}, \quad \vec{b} = B_i - A_i, \quad \vec{c} = C_i - A_i, \\ s_i &= |\vec{b} \times \vec{c}|/2, \end{aligned} \tag{5.35}$$

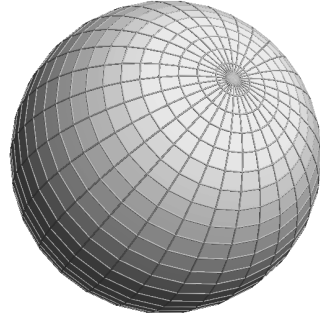
здесь и далее точки элементы в пространстве R^3 . Заметим, что ориентация векторов нормали важна при реализации численных методов. Мы предполагаем, что на этапе построения поверхностной сетки обеспечен правильный порядок обхода вершин, при котором по приведенным формулам возникают векторы внешней нормали.

Случай четырех угольных ячеек. Так же, является распространенным вариант аппроксимации поверхностей системой четырех угольных ячеек $\sigma_i = (A_i B_i C_i D_i)$, $j = 1, \dots, N$, образующих конформную сетку на поверхности (рисунок 5.1, справа). Заметим, что в этом случае естественным является так же, появление треугольных ячеек – каждую такую ячейку будем рассматривать как вырожденный случай четырехугольной ячейки с двумя совпадающими вершинами (будем считать, что $C_i = D_i$). Заметим, что четырех угольник σ_i в случае сложной поверхности может быть пространственным. Далее мы описываем алгоритмы работы с такими четырехугольниками, которые оперируют только с их вершинами. Никакой иной информации о форме поверхности (такой, как например, задание уравнения ячеек, их кривизны и т.п.) не требуется. Для каждого четырехугольника строятся точка коллокации x^i , вектор нормали n_i , определяется его площадь s_i :

$$x^i = (A_i + B_i + C_i + D_i)/4,$$



Триангуляция поверхности



Аппроксимация четырехугольными ячейками

Рис. 5.1: Аппроксимация поверхностей

$$\vec{n}_i = \frac{\vec{b} \times \vec{d}}{|\vec{b} \times \vec{d}|}, \quad \vec{b} = C_i - A_i, \quad \vec{d} = D_i - B_i,$$

$$s_i = |\vec{b} \times \vec{d}| / 2 \quad (5.36)$$

(в случае пространственного четырехугольника данные формулы дают приближенные значения соответствующих параметров ячейки).

Рассмотрим для примера особенности реализации метода кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций. Будем искать неизвестные ν_i , $i = 1, \dots, N$ — значения функции ν на ячейках разбиения.

В случае краевой задачи Неймана имеем уравнение (5.16) или (5.17). Эти уравнения сводятся к системе линейных уравнений вида (4.16), (4.17), которые в данном случае принимают вид:

$$\alpha \nu_i + \sum_{j=1}^n K_{ij} \nu_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.37)$$

где

$$K_{ij} = \int_{\sigma_j} K(x^i, y) dy, \quad (5.38)$$

$$K(x, y) = \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_x} = \vec{n}(x) \text{grad}_x F(x - y), \quad \alpha = \pm 1/2.$$

Для вычисления коэффициентов K_{ij} можно применить формулы (4.21) с дорзбиением на каждой ячейки основного разбиения на

ячейки второго уровня и введением сглаживающего множителя. Разбиение ячейки σ_j на систему ячеек второго уровня σ_j^p , $p = 1, \dots, M$ можно осуществить по следующей схеме.

Разбиение треугольных ячеек. Рассмотрим треугольную ячейку $\sigma_j = (ABC)$. Осуществим ее разбиение на $M = m^2$ равных ячеек.

Пусть $\vec{b} = (B - A) / m$, $\vec{c} = (C - A) / m$.

а) для каждого $t = 1, \dots, m$ и при выбранном t для каждого $s = 1, \dots, m + 1 - t$, построим ячейку $\sigma' = (A', B', C')$, где

$$\begin{cases} A' = A + (t - 1)\vec{c} + (s - 1)\vec{b}, \\ B' = A' + \vec{b}, \\ C' = A' + \vec{c}, \end{cases}$$

б) для каждого $t = 1, \dots, m - 1$ и при выбранном t для каждого $s = 1, \dots, m - t$, построим ячейку $\sigma'' = (A'', B'', C'')$, где

$$\begin{cases} A'' = A + (t - 1)\vec{c} + s\vec{b}, \\ B'' = A'' + \vec{c}, \\ C'' = B'' - \vec{b}. \end{cases}$$

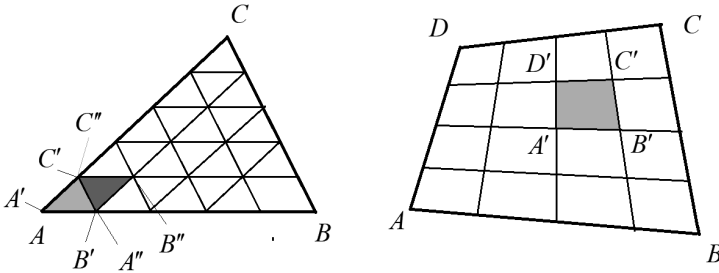


Рис. 5.2: Разбиение ячеек

Рассмотренные ячейки σ' и σ'' образуют $M = m^2$ ячеек, которые мы обозначим как σ_j^p , $p = 1, \dots, M$.

Разбиение четырехугольных ячеек. Рассмотрим четырехугольную ячейку $\sigma_j = (ABCD)$. Осуществим ее разбиение на $M = m^2$ ячеек. Ячейку σ_j аппроксимируем поверхностью, проходящей через вершины ячейки, заданной параметрически:

$$x = x(s_1, s_2) \equiv (1 - s_1)(1 - s_2)A + s_1(1 - s_2)B + (1 - s_1)s_2C + s_1s_2D,$$

$s_1 \in [0, 1]$, $s_2 \in [0, 1]$. Далее для каждых $t_1 = 1, \dots, m$ и $t_2 = 1, \dots, m$ построим ячейку $\sigma' = (A', B', C', D')$, где

$$\begin{cases} A' = x\left(\frac{t_1-1}{m}, \frac{t_2-1}{m}\right), & B' = x\left(\frac{t_1}{m}, \frac{t_2-1}{m}\right), \\ C' = x\left(\frac{t_1-1}{m}, \frac{t_2}{m}\right), & D' = x\left(\frac{t_1}{m}, \frac{t_2}{m}\right). \end{cases}$$

Построенные ячейки σ' образуют $M = m^2$ ячеек, которые мы обозначим как $\sigma_j^p, p = 1, \dots, M$.

Далее на каждой ячейке σ_j^p построим точку коллокации $y_j^p \in \sigma_j^p$, нормаль \vec{n}_j^p и определим ее площадь s_j^p , используя те же формулы (5.35) или (5.36), что и для основных ячеек. Теперь коэффициенты K_{ij} можно вычислить по формулам (4.21).

В случае краевой задачи Дирихле возникает уравнение (5.14) или (5.15). При его численном решении возникает система (5.37)-(5.38), где ядро $K(x, y)$ имеет вид

$$K(x, y) = \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_x} = \vec{n}(x) \text{grad}_y F(x - y).$$

В случае, уравнения Лапласа (т.е. когда $F(x - y)$ – потенциал точечного заряда для уравнения Лапласа) интеграл (5.38) вычисляется аналитически:

$$\int_{\sigma_j} K(x^i, y) dy = \int_{\sigma_j} \frac{\partial F(x^i - y)}{\partial n_y} dy = \pm \frac{\theta(x^i)}{4\pi}, \quad (5.39)$$

где $\theta(x^i)$ – телесный угол, под которым видна поверхность ячейки σ_j из точки x^i , знак выбирается '+', если ячейка видна со стороны положительной нормали, '- ', если с противоположной стороны.

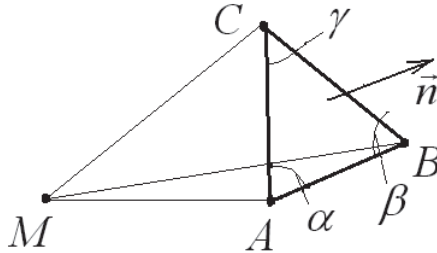


Рис. 5.3: К вычислению телесного угла

Если ячейка треугольная, телесный угол $\theta(x^i)$ вычисляется аналитически (см. рисунок 5.3). Пусть ячейка σ_j есть треугольник ABC , $M = x^i$. Тогда из соотношения для углов сферического треугольника имеем: $\theta(x^i) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, где α, β, γ – величины двугранных углов в тетраэдре $ABCM$ при ребрах AM, BM, CM соответственно. Для выбора знака в правой части формулы (5.39), вычислим величину $p = (\vec{AC} \times \vec{AB}) \vec{MA}$. Знак '+' выбирается при $p > 0$ и знак '-'

5.3 Задача Дирихле на экране

при $p < 0$. При $p = 0$ весь интеграл, вычисляемый в формуле (5.39), следует считать равным 0.

Если ячейка четырех угольная, при вычислении угла $\theta(x^i)$ ячейку можно разбить на 2 треугольника и просуммировать углы, под которыми видны эти треугольники. При этом также следует положить $\theta(x^i) = 0$ при $i = j$.

В случае уравнения Гельмгольца с $k \neq 0$ при вычислении интеграла (5.38) можно выделить особенность, представив функцию F в виде:

$$F(x - y) = F_0(x - y) + \tilde{F}(x - y),$$

$$F_0(x - y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}, \quad \tilde{F}(x - y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr} - 1}{r}, \quad r = |x - y|.$$

Тогда

$$K_{ij} = \int_{\sigma_j} \frac{\partial F_0(x^i - y)}{\partial n_y} dy + \int_{\sigma_j} \frac{\partial \tilde{F}(x^i - y)}{\partial n_y} dy. \quad (5.40)$$

Теперь первый интеграл в формуле (5.40) вычисляем аналитически по формуле (5.39), а второй вычисляем численно по формуле типа

$$\int_{\sigma_j} \frac{\partial \tilde{F}(x^i - y)}{\partial n_y} dy \approx \sum_{p=1}^M \tilde{K}(x^i, y_j^p) s_j^p,$$

здесь

$$\tilde{K}(x, y) = \frac{\partial \tilde{F}(x - y)}{\partial n_y}.$$

Эта формуле аналогична формуле (4.21), но сглаживающей функции здесь нет, т.к. подынтегральная функция $\tilde{K}(x, y)$ оказывается непрерывной при $x = y$.

5.3 Задача Дирихле на экране

5.3.1 Постановка задачи. Пусть Σ – простая разомкнутая ориентированная кусочно-гладкая поверхность с краем (экран). Пусть $\Omega = R^3 \setminus \Sigma$ – область вне поверхности Σ . Краевая задача в области Ω при условии, что на обеих сторонах поверхности Σ ставятся граничные условия, называется краевой задачей на экране (в этом случае поверхность Σ так же называют экраном).

В этом пункте рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа (5.1) или Гельмгольца (5.3). Требуется найти функцию u , удовлетворяющую граничному условию

$$u^+ = u^- = f \quad (5.41)$$

на поверхности Σ (условие Дирихле).

Так же, как и для классических внешних краевых задач в области вне замкнутой поверхности, ставятся условия на бесконечности (5.6) в случае уравнения Лапласа и (5.6) и (5.8) в случае уравнения Гельмгольца.

Дополнительно в этой задаче ставится условие на поведение функции в окрестности края поверхности Σ . Пусть кривая L есть край поверхности Σ . Тогда должна выполняться оценка:

$$|\text{grad } u(x)| \leq \frac{C}{\rho(x, L)^\alpha}, \quad (5.42)$$

с некоторыми константами C и $\alpha < 1$ для всех точек $x \in \Omega$, $\rho(x, L)$ – расстояние от точки x до кривой L .

Заметим, что из оценки (5.42) следует непрерывность функции u на кривой L .

Заметим, также, что в случае уравнения Лапласа единственность решения поставленной краевой задачи Дирихле сразу следует из принципа максимума для гармонических функций [43, глава 4, §2, п. 2], [7, глава 5, §24, п. 4], одна из формулировок которого состоит в том, что не равная тождественно константе функция, гармоническая в области Ω (открытой), не может иметь в этой области ни одной внутренней точки локального экстремума. В противоречие с этим принципом, такие точки должны быть в рассматриваемой области, если предположить, что гармоническая функция u , не равная нулю тождественно, имеет нулевые предельные значения на кривой L и удовлетворяет условию (5.6) на бесконечности.

5.3.2 Сведение задачи к интегральному уравнению и его численное решение. Будем искать решение в виде потенциала простого слоя:

$$u(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) F(x - y) dy, \quad x \in \Omega, \quad (5.43)$$

$F(x - y)$ – потенциал точечного источника для решаемого уравнения Лапласа или Гельмгольца, ν – неизвестная функция.

Заметим, что в данном случае мы не можем искать решение задачи в виде потенциала двойного слоя, т.к. потенциал двойного слоя имеет разные краевые значения на разных сторонах поверхности и не может удовлетворять граничному условию (5.41). В силу необходимости выполнить условия на обеих сторонах поверхности, задачу не удается свести к уравнению Фредгольма 2-го рода.

В силу формулы (5.11) для краевых значений потенциала простого слоя вида, для плотности потенциала простого слоя ν возникает интегральное уравнение:

$$\int_{\Sigma} \nu(y) F(x - y) dy = f(x), \quad x \in \Sigma, \quad (5.44)$$

5.3 Задача Дирихле на экране

которое является интегральным уравнением Фредгольма первого рода.

Для решения уравнения (5.44) можно применять методы кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций или метод Галеркина, описанные в п. 4.2.

В случае применения метода кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций поверхность Σ аппроксимируем системой ячеек σ_i , $j = 1, \dots, N$. Так же, как и для уравнений, рассмотренных выше в п.5.2. можно использовать треугольные ячейки (триангуляция поверхности), либо четырехугольные ячейки (с возможностью возникновения треугольных ячеек как четырехугольных со сдвоенными вершинами). Неизвестную функцию ν приближенно ищем в виде кусочно-постоянной функции

$$\tilde{\nu}(x) = \nu_i \text{ при } x \in \sigma_i.$$

Следуя по схеме, описанной в п.4.2.2, получаем уравнение

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \nu_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$K_{ij} = \int_{\sigma_j} F(x^i - y) d\sigma_y. \quad (5.45)$$

Можно вычислять коэффициенты a_{ij} приближенно, по формуле (4.21).

В случае треугольных ячеек можно предложить более точный подход для вычисления диагональных коэффициентов K_{ii} , $i = 1, \dots, N$.

В случае уравнения Лапласа, т.е. когда функция F имеет вид $F(x - y) = (4\pi r)^{-1}$ интеграл в выражении для диагональных коэффициентов вычислим аналитически. Разобьем ячейку σ_i на систему треугольников σ_i^k , $k = 1, \dots, 3$, каждый из которых имеет вершину в точке x^i и противоположную сторону, являющуюся одной из сторон треугольника σ_i (рисунок 5.4).

Рассмотрим один из таких треугольников, обозначив его вершины как XPQ , $X = x^i$, а P и Q – две другие вершины, являющиеся вершинами ячейки σ_i . Проведем полярную ось из точки X перпендикулярно стороне PQ и направленную в сторону основания H высоты треугольника, проведенной из вершины X . Тогда, переходя к полярным координатам, можем записать:

$$\int_{\sigma_i^k} F(x^i - y) d\sigma_y = \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} dr = \frac{1}{4\pi} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) d\varphi,$$

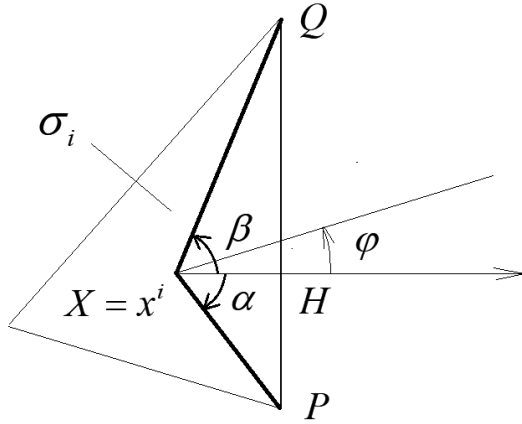


Рис. 5.4: К вычислению интеграла от функции $1/r$ по треугольнику

где α, β – полярные углы, соответствующие лучам, на которых лежат стороны треугольника XP и XQ . При этом

$$\sin \alpha = -\cos(\widehat{XPQ}) = -\frac{(X-P, Q-P)}{|X-P||Q-P|},$$

$$\sin \beta = \cos(\widehat{XQP}) = \frac{(X-Q, P-Q)}{|X-Q||P-Q|},$$

$$r(\varphi) = \frac{|XH|}{\cos \varphi}, \quad |XH| = |XP| |\sin \alpha|,$$

здесь мы считаем углы α и β ориентированными. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_i^k} F(x^i - y) d\sigma_y &= |XH| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = |XH| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d \sin \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{1}{2} |XH| \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| \Bigg|_{u=\sin \alpha}^{u=\sin \beta}. \end{aligned}$$

Численные эксперименты показывают, что данная численная схема устойчива для гладких правых частей f и позволяет построить

приближенное решение краевой задачи в виде:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n \nu_i \int_{\sigma_i} F(x-y) d\sigma_y.$$

5.4 Задача Неймана для уравнения Лапласа на разрезе

5.4.1 Постановка задачи. Пусть L – кусочно-гладкая простая разомкнутая кривая класса C^m , $m \geq 2$ на плоскости и пусть $\Omega = R^2 \setminus L$ – область, представляющая собой всю плоскость с разрезом по кривой L .

Рассмотрим краевую задачу Неймана для уравнения Лапласа (5.1) относительно неизвестной функции u в области Ω с граничным условием Неймана на кривой L

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^- = f. \quad (5.46)$$

Решение краевой задачи на разрезе L будем искать в классе функций, удовлетворяющих условиям:

- во всех точках $x \in L^{in}$, являющихся точками гладкости кривой L , функция u имеет краевые значения с обеих сторон этой кривой, причем, краевые значения u^+ и u^- непрерывны на кривой L (могут быть продолжены по непрерывности на угловые точки и концы кривой L);

- если $x \in L^{in}$ есть точка гладкости, то существует окрестность этой точки, в которой функция u имеет правильные нормальные производные на обеих сторонах кривой L , являющиеся непрерывными функциями в этой окрестности;

- если A – узел кривой L (конец или угловая точка), то в окрестности точки A выполнена оценка:

$$|\nabla u(x)| \leq C|x - A|^\alpha, \quad x \notin L, \quad (5.47)$$

где C и α – некоторые константы, причем, $0 \leq \alpha < 1$, здесь, как и ранее, L^{in} – множество внутренних точек кривой L , т.е. точек, не являющихся ее концами.

Заметим, что из оценки (5.47) следует непрерывность функции u на концах кривой L .

Будем рассматривать решения поставленной задачи, удовлетворяющие условию на бесконечности (5.6).

5.4.2 Единственность решения задачи. Поскольку граничное условие является линейным, достаточно доказать единственность решения в случае однородного граничного условия (условия (5.46) с $f = 0$).

Возьмем константы $r > 0$ и $\varepsilon : 0 < \varepsilon < r, R > 0$, и пусть $\Omega_{R,r,\varepsilon}$ есть множество точек плоскости, для которых выполнены условия:

$$|x| < R, \rho(x, L) > \varepsilon, \rho(x, A_i) > r$$

для всех узлов A_i кривой L .

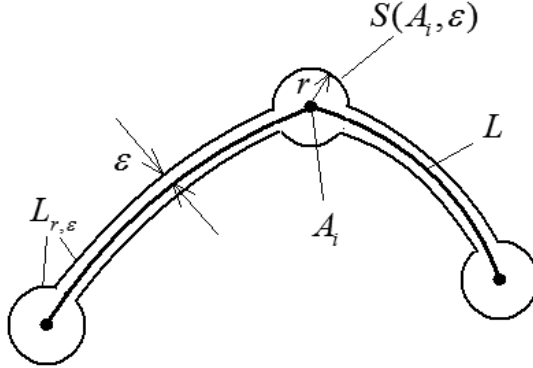


Рис. 5.5: К доказательству единственности решения

При достаточно большом значении параметра R и достаточно малом значении параметра r область $\Omega_{R,r,\varepsilon}$ ограничена снаружи окружностью $S(O, R) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = R\}$, где $O = (0, 0)$, и внутри замкнутой кривой $L_{r,\varepsilon}$, которая состоит из точек $x \in \mathbb{R}^2$, для которых выполнено одно из условий:

или $\rho(x, L) = \varepsilon$ и при этом $\rho(x, A_i) \geq r$ для всех узлов A_i ,
или $\rho(x, A_i) = r$, где A_i – один из узлов кривой L , и при этом $\rho(x, L) > \varepsilon$.

При этом кривая $L_{r,\varepsilon}$ состоит из дуг окружностей с центрами A_i радиуса r и участков кривых, полученных при смещении точек кривой L на расстояние ε по направлению вектора \vec{n} или по направлению вектора $-\vec{n}$.

Пусть функция u есть решение рассматриваемой задачи Неймана в сформулированном классе функций с $f = 0$. Применив к функции u в области $G = \Omega_{R,r,\varepsilon}$ формулу Грина (2.7), имеем равенство:

$$\int_{\partial G} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_G (\text{grad } u)^2 dx = \int_G u \Delta u dx = 0, \quad (5.48)$$

где $\partial u / \partial n$ – производная по направлению вектора внешней нормали на кривой ∂G .

Устремляя в последней формуле ε к нулю, при фиксированных R и r , получим:

$$\begin{aligned} & \int_{L(r)} \left(u^- \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^- - u^+ \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+ \right) d\sigma + \\ & + \sum_i \int_{S(A_i, r)} u \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \int_{S(O, R)} u \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \\ & = \int_{\Omega(R, r, 0)} (grad u)^2 dx, \end{aligned} \quad (5.49)$$

где $\Omega(R, r, 0)$ – множество точек $x \in \Omega$, удовлетворяющих условиям: $|x| < R$, $\rho(x, A_i) > r$ для всех узлов A_i кривой L , $L(r)$ – множество точек кривой L , удовлетворяющих условиям $\rho(x, A_i) > r$ для всех узлов A_i кривой L , $S(A_i, r)$ – окружности с центрами в узлах A_i радиуса r , сумма берется по всем узлам кривой L .

Функция u , как функция гармоническая на бесконечности, удовлетворяет, оценкам (5.7). Тогда, с учетом оценок (5.47), имеем:

$$\int_{S(A_i, r)} u \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = O(r^{1-\alpha}) \text{ при } r \rightarrow 0,$$

$$\int_{S(O, R)} u \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = O\left(\frac{1}{R}\right) \text{ при } R \rightarrow \infty.$$

В силу граничного условия (5.46) первый интеграл в формуле (5.49) равен нулю и мы можем записать:

$$\left| \int_{\Omega(R, r, 0)} (grad u)^2 dx \right| \leq O(r^{1-\alpha}) + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

причем данная оценка выполнена для любых сколь угодно малого r и сколь угодно большого R . Но это возможно только если $grad u \equiv 0$ в области Ω .

Тогда $u \equiv const$ в области Ω . Теперь из (5.6) на бесконечности заключаем, что $u \equiv 0$ в области Ω . Тем самым единственность решения задачи доказана.

5.4.3 Сведение задачи к сингулярному интегральному уравнению.

Будем искать решение задачи в виде потенциала двойного слоя (5.10), в котором плотность предполагается непрерывной на контуре L , включая концы, дважды непрерывно-дифференцируемой во внутренних точках гладкости кривой L , и удовлетворяющей условиям

$$\nu(A) = \nu(B) = 0, \quad (5.50)$$

где A и B – концы кривой L .

Далее воспользуемся выражениями для градиента потенциала двойного слоя, полученными в п. 3.6.2. Предположим, что контур L задан параметрически как $y = y_L(s)$, где $s \in [a, b]$ – естественный параметр, $A = y_L(a)$, $B = y_L(b)$. Используя формулу (3.38) и условия (5.50), запишем:

$$\operatorname{grad} u(x) = \int_a^b \gamma(s) \vec{V}(x - y_L(s)) ds, \quad (5.51)$$

где

$$\vec{V}(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{(-x_2, x_1)}{|x|^2},$$

$$\gamma(s) = \frac{d\nu(y_L(s))}{ds}.$$

Напомним, что для справедливости формулы (3.38) естественный параметр должен быть выбран так, чтобы векторы \vec{n} и $\vec{\tau} = dy_L(s)/ds$ образовывали правую пару на плоскости.

В силу теоремы 3.9 выполнение граничного условия (5.46) равносильно уравнению

$$\int_a^b \gamma(s) \vec{V}(y_L(s_0) - y_L(s)) \vec{n}(s_0) ds = f(y_L(s_0)), s_0 \in (a, b), \quad (5.52)$$

где $\vec{n}(s_0)$ – вектор нормали к контуру L в точке $y_L(s_0)$, при условии

$$\int_a^b \gamma(s) ds = 0. \quad (5.53)$$

Интеграл в уравнении (5.52) является сингулярным, понимаемым в смысле главного значения по Коши (см. теорему 3.9). Условие (5.53) возникло из условий (5.50), условие (5.53) является необходимым и достаточным условием того, что функция $\gamma(s)$ имеет первообразную, удовлетворяющую условиям (5.50). Эта первообразная определяется формулой

$$\nu(s) = \int_a^s \gamma(s') ds'. \quad s \in [a, b]. \quad (5.54)$$

Заметим, так же, что случае контура с угловыми точками, уравнение (5.52) должно выполняться в точках гладкости контура. Решение уравнения (5.52) ищется в классе функций, удовлетворяющих

условиям: функция $\gamma(s)$ непрерывно-дифференцируема во внутренних точках гладкости кривой L , а ее первообразная $\nu(s)$ непрерывна на кривой L .

Рассмотрим случай, когда кривая L есть отрезок. Введем систему координат так, что $y_L(s) = (s, 0)$. Тогда уравнение (5.52) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\gamma(s)}{s - s_0} ds = f(y_L(s_0)), s_0 \in (a, b). \quad (5.55)$$

В случае гладкого контура L класса C^3 уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\gamma(s)}{s - s_0} ds + \int_a^b K(s_0, s) \gamma(s) ds = f(y_L(s_0)), s_0 \in (a, b). \quad (5.56)$$

$K(s_0, s) \in C^1[a, b] \times [a, b]$ (см. [26, с. 152]).

Уравнения такого типа, в частности, возникли в плоских задачах обтекания тонких поверхностей идеальной жидкостью. Приложения метода интегральных уравнений к таким задачам будет рассмотрено в разделе 6.2. Там же будет описана схема численного решения уравнений такого типа, возникающая в задачах аэродинамики.

5.4.4 Сведение задачи к гиперсингулярному интегральному уравнению. Данную задачу можно свести к уравнению непосредственно для плотности потенциала двойного слоя. При этом возникает гиперсингулярное интегральное уравнение с интегралом, понимаемым в смысле конечной части по Адамару. Получим такое уравнение и опишем численную схему его решения. По-прежнему ищем решение задачи в виде потенциала двойного слоя (5.10), в котором плотность удовлетворяет условиям (5.50).

Из формул (3.55) и (3.57) следует, что градиент потенциала двойного слоя имеет краевые значения на контуре L , представляющиеся в виде:

$$\text{grad } u(x)^\pm = \int_L \nu(y) \text{grad}_x \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_y} ds_y \pm \frac{1}{2} \vec{\tau} \gamma(s_0), \quad x = y_L(s_0) \in L,$$

где интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару, $\gamma(s) = dy_L(s)/ds$.

Тогда выполнение граничного условия (5.46) равносильно уравнению

$$\int_L \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} F(x - y) ds_y = f(x), \quad x \in L, \quad (5.57)$$

здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} F(x-y) ds_y &= \left(\vec{n}(x), \operatorname{grad}_x \frac{\partial}{\partial n_y} F(x-y) \right) = \\ &= (\vec{n}(x), (\vec{n}(y) \operatorname{grad}_y F(x-y))), \end{aligned}$$

уравнение должно выполняться в точках гладкости контура L и исключая концы.

Получим явные формулы для ядра уравнения (5.57):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_y} F(x-y) &= \frac{(\vec{n}(y), x-y)}{2\pi |x-y|^2}, \\ \operatorname{grad}_x \frac{\partial}{\partial n_y} F(x-y) &= \frac{\vec{n}(y)}{2\pi |x-y|^2} - (x-y) \frac{2(\vec{n}(y), x-y)}{2\pi |x-y|^4}, \\ \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} F(x-y) ds_y &= \frac{(\vec{n}(y), \vec{n}(x))}{2\pi |x-y|^2} - \frac{(\vec{n}(y), x-y)(\vec{n}(x), x-y)}{\pi |x-y|^4}. \end{aligned}$$

В случае, когда контур L гладкий, в последнем выражении

$$(\vec{n}(y), \vec{n}(x)) = 1 + O(|x-y|^2),$$

т.к.

$$\frac{d\vec{n}(y)}{ds} \vec{n}(y) = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{n}(y), \vec{n}(y))}{ds} = 0, \quad y = y_L(s)$$

и

$$(\vec{n}(y), x-y) = O(|x-y|^2), \quad (\vec{n}(x), x-y) = O(|x-y|^2).$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} F(x-y) ds_y = \frac{1}{2\pi |x-y|^2} + \tilde{K}(x, y),$$

где $\tilde{K}(x, y)$ – ограниченная функция при $y \rightarrow x$.

Заметим, что если контур L отрезок, то

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} F(x-y) ds_y = \frac{1}{2\pi |x-y|^2}$$

и мы имеем уравнение

$$\int_L \frac{\nu(x)}{2\pi |x-y|^2} ds_y = f(x), \quad x \in L, \quad (5.58)$$

5.4 Задача Неймана для уравнения Лапласа на разрезе

Пусть система координат на плоскости введена так, что отрезок L задается параметрически как $y_L(s) = (s, 0)$, $s \in [a, b]$. Здесь напомним, что в этом случае вектор нормали имеет координаты $\vec{n}(x) = (0, -1)$. Тогда уравнение (5.58) принимает вид

$$\int_a^b \frac{\varphi(s)}{2\pi(s-s_0)^2} ds = g(s), \quad s \in (a, b), \quad (5.59)$$

здесь $\varphi(s) = \nu(y_L(s))$, $g(s) = f(y_L(s))$.

Численно уравнение (5.57) можно решать методом кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций. Разобьем контур L на равные дуги следующим образом. Пусть контур L задан параметрически как $y = y_L(s)$, $s \in [a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на равные отрезки $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, N$, длины $h = (b-a)/n$. При этом

$$a_i = a + (i-1)h, \quad b_i = a + ih.$$

Тогда на контуре L возникают дуги-ячейки σ_i с концами в точках $A_i = y_L(a_i)$ и $B_i = y_L(b_i)$. Выберем на каждой ячейке точку коллокации как

$$x^i = y_L(s_{0,i}), \quad s_{0,i} = \frac{a_i + b_i}{2}.$$

Будем искать приближенное решение уравнения (5.57) в виде кусочно-постоянной функции, такой, что

$$\tilde{\nu}(x) = \nu_i \text{ при } x \in \sigma_i^{in}, \quad i = 1, \dots, N,$$

σ_i^{in} — как и ранее внутренние точки ячейки (в данном случае не концы). При этом потребуем выполнения уравнения (5.57) в точках коллокации. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \nu_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.60)$$

где

$$a_{ij} = \int_{\sigma_j} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} F(x-y) ds_y \Bigg|_{x=x^i} = \vec{n}(x^i) \int_{\sigma_j} \text{grad}_x \frac{\partial}{\partial n_y} F(x-y) ds_y \Bigg|_{x=x^i}.$$

Используя формулы (3.57) и (3.54), где в данном случае $\gamma = 0$, получим:

$$a_{ij} = \vec{n}(x^i) \left[\vec{V}(A_j - x^i) - \vec{V}(B_j - x^i) \right].$$

Таким образом, возникла достаточно простая численная схема с явным выражением для коэффициентов матрицы.

Рассмотрим так же уравнение (5.59) на отрезке. Опять разобьем отрезок $[a, b]$ на равные отрезки $[a_i, b_i]$ и будем искать приближенное решение в виде $\varphi(s) = \varphi_i$ при $s \in (a_i, b_i)$, $i = 1, \dots, N$.

Записывая уравнение в точках коллокации $s_{0,i} = \frac{a_i + b_i}{2}$, получим систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \nu_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.61)$$

где

$$a_{ij} = \int_{a_j}^{b_j} \frac{1}{2\pi(s - s_{0,i})^2} ds = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{a_j - s_{0,i}} - \frac{1}{b_j - s_{0,i}} \right] \quad (5.62)$$

(см. формулу (1.56) для гиперсингулярного интеграла на отрезке).

Важное свойство этой системы состоит в том, что ее матрица имеет сильное диагональное преобладание:

$$|a_{ii}| - \sum_{j=1, \dots, N, j \neq i} |a_{ij}| > \frac{1}{2\pi\rho(s_{0,i})}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.63)$$

где $\rho(s_{0,i})$ – расстояние от точки $s_{0,i}$ до ближайшего конца отрезка $[a, b]$.

Действительно, с одной стороны, при $i \neq j$ интеграл в выражении (5.62) обычный и поэтому $a_{ij} > 0$.

С другой стороны

$$\begin{aligned} -a_{ii} - \sum_{j=1, \dots, N, j \neq i} a_{ij} &= - \int_a^b \frac{1}{2\pi(s - s_{0,i})^2} ds = \\ &= - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{a - s_{0,i}} - \frac{1}{b - s_{0,i}} \right] = \frac{b - a}{(s_{0,i} - a)(b - s_{0,i})} \geq \frac{1}{2\pi\rho(s_{0,i})}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $a_{ii} < 0$ и тогда имеем оценку (5.63).

Вопросы обоснования сходимости описанного численного метода разобраны в [26] (см. теорема 17.6.1 из этой книги).

5.5 Задача Неймана для уравнения Лапласа на экране

Пусть Σ – простая разомкнутая кусочно-гладкая поверхность с краем (экран), $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ – область вне поверхности Σ . Рассмотрим

5.5 Задача Неймана для уравнения Лапласа на экране

краевую задачу Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0 \text{ в области } \Omega, \quad (5.64)$$

с граничным условием Неймана

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^- = f \text{ на поверхности } \Sigma \quad (5.65)$$

Решение будем искать в классе функций, удовлетворяющих условиям:

- во всех точках $x \in \Sigma^{in}$, являющихся точками гладкости поверхности Σ , функция u имеет краевые значения с обеих сторон этой поверхности, причем, краевые значения u^+ и u^- непрерывны на поверхности Σ (могут быть продолжены по непрерывности на края, ребра и конические точки поверхности Σ);

- если $x \in \Sigma^{in}$ есть точка гладкости, то существует окрестность этой точки, в которой функция u имеет правильные нормальные производные на обеих сторонах поверхности Σ , являющиеся непрерывными функциями в этой окрестности;

- если кривая L есть край или ребро поверхности Σ , то в ее окрестности выполнена оценка:

$$|\nabla u(x)| \leq / \rho(x, L)^\alpha, \quad x \notin \Sigma \quad (5.66)$$

если A – коническая точка кривой L , то в окрестности точки A выполнена оценка:

$$|\nabla u(x)| \leq / |x - A|^\alpha, \quad x \notin \Sigma, \quad (5.67)$$

где C и α – некоторые константы, причем, $0 \leq \alpha < 1$, здесь Σ^{in} – множество внутренних точек поверхности, т.е. точек, не являющихся точками края.

Из оценок (5.66) следует непрерывность функции u на краю поверхности.

Будем рассматривать решения поставленной задачи, удовлетворяющие условию на бесконечности:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \quad (5.68)$$

Ищем решение задачи в виде потенциала двойного слоя:

$$u(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \partial \frac{F(x-y)}{\partial n_y} dy, \quad x \in R^3 \setminus \Sigma, \quad (5.69)$$

$$F(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}$$

– потенциал точечного источника для уравнения Лапласа. При этом будем предполагать, что плотность потенциала двойного слоя должна быть непрерывна на всей поверхности Σ , дважды непрерывно дифференцируема во всех точках гладкости поверхности Σ , не лежащих на краю, и удовлетворять условию:

$$\nu(x) = 0 \text{ при } x \in \partial\Sigma.$$

В силу теоремы 3.11 потенциал двойного слоя вида (5.69) имеет в точках гладкости поверхности Σ , не лежащих на краю, краевые значения нормальной производной, для которых справедлива формула:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^-(x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} F(x-y) dy, \quad (5.70)$$

где интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару:

$$\int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Sigma/B(x,\varepsilon)} \nu(y) \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} dy - \frac{\nu(x)}{2\varepsilon} \right]$$

(последняя формула следует из формулы (3.101)).

При этом для ядра интегрального оператора в правой части формулы (5.70) справедливы выражения:

$$\frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} = \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{4\pi |x-y|} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{(x-y, \vec{n}(y))}{|x-y|^3}$$

и

$$\frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{(\vec{n}(x), \vec{n}(y))}{|x-y|^3} - \frac{3(x-y, \vec{n}(y))(x-y, \vec{n}(x))}{|x-y|^5} \right).$$

При этом

$$\frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} = O\left(\frac{1}{|x-y|^3}\right) \text{ при } |x-y| \rightarrow 0.$$

Тогда для функции ν – плотности потенциала двойного слоя, возникает уравнение:

$$\int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} dy = f(x), \quad x \in \Sigma^{in}, \quad (5.71)$$

интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару, уравнение рассматривается в точках гладкости поверхности.

5.5 Задача Неймана для уравнения Лапласа на экране

Численно уравнение (5.71) можно решать с помощью простейших квадратурных формул типа метода прямоугольников. Поверхность Σ аппроксимируется ячейками σ_i , $i = 1, \dots, n$.

Будем использовать разбиение на треугольные ячейки или четырехугольные ячейки (с возможностью появления треугольных ячеек как вырожденного случая) как указано в п. 5.2. На каждой ячейке строим точку коллокации x^i и вектор нормали \vec{n}_i по формулам (5.35) в случае треугольных ячеек или (5.36) в случае четырехугольных ячеек.

Будем искать приближенное решение в виде:

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^n \nu_j U_{\sigma_j}[e], \quad (5.72)$$

где $U_{\sigma_j}[e]$ – потенциал двойного слоя с плотностью $e(x) \equiv 1$, размещенного на ячейке σ_j .

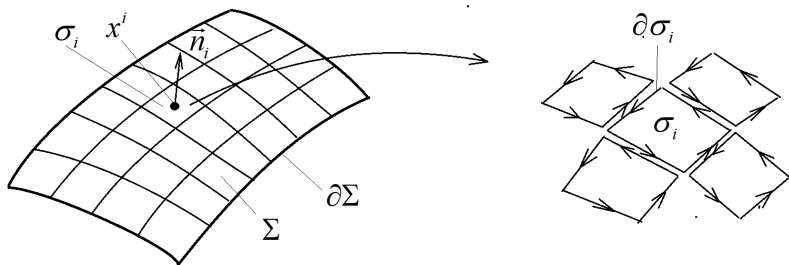


Рис. 5.6: Аппроксимация поверхности вихревыми рамками

Заметим, что данное выражение возникает, если взять потенциал двойного слоя, размещенного на поверхности $\tilde{\Sigma}$, являющейся объединением всех ячеек σ_j , $j = 1, \dots, n$, с плотностью $\tilde{\nu}$, принимающей на каждой ячейке σ_j значение ν_j . При этом градиент потенциала двойного слоя \tilde{u} запишется в виде

$$\text{grad } \tilde{u} = \sum_{j=1}^n \nu_j \vec{W}_{\sigma_j}, \text{ где } \vec{W}_{\sigma_j} = \text{grad } U_{\sigma_j}[e]. \quad (5.73)$$

Для векторного поля \vec{W}_{σ_j} , из формулы (3.91), следует выражение

$$\vec{W}_{\sigma_j}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\sigma_j} \frac{\vec{\tau}_y \times (x - y)}{|x - y|^3} ds_y, \quad (5.74)$$

где $\partial\sigma_j$ – замкнутый контур, являющийся краем поверхности σ_j , ds_y – элемент длины дуги, $\vec{\tau}_y$ – орт вектора касательной на контуре $\partial\sigma_j$, причем, направление обхода контура $\partial\sigma_j$ выбирается так, что если при обходе вектор нормали \vec{n} к поверхности ячейки σ_j направлен вверх, то поверхность σ_j остается слева.

Заметим, что если $\partial\sigma_j$ есть ломаная линия, интеграл в правой части формулы (5.74) вычисляется аналитически, с использованием формулы для интеграла по отрезку $[a, b]$ (см. формула (21.2.7) из [26]):

$$\begin{aligned} & \int_{[a,b]} \frac{\vec{\tau}_y \times (x - y)}{|x - y|^3} ds_y = \\ & = \frac{(b - a) \times (x - a)}{(b - a)^2(x - a)^2 - [(b - a)(x - a)]^2} \left(\frac{(b - a)(x - b)}{|x - b|} - \frac{(b - a)(x - a)}{|x - a|} \right). \end{aligned} \quad (5.75)$$

С физической точки зрения векторное поле $\vec{W}_{\sigma_j}(x)$ есть поле скоростей, индуцируемое вихревой нитью единичной интенсивности, размещенной по контуру $\partial\sigma_j$. Поэтому описываемый метод называли методом вихревых рамок [26, §23.4]. Напомним, что в электродинамике это же векторное поле описывает магнитное поле, индуцируемое замкнутым контуром $\partial\sigma_j$ с единичным током – закон Био-Савара.

Поле $\vec{W}_{\sigma_j}(x)$ определено и бесконечно-дифференцируемо во всем пространстве вне контура $\partial\sigma_j$. Тогда векторное поле $grad \tilde{u}$ определено и непрерывно во всех отмеченных точках коллокации x^i , $i = 1, \dots, n$. Требуя выполнения граничного условия (5.65) для поля \tilde{u} в точках коллокации получаем систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \nu_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.76)$$

где

$$a_{ij} = \vec{W}_{\sigma_j}(x^i) \vec{n}_i, \quad f_i = f(x^i), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (5.77)$$

(Если точки коллокации x^i не лежат в точности на поверхности Σ , а функция f определена только на поверхности, можно положить $f_i = f(\tilde{x}^i)$, где \tilde{x}^i – ближайшая к x^i точка на поверхности.)

Обоснование данного метода имеется для случая, когда поверхность Σ есть плоская поверхность, являющаяся выпуклым множеством, с кусочно-гладким краем, и используется регулярное разбиение на прямоугольные ячейки (прямоугольная бесконечная сетка накладывается на фигуру Σ и оставляются те ячейки, которые целиком лежат в фигуре Σ). При этом в случае, когда правая часть f непрерывна по Гельдеру, доказана оценка:

$$|\nu(x^i) - \nu_i| \leq Ch^\alpha,$$

5.5 Задача Неймана для уравнения Лапласа на экране

где h диаметр разбиения, с некоторыми C и $\alpha > 0$, не зависящими от h . Доказательство можно найти в книге [5, §10.5].

Отметим, что, как показывают численные эксперименты, наблюдается равномерная сходимость на сетке при $h \rightarrow 0$ и в случае криволинейных поверхностей и при использовании неравномерных и даже неструктурированных разбиений, однако, математическое доказательство этого факта отсутствует. (При этом точки коллокации обязательно должны браться в центрах ячеек.)

Глава 6

Приложения к задачам аэродинамики

6.1 Основные уравнения для течений идеальной жидкости

Сначала приведем некоторые сведения из аэрогидродинамики (см., например, [27, глава 5, §29-30]).

Течения идеальной несжимаемой жидкости описываются следующими уравнениями для поля скоростей $\vec{W} = \vec{W}(x, t)$ и давления $p(x, t)$, где $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, Ω – область течения, t – время:

$$\operatorname{div} \vec{W} = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\vec{W} \nabla) \vec{W} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.1) в данном случае есть уравнение неразрывности, которое выражает условие сохранения объема, занимаемого частицами, движущимися вместе с жидкостью. Это условие собственно и отражает свойство ее несжимаемости. Уравнение (6.2) – это уравнение Эйлера для идеальной жидкости, т.е. жидкости, в которой нет сил внутреннего трения, а значит, нет касательных напряжений между двумя соседними ее слоями. Величина ρ есть плотность жидкости, которая является заданной константой.

Важной характеристикой течения жидкости является поле завихренности $\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{W}$ (в плоском случае завихренность есть скалярная величина $\omega = \operatorname{rot} \vec{W}$, определяемая формулой (2.6)). Мы будем рассматривать случай стационарных безвихревых течений, т.е. течений, в которых скорость и давление не зависят от времени и в которых

6.1 Основные уравнения для течений идеальной жидкости

выполнено условие $\text{rot } \vec{W} = 0$. Поэтому всюду далее будем считать для скорости и давления, что $\vec{W} = \vec{W}(x)$ и $p = p(x)$.

Используя условие $\partial \vec{W} / \partial t = 0$ и используя формулу векторного анализа

$$\text{grad} \left(\vec{W}^2 \right) = 2 \left(\vec{W} \nabla \right) \vec{W} + 2 \vec{W} \text{rot } \vec{W},$$

уравнение (6.2) перепишем в виде:

$$\text{grad} \left(\frac{\vec{W}^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \Leftrightarrow \quad \text{grad} \left(p + \rho \frac{\vec{W}^2}{2} \right) = 0.$$

Последнее соотношение равносильно равенству:

$$p + \rho \frac{\vec{W}^2}{2} = C, \quad (6.3)$$

где C – произвольная константа. Это равенство называется законом Бернулли.

Таким образом, отыскание стационарного безвихревого течения сводится к решению уравнений

$$\begin{cases} \text{div } \vec{W} = 0 \\ \text{rot } \vec{W} = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

в области течения Ω .

Если поле \vec{W} есть решение уравнений (6.4), то можно найти функцию p – давление, по формуле (6.3) (с любой константой C) и тогда эти поле \vec{W} и функция p есть решение уравнений движения идеальной жидкости (6.1)-(6.2).

Типичной задачей аэродинамики является задача об обтекании некоторого тела. Предполагается, что тело помещено в равномерный поток жидкости, в котором скорость и давление постоянны: \vec{w}_∞ и p_∞ , соответственно. Пусть границей тела является некоторая замкнутая поверхность Σ (замкнутый контур в плоском случае), Ω – область вне тела.

На поверхности тела должно выполняться условие непротекания, выражающее отсутствие потока жидкости через поверхность тела

$$\vec{W}(x) \vec{n}(x) = 0, \quad (6.5)$$

где $x \in \Sigma$, $\vec{n}(x)$ – вектор внешней нормали к поверхности Σ .

В случае безвихревого стационарного обтекания требуется найти поле скоростей и давление, определенные в области Ω и стремящиеся на бесконечности к значениям \vec{w}_∞ и p_∞ , соответственно.

Заметим, что уравнения (6.4), в отличие от исходных уравнений (6.1)-(6.2), являются линейными. Это позволяет ввести понятие полной скорости

$$\vec{w}_{tot}(x) \equiv \vec{W}(x),$$

под которой в задаче обтекания неподвижного тела понимается реальная скорость жидкости, и искать это поле в виде:

$$\vec{w}_{tot}(x) = \vec{w}_\infty + \vec{w}(x), \quad (6.6)$$

где $\vec{w}(x)$ – неизвестное возмущенное (вторичное) поле скоростей. Это возмущенное поле скоростей должно удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{w} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{w} = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

в области течения Ω , граничному условию

$$\vec{w}(x)\vec{n}(x) = f(x), x \in \Sigma, \quad (6.8)$$

где

$$f(x) = -\vec{w}_\infty(x)\vec{n}(x), \quad (6.9)$$

и условию на бесконечности

$$\vec{w}(x) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (6.10)$$

Записанные уравнения (6.7) и условия (6.8)-(6.10) представляют полную математическую постановку краевой задачи, возникающей для случая стационарного безвихревого обтекания тела, ограниченного гладкой замкнутой поверхностью.

В случае, когда поверхность Σ кусочно-гладкая, граничное условие должно выполняться в точках гладкости поверхности, а вблизи ребер ставятся определенные дополнительные условия на поведение поля скоростей, о которых будет сказано ниже.

После решения поставленной задачи можно найти поле давлений, для которого из формулы (6.3) с учетом условий на бесконечности следует выражение:

$$p = p_\infty + \rho \frac{\vec{w}_\infty^2}{2} - \rho \frac{\vec{W}^2}{2}. \quad (6.11)$$

Отдельный класс задач представляет задача об обтекании тонкой несущей поверхности, моделируемой как разомкнутая поверхность с краем Σ . В этом случае решается задача для возмущенного поля скоростей \vec{w} в области Ω вне поверхности, граничное условие (6.5) ставится на обеих сторонах поверхности. В плоском случае аналогично рассматривается задача об обтекании тонкого профиля, моделируемого как разомкнутая кривая. Такие задачи так же будут рассматриваться в следующих пунктах.

Замечание. Рассматривая модель идеальной несжимаемой жидкости нужно иметь в виду, что такая модель применима не только к течениям реальных жидкостей, но, во многих случаях, и к течениям воздуха и газа. В случае внешних задач аэродинамики воздух (газ) можно считать несжимаемым, если возмущенные скорости потока много меньше скорости звука. Так в прикладной аэродинамике считается, что при решении задачи обтекания неподвижного тела при расчетах с инженерной точностью (относительная погрешность 5-10 процентов) модель несжимаемой среды применима, если число Маха $M_\infty = |\vec{w}|/c$, рассчитанное для скорости набегающего потока $\vec{w} = w_\infty$, удовлетворяет условию $M \leq 0.4$. Здесь c – скорость звука. Для воздуха на уровне земли при нормальных атмосферных условиях скорость звука составляет примерно 330 м/с или примерно 1200 км/ч. Так в книгах [27, глава 5, §33], [34, т.1, глава 13, §97] приводятся следующие оценки: при обтекании тела воздушным потоком при стандартных атмосферных условиях со скоростью 68 м/с влияние сжимаемости на величину давления на поверхности тела составляет менее 1 процента, со скоростью 100 м/с менее 4 процентов.

6.2 Плоское обтекание гладких профилей

Рассмотрим двумерную задачу об обтекании плоской фигуры (профиля), ограниченной гладким замкнутым контуром L . Будем считать, что профиль занимает односвязную область Ω^- , которая является внутренней по отношению к своей границе – кривой L .

Такая задача является идеализацией задачи трехмерного обтекания длинного цилиндрического тела потоком жидкости, направленным поперек цилиндра, при которой цилиндр считается бесконечным. При этом предполагается, что в каждом сечении цилиндра плоскостью, проведенной поперек цилиндра, реализуется плоское течение, в котором вектор скорости параллелен плоскости и поле скоростей на плоскости не меняется при сдвиге плоскости вдоль оси цилиндра. Рассматриваемая плоская фигура есть профиль в перпендикулярном сечении цилиндра. Решается краевая задача (6.7) для возмущенного поля скоростей с граничным условием (6.8) (правая часть определяется формулой (6.9)) и условием (6.10) на бесконечности (см. рисунок 6.1, на рисунке показано полное поле скоростей \vec{W}).

Заметим, что для любой односвязной подобласти Ω_0 области Ω второе из уравнений (6.7) равносильно условию потенциальности поля \vec{w} . Однако, вся рассматриваемая нами область не является односвязной. Любой замкнутый контур, целиком лежащий в области Ω и ограничивающий некоторую область Ω' плоскости, может принадлежать к одному из 2-х типов:

- 1) область Ω' целиком лежит в области Ω ;
- 2) область Ω' содержит внутри себя контур L вместе с областью

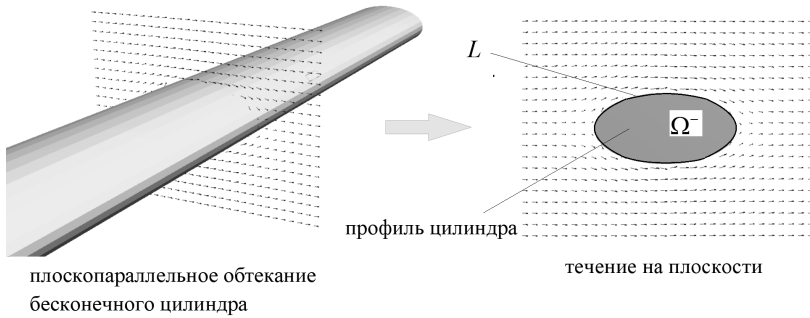


Рис. 6.1: Плоское обтекание гладкого профиля

Ω^- , занимаемой профилем.

Здесь существенно то, что обтекается один профиль. Если обтекается несколько профилей, таких типов контуров будет больше.

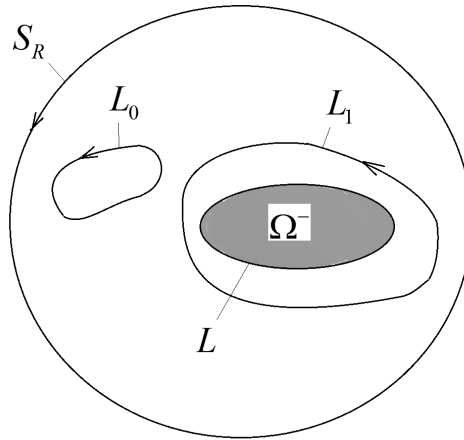


Рис. 6.2: К циркуляции поля скоростей

Пусть векторное поле \vec{w} есть решение уравнений (6.7). Если L_0 – контур первого из указанных типов, то для циркуляции векторного поля \vec{w} по контуру L_0 справедлива формула:

$$\int_{L_0} \vec{w} \vec{\tau} ds = 0,$$

6.2 Плоское обтекание гладких профилей

$\vec{\tau}$ – орт вектора касательной на контуре L_0 , это следует из формулы Грина (2.5).

Если контур L_1 – контур второго из указанных типов, то

$$\int_{L_1} \vec{w}\vec{\tau}ds = \Gamma, \quad (6.12)$$

где Γ некоторая константа, значение которой одно и то же для всех профилей такого типа. Для доказательства этого построим вспомогательный контур в виде окружности S_R с центром в начале координат, охватывающую контур L_1 и пусть Ω_R – область между этими контурами L_1 и S_R . Тогда

$$\int_{\partial\Omega_R} \vec{w}\vec{\tau}ds = 0.$$

Граница области Ω_R состоит из контуров L_1 и S_R , причем, при вычислении последнего интеграла обход контура L_1 осуществляется в направлении, противоположном тому, которое выбирается при вычислении интеграла (6.12). Поэтому

$$\int_{L_1} \vec{w}\vec{\tau}ds = \int_{S_R} \vec{w}\vec{\tau}ds.$$

Теперь, если L_1 и L_2 есть два произвольных контура второго типа, то построив окружность S_R , охватывающую оба контура, заключаем, что

$$\int_{L_1} \vec{w}\vec{\tau}ds = \int_{L_2} \vec{w}\vec{\tau}ds.$$

Пусть константа Γ задана. Ниже мы покажем, что рассматриваемая задача для поля скоростей имеет и при том единственное решение при дополнительном условии (6.12), где L_1 – контур, охватывающий профиль.

Случай потенциального обтекания. Сначала пусть в условии (6.12) $\Gamma = 0$. Тогда если поле \vec{w} – решение рассматриваемой задачи, удовлетворяющее условию (6.12), то циркуляция этого поля по любому замкнутому контуру, лежащему в области Ω , равна 0. Значит это поле потенциально.

Ищем решение задачи в виде

$$\vec{w} = \text{grad } u. \quad (6.13)$$

При этом второе уравнение системы (6.7) выполнено автоматически.

Из первого уравнения системы (6.7) и граничного условия (6.8) получаем краевую задачу Неймана для уравнения Лапласа относительно потенциала u

$$\Delta u = 0 \text{ в области } \Omega, \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \text{ на контуре } L. \quad (6.15)$$

Для обеспечения условия на бесконечности (6.10) потребуем выполнения условия

$$u(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (6.16)$$

Заметим, что при выполнении условия (6.16) автоматически следуют условия (см. оценки (2.35)):

$$|u(x)| \leq O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |\vec{w}(x)| \leq O\left(\frac{1}{|x|^2}\right). \quad (6.17)$$

Таким образом, отыскание потенциального поля скоростей свелось к решению внешней краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа. Краевые задачи для уравнения Лапласа в трехмерном случае была рассмотрена нами в разделе 5.1. У нас возникла аналогичная задача на плоскости. Сведем эту задачу к граничному интегральному уравнению и исследуем вопрос о ее разрешимости.

Здесь сразу заметим, что теорема 5.1 о единственности решений краевых задач для уравнения Лапласа для плоского случая справедлива. В частности, здесь по нам понадобятся свойства единственности решений внешней задачи Неймана и внутренней задачи Дирихле.

А вот в вопросе о существовании решения рассматриваемой нами внешней краевой задачи Неймана сразу обратим внимание на отличие по сравнению с пространственным случаем. Необходимым условием существования решения является условие

$$\int_L f ds = 0 \quad (6.18)$$

(для правой части (6.9) это условие выполнено, что следует из формулы Остроградского-Гаусса).

Откуда возникает это условие? Предположим, что функция u есть решение поставленной задачи. Проведем окружность S_R радиуса R с центром в начале координат так, что контур L целиком лежит внутри окружности. Пусть Ω_R – область между контурами L и S_R . Применяя в этой области вторую формулу Грина (2.8) для оператора Лапласа к рассматриваемой функции u и функции $v \equiv 1$, получаем:

$$\int_{\partial\Omega_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

6.2 Плоское обтекание гладких профилей

Но множество $\partial\Omega_R$ – граница области Ω_R , состоит из двух контуров L и S_R . При этом

$$\int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty \quad (6.19)$$

в силу оценки (6.17). Тогда для интеграла по контуру L имеем условие (6.18). Здесь отметим, что отличие от пространственного случая состоит в том, что длина контура S_R есть величина порядка $O(R)$, а если в пространственном случае вместо контура взять сферу радиуса R , то ее площадь уже есть величина порядка $O(R^2)$ и условие (6.19) не выполнено.

Так же как и в пространственном случае, решение такой задачи ищем в виде потенциала простого слоя:

$$u(x) = V_\Sigma[\nu](x) = \int_L \nu(y)F(x-y)dy, \quad (6.20)$$

$$F(x-y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}.$$

Обратим внимание, что в плоском случае функция $F(x-y)$ не стремится к 0 при $|x-y| \rightarrow \infty$. Поэтому условие на бесконечности (6.16) не выполнено для произвольной функции ν . Пусть q – произвольная точка, лежащая во внутренней области, по отношению к контуру L . Тогда

$$\begin{aligned} u(x) &= F(x-q) \int_L \nu(y)dy + \int_L \nu(y) (F(x-y) - F(x-q)) dy \equiv \\ &\equiv u_1(x) + u_2(x). \end{aligned}$$

Легко показать, что $u_2(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому справедливо утверждение: потенциал простого слоя (6.20) удовлетворяет условию на бесконечности (6.16) тогда и только тогда, когда, выполнено условие

$$\int_L \nu(y)dy = 0. \quad (6.21)$$

Из свойств краевых значений нормальной производной потенциала простого слоя (см. формулу (3.23)), имеем уравнение.

$$-\frac{1}{2}\nu(x) + \int_L \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_x} dy = f(x), \quad x \in L. \quad (6.22)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial F(x-y)}{\partial n_x} = -\frac{(\vec{n}(x), x-y)}{2\pi |x-y|^2}$$

Т.к.

$$|(\vec{n}(x), x - y)| \leq O(|x - y|^2) \text{ при } |x - y| \rightarrow 0,$$

закключаем, что функция $\partial F(x - y)/\partial n_x$ есть ограниченная функция и уравнение (6.22) есть уравнение Фредгольма 2-го рода.

Докажем однозначную разрешимость такого уравнения. Для этого рассмотрим однородное уравнение (6.22).

Пусть ν есть решение такого уравнения. Это означает, что

$$\int_L \left(-\frac{1}{2}\nu(x) + \int_L \nu(y) \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_x} dy \right) dx = 0.$$

Но

$$\int_L \left(\int_L \nu(y) \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_x} dy \right) dx = \int_L \nu(y) \left(\int_L \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_x} dx \right) dy.$$

Внутренний интеграл есть потенциал двойного слоя с постоянной плотностью равной 1. В силу формул (3.14)

$$\int_L \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_x} dx = -\frac{1}{2}.$$

Но тогда

$$\int_L \left(-\frac{1}{2}\nu(x) + \int_L \nu(y) \frac{\partial F(x - y)}{\partial n_x} dy \right) dx = - \int_L \nu(x) dx \quad (6.23)$$

и для функции ν выполнено условие (6.21).

Построим потенциал простого слоя $u(x) = V_\Sigma[\nu](x)$, причем для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Этот потенциал удовлетворяет условию на бесконечности (6.16) и является решением задачи (6.14)-(6.15) с правой частью $f = 0$ в области Ω – внешней по отношению к контуру L . Поскольку решение такой задачи единственно, $u \equiv 0$ в области Ω .

Теперь рассмотрим потенциал u в области Ω^- , внутренней по отношению к контуру L . В силу непрерывности потенциала простого слоя (см. теорему 3.1) заключаем, что краевые значения потенциала u со стороны области Ω^- удовлетворяют равенству $u^- = u^+ = 0$ на контуре функция L . Тогда, в силу единственности решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа заключаем, что $u \equiv 0$ в области Ω^- . Значит:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^- \text{ на контуре } L.$$

В силу формулы (3.23), можем записать

$$\nu = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^- - \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+ = 0 \text{ на контуре } L.$$

Теперь по альтернативе Фредгольма заключаем, что уравнение (6.22) однозначно разрешимо в классе непрерывных функций для любой непрерывной правой части f . При этом из формулы (6.23) следует, что условие (6.18) одновременно является необходимым и достаточным условием, при котором решение уравнения (6.22) удовлетворяет условию (6.21). Таким образом, условие (6.18) есть необходимое и достаточное условие и для разрешимости рассматриваемой краевой задачи.

Случай циркуляционного обтекания. Теперь рассмотрим общий случай задачи для возмущенного поля скоростей: уравнения (6.7) с условиями (6.8)-(6.10) и с условием (6.12) на циркуляцию векторного поля, где Γ – заданная константа. Возьмем произвольную фиксированную точку q , лежащую в области Ω^- , внутренней по отношению к контуру L (т.е. внутри обтекаемого профиля). Решение задачи ищем в виде

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2, \quad (6.24)$$

$$\vec{w}_1 = \Gamma \vec{V}(x - q),$$

где $\vec{V}(x - q)$ – поле скоростей, индуцируемое точечным вихрем (см. формулу (3.27)), \vec{w}_2 – неизвестное векторное поле. При этом в силу свойств функции \vec{V} , определяемых формулами (3.29) и (3.32), для функции \vec{w}_2 возникает краевая задача, включающая уравнения (6.7) с условиями (6.10)-(6.9), где

$$f(x) = -\vec{w}_\infty(x)\vec{n}(x) - \Gamma \vec{V}(x - q)\vec{n}(x), \quad x \in L, \quad (6.25)$$

и условием с условием на циркуляцию (6.12) с $\Gamma = 0$. Из формул (3.30) следует, что функция f вида (6.24) удовлетворяет условию разрешимости (6.18). Поэтому векторное поле \vec{w}_2 является потенциальным и краевая задача для поля \vec{w}_2 имеет, и при том, единственное решение.

Таким образом, для любого значения константы Γ в условии (6.12), задача для поля вторичного поля \vec{w} однозначно разрешима. При этом ее решение представляется в виде (6.24), где функцию \vec{w}_2 можно искать в виде $\vec{w}_2 = \text{grad } u$, функция u есть потенциал простого слоя $u(x) = V_\Sigma[\nu](x)$, в котором плотность ν есть решение интегрального уравнения (6.22) с правой частью (6.25).

Приближенное решение задачи обтекания гладкого профиля сводится к решению интегрального уравнения (6.22), которое можно решать численно способами, рассмотренными нами в главе 4.

Однако, с практической точки зрения представляют интерес решение задачи с несколько иными условиями, чем условие (6.12) на циркуляцию векторного поля. Дело в том, что при реальном обтекании гладких профилей модель безвихревого обтекания идеальной жидкостью обычно не работает. При реальном плоско-параллельном обтекании гладких профилей в форме круга или эллипса (а также прямоугольного или треугольного сечения) обычно сзади от профиля образуется так называемый вихревой след – область, в которой течение является вихревым, т.е. завихренность не равна нулю.

Рассмотренная нами модель безвихревого обтекания в реальности работает для так называемых хорошо обтекаемых профилей, к которым относятся профили крыльев. Перейдем к рассмотрению задачи об обтекании профиля крыла.

6.3 Задача об обтекании профиля крыла

6.3.1 Постановка задачи. Условие Чаплыгина-Жуковского. Теория о потенциальном обтекании тел (плоском и трехмерном) начала развиваться в 19 веке. Теоретический анализ показал, что при потенциальном обтекании тел (профилей в плоском случае) потоком идеальной несжимаемой жидкости суммарная сила, действующая на тело равна 0. Этот факт известен как парадокс Д'Аламбера [27, глава 12, §73]. Парадокс здесь состоит в том, что при реальном обтекании реальных тел аэродинамическая сила на них действует. И именно нахождение этой силы является первоочередной задачей аэродинамики.

При анализе путей выхода из парадокса Д'Аламбера сразу выделились два основных направления. Одно из этих направлений связано с объяснением причин возникновения силы сопротивления, которая действует на тело в направлении набегающего потока. Здесь стало понятно, что сила сопротивления обусловлена как наличием трения между жидкостью и телом на его поверхности, так и наличием вихревых зон (вихревого следа), причем, величина этих сил не может быть определена в рамках рассмотренной нами модели безвихревого обтекания.

Второе направление связано с объяснением причин возникновения подъемной силы, которая направлена перпендикулярно скорости набегающего потока. Здесь был получен важный факт, что в рамках модели безвихревого обтекания профиля при условии на циркуляцию скорости (6.12) на профиль действует подъемная сила \vec{F} , величина которой определяется этой самой циркуляцией:

$$|\vec{F}| = \rho |\vec{w}_\infty| |\Gamma|, \quad (6.26)$$

направление этой силы определяется правилом: сила направлена в сторону вектора, получаемого поворотом вектора скорости на 90 градусов против часовой стрелки, если циркуляция при обходе контура в

6.3 Задача об обтекании профиля крыла

положительном (как в формуле Грина) направлении циркуляция отрицательна. Этот факт получил название теоремы Жуковского [27, глава 7, §54] (в зарубежной литературе известна как теорема Кутта–Жуковского, получена Марином Кутта в 1902 году, а Н. Е. Жуковским – независимо в 1906 году [34, т.2, §105]).

Экспериментальный анализ обтекания различных тел показал, что безвихревой режим обтекания, рассмотренный в предыдущем разделе, может реализовываться при обтекании профилей крыльев. Типичный профиль крыла имеет закругленную переднюю кромку и заостренную заднюю кромку. Для нахождения величины циркуляции Γ в начале 20 века было сформулировано условие, которое известно как условие Чаплыгина–Жуковского [27, глава 7, §51] (в иностранной литературе аналогичное утверждение известно под названием условие Кутты), которое гласит, что реализуется такой режим течения, при котором скорость ограничена на задней острой кромке профиля. При этом оказалось, что в реальном течении величина силы сопротивления при реализации безвихревого режима обтекания, действительно существенно меньше, чем величина подъемной силы, парадокс Д’Аламбера здесь работает, если пренебречь силами вязкого трения.

Пусть точка B есть задняя кромка профиля. Тогда условие Чаплыгина–Жуковского запишем в виде:

$$\text{функция } \vec{w} \text{ ограничена в окрестности точки } B. \quad (6.27)$$

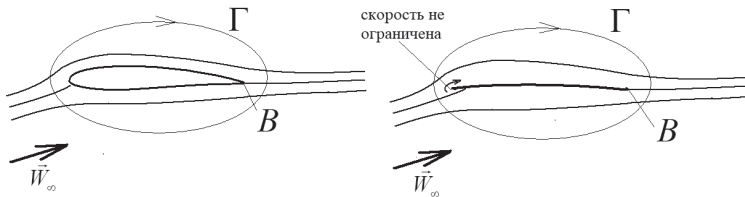


Рис. 6.3: Схема обтекания профиля крыла: телесного – слева, тонкого – справа

Таким образом, решается рассмотренная нами задача о нахождении полного поля скоростей вида

$$\vec{w}_{tot} = \vec{w}_{\infty} + \vec{w},$$

\vec{w}_{∞} – заданный вектор скорости набегающего потока, \vec{w} – неизвестное вторичное поле. Поле \vec{w} ищется вне профиля крыла, ограниченного замкнутым контуром L и должно удовлетворять уравнениям

(6.7), условию на бесконечности (6.10) и граничному условию на контуре L (6.8)-(6.9). При этом дополнительно должно быть выполнено условие (6.27) на задней кромке профиля.

В аэродинамике, наряду с обтеканием описанного телесного профиля, который ограничен замкнутым контуром, также, рассматривают обтекание тонкого профиля крыла, который аппроксимируется разомкнутой кривой. В этом случае требуется найти возмущенное поле скоростей жидкости $\vec{w} = \vec{w}(x)$, которое определено всюду вне этой кривой. Решается та же краевая задача, в которой граничное условие (6.10) теперь ставится на обеих сторонах контура, условие (6.26) на задней кромке, которая является концом кривой L .

В случае телесного профиля, ограниченного замкнутой кривой, по-прежнему ставится условие (6.18) на правую часть в граничном условии. В случае тонкого профиля такое ограничение на правую часть не накладываются.

Решение данной задачи ищется в классе векторных функций, удовлетворяющих условиям:

- во всех точках $x \in L^{in}$, являющихся точками гладкости кривой L , функция \vec{w} имеет краевые значения, причем, эти краевые значения непрерывны в каждой такой точке гладкости;

- если A - узел кривой L (конец или угловая точка), то в окрестности точки A выполнена оценка:

$$|\vec{w}(x)| \leq C/|x - A|^\alpha, \quad x \notin L, \quad (6.28)$$

где C и α - некоторые константы, причем, $0 \leq \alpha < 1$.

6.3.2 Сведение задачи к интегральному уравнению. Пусть контур L задан параметрически как $y = y_L(s)$, где $s \in [a, b]$ - естественный параметр, $A = y_L(a)$, $B = y_L(b)$, в случае замкнутого контура $A = B$.

Решение задачи можно искать в виде векторного поля, индуцируемого вихревым слоем:

$$\vec{w}(x) = \int_a^b \gamma(s) \vec{V}(x - y_L(s)) ds, \quad (6.29)$$

где функция γ должна быть непрерывной по Гельдеру в окрестности всех точек гладкости, не являющихся концами кривой L , и интегрируемой.

Тогда из граничного условия (6.10) возникает уравнение:

$$\int_a^b \gamma(s) \vec{V}(y_L(s_0) - y_L(s)) ds = f(y_L(s_0)), \quad (6.30)$$

которое должно выполняться в точках гладкости кривой L , исключая концы.

6.3 Задача об обтекании профиля крыла

Такое уравнение, как для замкнутого, так и для разомкнутого контура, рассмотрено в [26, глава 6, §6.2], [2, глава 10]. Решение этого уравнения не единственно. Единственное решение можно выделить, используя дополнительное условие

$$\int_a^b \gamma(s) ds = \Gamma, \quad (6.31)$$

где G – произвольная константа. Далее, с учетом формул (3.32), имеем:

$$\begin{aligned} \int_{L_\infty} \vec{w} d\vec{l} &= \int_{L_\infty} \left(\int_a^b \gamma(s) \vec{V}(x - y_L(s)) ds \right) d\vec{l}_x = \\ &= \int_a^b \gamma(s) \left(\int_{L_\infty} \vec{V}(x - y_L(s)) d\vec{l}_x \right) ds = \int_a^b \gamma(s) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (6.31) равносильно условию (6.12).

В случае, когда ставится условие (6.27), возникает условие ограниченности функции слоя γ в окрестности точки B . В действительности, если функция γ не стремится к бесконечности в окрестности угловых точек или концов, то она обращается в нуль. Это следует из свойств поведения интеграла Коши вблизи концов и углов контура интегрирования [30, глава 2, §22] с учетом связи градиента потенциала двойного слоя с интегралом Коши, описанной в п. 3.6.3 настоящей книги (см. формулу (6.2.47) из [26] и пояснения к ней).

Поэтому, условие Чаплыгина-Жуковского приводит к условию

$$\gamma(b) = 0. \quad (6.32)$$

Условие (6.32) также позволяет выделить единственное решение уравнения (6.30). При этом равенство (6.31) становится соотношением, которое позволяет найти циркуляцию Γ векторного поля \vec{w} и найти подъемную силу профиля по формуле (6.26).

В случае замкнутого контура условие (6.18) является, также, и условием разрешимости уравнения (6.30). Поэтому, здесь можно использовать метод регуляризации с применением регуляризирующей переменной ([26, §6.2 и §17.5]). В случае замкнутого контура будем решать уравнение

$$\int_a^b \gamma(s) \vec{V}(y_L(s_0) - y_L(s)) ds + \lambda = f(y_L(s_0)), \quad (6.33)$$

при условии (6.32) (или при условии (6.31, если не ставится условие Чаплыгина-Жуковского) относительно пары неизвестных: функции $\gamma(s)$ и константы λ . Так же как и для уравнений Фредгольма второго рода в разделе 4.3, здесь мы имеем уравнение, разрешимое при любой правой части f .

6.3.3 Численный метод дискретных вихрей. Для численного решения уравнения (6.30) ((6.33) в случае замкнутого контура L) применим метод коллокации в сочетании с простейшей формулой прямоугольников. При этом будем использовать две системы сеток.

В случае разомкнутого контура построим две системы узлов следующим образом. Пусть

$$s_{0i} = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad s_j = (j - 0.5)h, \quad j = 1, \dots, n, \quad h = (b - a)/n, \quad (6.34)$$

n – параметр, определяющий шаг разбиения. Точки s_{0i} как и точки s_j образуют равномерную сетку с постоянным шагом h и при этом перемежаются так, что каждая точка s_j находится ровно посередине между точками s_{0j-1} и s_{0j} .

Далее для всех $i = 0, 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$ построим на контуре L точки

$$x_i = y_L(s_{0i}), \quad y_j = y_L(s_j). \quad (6.35)$$

Точки x_i будем использовать как точки коллокации, y_j как узлы квадратурной формулы.

Пусть γ_i есть приближенное значение функции γ в точке y_i . Поле скоростей вида (6.29) аппроксимируем дискретной суммой

$$\vec{w}(x) \approx \sum_{j=1}^n \gamma_j \vec{V}(x - y_j)h. \quad (6.36)$$

Записывая граничное условие для функции \vec{w} вида (6.36) в точках коллокации (кроме крайних), получим систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j \vec{V}(x_i - y_j)h = f_i, \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad (6.37)$$

которая аппроксимирует уравнение (6.30).

В случае, когда ищется решение, удовлетворяющее условию (6.32), дополнительно записываем уравнение

$$\gamma_n = 0. \quad (6.38)$$

Если уравнение (6.30) решается при условии (6.31), вместо уравнения (6.38) дописываем уравнение

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j h = \Gamma. \quad (6.39)$$

В случае замкнутого контура две системы узлов построим следующим образом. Пусть

$$s_{0i} = (i - 1/2)h, \quad i = 1, \dots, n, \quad s_j = jh, \quad j = 1, \dots, n, \quad h = (b - a)/n, \quad (6.40)$$

Далее для всех $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, n$ строим точки x_i и y_j по формулам (6.35).

Неизвестное поле скоростей опять ищем в виде (6.36). Опять пусть γ_j есть приближенное значение функции γ в точке y_j , $j = 1, \dots, n$. Аппроксимируя уравнение (6.33) записываем систему дискретных уравнений

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j \vec{V}(x_i - y_j) h + \lambda = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.41)$$

где неизвестными являются числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda$.

При отыскании решения, удовлетворяющего условию (6.32) дополняем систему (6.41) уравнением (6.38).

Если уравнение (6.33) решается при условии (6.31), вместо уравнения (6.38) дописываем уравнение (6.39).

Заметим, что мы использовали естественную параметризацию контура. При практическом решении задачи можно использовать формулы (6.34), (6.35) и (6.40) для построения сетки, и в случае, когда $y = y_L(s)$ произвольная гладкая параметризация (т.е. когда в этих формулах s – не обязательно естественный параметр).

Описанный метод обтекает, известный как метод дискретных вихрей, был создан для расчета профилей крыльев С.М.Белоперковским (см. [3]), а его математическое обоснование получено в работах И.К.Лифанова (см. [2], [26]).

6.4 Обтекание тел в трехмерном случае

В трехмерном случае типичной является ситуация, когда область Ω вне обтекаемого тела является односвязной, хотя случаи многосвязных областей здесь то же возможны, например, когда тело имеет форму тора.

Пусть тело ограничено замкнутой поверхностью Σ и область Ω вне этой поверхности является односвязной. Рассматриваем задачу о безвихревом обтекании тела, сформулированную в п. 6.1. Условие $rot \vec{w} = 0$ равносильно условию потенциальности поля скоростей \vec{w} .

Итак, ищется полное поле скоростей

$$\vec{w}_{tot}(x) = \vec{w}_\infty + \vec{w}(x),$$

где поле $\vec{w}(x)$ – неизвестное возмущенное (вторичное) поле скоростей. Для вторичного поля скоростей $\vec{w}(x)$ решается краевая задача, включающая уравнения (6.7), условие на бесконечности (6.10) и граничное условие (6.8)-(6.9).

Вторичное поле скоростей ищем в виде $\vec{w} = grad u$. Так же, как и в плоском случае получаем краевую задачу Неймана для функции u :

$$\Delta u = 0 \text{ в области } \Omega, \quad (6.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \text{ на поверхности } \Sigma, \quad (6.43)$$

Потенциал ищется при условии на бесконечности

$$u(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (6.44)$$

Такая задача была рассмотрена в разделе 5.1, а методы ее численного решения были рассмотрены в разделе 5.2.

Возможна также задача о потенциальном обтекании тонкого экрана — разомкнутой поверхности с краем Σ . Пусть Ω — область вне экрана, причем рассматриваем случай, когда область односвязна. Задача опять сводится к решению задачи Неймана (6.42)–(6.44), в которой граничное условие (6.43) должно выполняться на обеих сторонах поверхности. Такая задача была рассмотрена в разделе 5.5. При этом ставятся так же условия на поведение потенциала u у края поверхности, сформулированные в разделе 5.5.

Однако, здесь, так же, как и в плоском случае, возникает вопрос о реализуемости таких течений в реальности. Как правило, обтекание трехмерных тел возникает с образованием вихревых зон. Примером тела, для которого применима гипотеза о потенциальности течения, является крыло конечного размаха. Но здесь есть некоторая специфика. Эту задачу рассмотрим в следующем разделе.

6.5 Задача об обтекании крыла конечного размаха

6.5.1 Постановка задачи. Типичное крыло имеет форму телесного объекта малой толщины с закругленной передней и заостренной задней кромкой.

Крыло относится к так называемым хорошо обтекаемым телам. При обтекании таких тел поток плавно огибает поверхность тела, и течение вне тела является потенциальным. Однако, даже в случае "гладкого" (безотрывного) обтекания трехмерного крыла, образуется так называемый вихревой след — область, в которой течение не является потенциальным. Термин безотрывное обтекание в прикладной аэродинамике относится к обтеканию передней кромки крыла. В случае "безотрывного" обтекания передней кромки этот вихревой след имеет форму поверхности малой толщины, расположенной сзади от крыла. В предлагаемой ниже модели вихревой след аппроксимируется тонкой поверхностью заданной формы, на которой поле скоростей может иметь разрыв касательной компоненты. Такая модель применима при моделировании обтекания крыла при малых значениях угла атаки, т.е. угла между вектором скорости набегающего потока и базовой плоскостью крыла.

Пусть Σ есть поверхность крыла. В аэродинамике рассматривают задачу об обтекании телесного крыла, когда рассматривается крыло

реальной формы как тело, ограниченное замкнутой поверхностью, а также задачу об обтекании тонкого крыла – идеализированный случай, когда крыло аппроксимируется тонкой разомкнутой поверхностью. Будем считать, что в случае телесного крыла Σ есть замкнутая простая кусочно-гладкая поверхность, в случае тонкого крыла – гладкая поверхность с краем $\partial\Sigma$, причем, край $\partial\Sigma$ есть замкнутая кусочно-гладкая кривая.

Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, в которой плоскость Ox_1x_2 есть вертикальная плоскость симметрии крыла, ось Ox_1 направлена от передней кромки к задней, ось Ox_2 направлена вверх, ось Ox_3 направлена вбок так, что образуется правая система координат (см. рисунок 6.4). Пусть также \vec{e}_i есть орт оси Ox_i , $i = 1, \dots, 3$.

На задней кромке крыла задается так называемая линия отрыва потока L и предполагается, что на этой линии образуется вихревой след, который моделируется поверхностью Σ_1 . При этом поверхность Σ_1 есть объединение всевозможных лучей вида $[MN)$, где $M \in L$, $\overrightarrow{MN} = \vec{e}_1$ и $\Sigma_1 \cap \Sigma = L$. С геометрической точки зрения последнее условие означает, что каждый такой луч $[MN)$ не пересекает поверхность крыла при своем продолжении из точки M . Такая идеализация основана на предположении, что вихревой след образован жидкими частицами, которые сходят с задней кромки крыла и движутся вместе со скоростью жидкости. И при этом при построении поверхности вихревого следа вводится приближение, по которому скорость жидкости направлена вдоль оси Ox_1 .

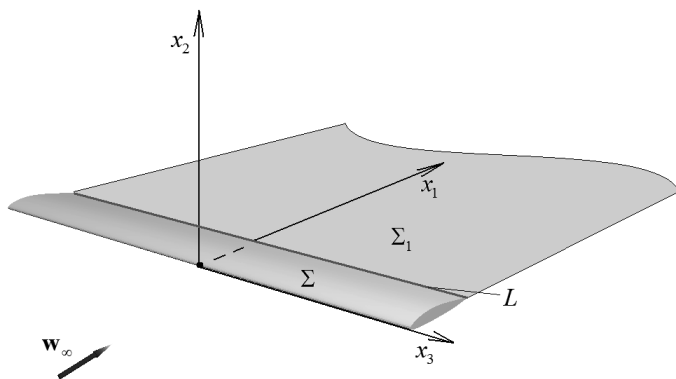


Рис. 6.4: Схема крыла

Обозначим Ω – область пространства вне поверхностей Σ и Σ_1 . Пусть $\vec{n} = \vec{n}(x)$ – орт вектора нормали к поверхностям Σ и Σ_1 , где x – точка гладкости поверхности крыла Σ или поверхности Σ_1 . В случае телесного крыла будем считать, что $\vec{n}(x)$, где $x \in \Sigma$, есть

вектор внешней нормали. При $x \in \Sigma'$ и при $x \in \Sigma$ в случае тонкого крыла полагаем, что вектор нормали направлен вверх, т.е. $\vec{n}e_2 \geq 0$.

В основе физической постановки задачи лежат предположения о том, что (см. [6, с.233-234], [34, т. 2, §120])

- задан вектор \vec{w}_∞ скорости набегающего потока;
- поверхность тела является непроницаемой для жидкости;
- всюду вне вихревого следа, который аппроксимируется заданной поверхностью Σ_1 , течение является потенциальным;
- вихревой след представляет собой поверхность Σ_1 разрыва поля скоростей, на которой нормальная компонента скорости w_2 , а также компонента скорости w_1 является непрерывной (скачек терпит только компонента w_3);
- на линии отрыва сверху и снизу от поверхности Σ_1 скорость жидкости непрерывна (это условие может не выполняться на концах линии отрыва).

В линейной теории крыла предполагается, что

$$\vec{w}_\infty = W_\infty(\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta),$$

где W_∞ – модуль вектора скорости набегающего потока, α – угол атаки, β – угол скольжения, причем, рассматривается случай, когда углы α и β малы.

Математически сделанные предположения позволяют сформулировать следующую краевую задачу для неизвестного поля скоростей жидкости \vec{w} . Необходимо найти полное поле скоростей $\vec{W} \equiv \vec{w}_{tot}$ в области Ω , которое представляется в виде

$$\vec{w}_{tot} = \vec{w}_\infty + \vec{w}, \quad (6.45)$$

\vec{w} есть неизвестное возмущенное поле скоростей, являющееся непрерывно-дифференцируемой векторной функцией в этой области и удовлетворяющее в области Ω уравнениям:

$$\text{div} \vec{w} = 0, \text{rot} \vec{w} = 0, \quad (6.46)$$

и условию на бесконечности:

$$\vec{w}(x) \rightarrow 0 \text{ при } \rho(x, \partial\Omega) \rightarrow \infty, \quad (6.47)$$

где $\rho(x, \partial\Omega)$ – расстояние от точки x до множества $\partial\Omega$.

Предполагается, что в каждой точке гладкости поверхностей Σ и Σ_1 , не лежащей на краю этих поверхностей, поле \vec{w} имеет краевые значения:

- на поверхности Σ в случае телесного крыла со стороны области Ω ;
- на поверхности Σ_1 и на поверхности Σ в случае тонкого крыла на обеих сторонах поверхности.

6.5 Задача об обтекании крыла конечного размаха

При этом на поверхности крыла Σ должно выполняться условие непротекания (в случае тонкого крыла на обеих сторонах поверхности Σ):

$$\vec{w}_{tot}\vec{n} = 0, \quad (6.48)$$

на поверхности Σ_1 ставятся условия

$$w_2^+ = w_2^-, \quad w_1^+ = w_1^-. \quad (6.49)$$

Также предполагается, что для каждой точки $x_0 \in L$, не являющейся ее концом, и для каждой достаточно малой окрестности этой точки $U(x_0)$, которая при пересечении с областью Ω распадается на две области $U^1(x_0)$ и $U^2(x_0)$ (верхнюю и нижнюю по отношению к поверхностям крыла и вихревого следа), поле \vec{w} имеет пределы в точке x_0 при $x \rightarrow x_0$ по каждой из этих областей (см. рисунок 6.5).

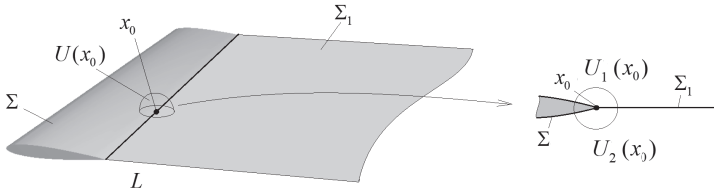


Рис. 6.5: Окрестность точки, лежащей на линии отрыва

Возмущенное поле скоростей \vec{w} будем искать в виде

$$\vec{w} = \text{grad } u. \quad (6.50)$$

При этом потенциал u должен являться решением следующей краевой задачи:

$$\Delta u = 0 \text{ в области } \Omega, \quad (6.51)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \text{ на поверхности } \Sigma, \quad (6.52)$$

где $f = -\vec{w}_\infty \vec{n}$.

На поверхности Σ_1 из условий (6.49) возникают условия:

$$\frac{\partial(u^+ - u^-)}{\partial x_1} = \frac{\partial(u^+ - u^-)}{\partial x_2} = 0 \quad (6.53)$$

В каждой точке x_0 на линии отрыва L (не являющейся ее концом) ставятся условия непрерывности потенциала сверху и снизу от крыла, которые можно записать в виде

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x \in \Sigma}} (u_1) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x \in \Sigma_1}} (u^+),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x \in \Sigma}} (u_2) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x \in \Sigma_1}} (u^-), \quad (6.54)$$

где (см. рисунок 6.6):

- в случае телесного крыла $u_1 = u_{\text{в}}^+$, $u_2 = u_{\text{н}}^+$ - крайевые значения потенциала на верхней $\Sigma_{\text{в}}$ и нижней $\Sigma_{\text{н}}$ поверхностях,
- в случае тонкого крыла $u_1 = u^+$, $u_2 = u^-$ - крайевые значения потенциала на поверхностях Σ и Σ_1 .

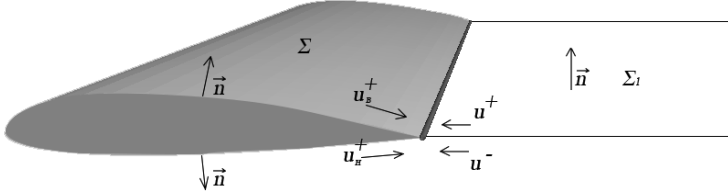


Рис. 6.6: Поведение потенциала в окрестности задней кромки

Кроме того, ставится условие ограниченности потенциала на бесконечности и $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ вдоль вектора $-\vec{e}_1$. Заметим, что здесь потенциал не может стремиться к нулю вообще на бесконечности, т.к. в силу условия (6.53) при $x \rightarrow \infty$ вдоль вектора $+\vec{e}_1$ разность $u^+ - u^-$ является константой и, при ненулевом решении задачи, не будет стремиться к 0. Однако, поставленного условия достаточно для выделения единственного потенциала, и можно доказать, что при этом $u \rightarrow 0$ при удалении на бесконечность вдоль любого вектора, не параллельного $+\vec{e}_1$.

6.5.2 Сведение задачи к интегральному уравнению. Поставленная задача может быть решена методом граничных интегральных уравнений с применением теории потенциала. Неизвестный потенциал u - решение задачи (6.51)-(6.54) ищем в виде

$$u(x) = U_{\Sigma}[g](x) + U_{\Sigma_1}[g_1](x), \quad (6.55)$$

где $U_{\Sigma}[g]$ - потенциал двойного слоя с плотностью g , размещенный на поверхности Σ :

$$U_{\Sigma}[g](x) = \int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy, \quad F(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}. \quad (6.56)$$

При этом уравнение Лапласа (6.51) выполнено автоматически, а из условий (6.52) и (6.53) возникают интегральное уравнение и

условие:

$$\int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy + \int_{\Sigma_1} g_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy = f(x), \quad x \in \Sigma, \quad (6.57)$$

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} = 0, \quad (6.58)$$

где в уравнении (6.57) первый из интегралов следует понимать в смысле конечного значения по Адамару (см. [26, §7.1]).

Поскольку поверхность Σ_1 есть объединение всевозможных лучей вида $[MN)$, условие (6.58) означает, что функция g_1 постоянна вдоль любого такого луча $[MN)$ и определяется своими значениями на линии отрыва.

В случае телесного крыла потенциал двойного слоя вида (6.55) определен и в области, внутренней по отношению к поверхности крыла Σ . Для краевых значений потенциала u во всех точках выполнено соотношение $u^+ - u^- = g$ на Σ , $u^+ - u^- = g_1$ на Σ_1 . В силу условий (6.54) для каждой точки $x_0 \in L$ (не являющейся концом этой кривой) и для каждой достаточно малой окрестности этой точки $U(x_0)$, которая при пересечении с областью Ω распадается на две области $U_1(x_0)$ и $U_2(x_0)$ (верхнюю и нижнюю по отношению к поверхностям крыла и вихревого следа), потенциал u имеет пределы в точке x_0 при $x \rightarrow x_0$ по каждой из этих областей. Тогда на линии отрыва справедливы соотношения:

$$g_1(x) = g(x), \quad x \in L \quad (6.59)$$

в случае плоского крыла;

$$g_1(x) = g^+(x) - g^-(x), \quad x \in L \quad (6.60)$$

в случае телесного крыла, где $g^+(x)$ – предельное значение функции g в точке $x \in L$ на верхней поверхности крыла, $g^-(x)$ – на нижней поверхности.

Кроме того, в случае телесного крыла, плотность потенциала двойного слоя g определена с точностью до постоянного слагаемого. Это следует из того, что если функция g_0 равна константе на поверхности крыла Σ , то соответствующий потенциал двойного слоя $u_0 = U_{\Sigma}[g_0]$ равен константе в каждой из областей, на которые поверхность Σ делит пространство (см. формулы (3.14)). Тогда этот потенциал удовлетворяет условию $grad u_0 = 0$ всюду вне поверхности Σ . Значит, добавление константы к плотности потенциала двойного слоя g на поверхности Σ не меняет поле скоростей.

Для выделения единственного решения в случае замкнутой поверхности Σ можно использовать условие

$$\int_{\Sigma} g(x) dx = G, \quad (6.61)$$

где G – произвольная константа.

В случае замкнутой поверхности крыла Σ есть необходимое условие разрешимости на правую часть:

$$\int_{\Sigma} f(x) dx = 0. \quad (6.62)$$

Поясним, откуда следует это условие. Пусть функция u имеет вид (6.55) и пусть $\vec{w} = \text{grad } u$. Сначала заметим, что поле скоростей \vec{w} представляется в виде (см. формулу (3.90))

$$\begin{aligned} \vec{w}(x) = & - \int_{\tilde{L}} \nu(y) \text{grad}_x F(x-y) \times \vec{\tau}(y) dy + \\ & + \int_{\Sigma \cup \Sigma_1} \text{grad}_x F(x-y) \times [\vec{n}(y) \times \text{Grad } g(y)] dy, \end{aligned} \quad (6.63)$$

где \tilde{L} – объединение двух лучей, являющихся боковыми границами поверхности Σ_1 , мы обозначили $g(x) = g_1(x)$ на Σ_1 . Здесь заметим, что формула (3.90) была доказана для ограниченных поверхностей, а поверхность Σ_1 – не ограничена. Однако мы можем вместо бесконечной поверхности Σ_1 рассмотреть часть этой поверхности $\Sigma_1(H)$, образованную лучами заданной длины H , начинающимися на линии отрыва. Для любой точки x поле $\vec{w}_1(x) = \text{grad } U_{\Sigma_1}[g](x)$ есть предел градиента потенциала двойного слоя, размещенного на поверхности $\Sigma_1(H)$ при $H \rightarrow \infty$. Но на поверхности $\Sigma_1(H)$ формула (3.90) верна. Значит, она верна и на всей поверхности Σ_1 .

Далее, применяя формулу (3.90) к поверхности Σ_1 и ко всем компонентам гладкости поверхности Σ и учитывая, что контурные интегралы по краям этих компонент взаимно сокращаются (кроме интегралов по боковым краям поверхности Σ_1), получаем формулу (6.63). Заметим, что интегралы по кривой L сокращаются в силу условия (6.60).

Далее предположим, что существует система замкнутых поверхностей Σ_ε , содержащих внутри себя поверхность Σ , и переходящих в поверхность Σ при $\varepsilon \rightarrow 0$ так, что

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Для любой точки $y \in \Sigma \cup \Sigma_1$ такой, что $y \notin \Sigma_\varepsilon$, и для любого вектора \vec{a} , выполнено условие

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} \vec{n}(x) [\text{grad}_x F(x-y) \times \vec{a}] d\sigma = \int_{\Sigma_\varepsilon} \vec{n}(x) \text{rot}_x [F(x-y)\vec{a}] d\sigma = 0,$$

в силу формулы Стокса (2.4). Но тогда, записав равенство

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_{\Sigma_\varepsilon} \vec{w}(x) \vec{n}(x) d\sigma,$$

g подставив в него поле $\vec{w}(x)$ в виде (6.63) и меняя порядок интегрирования в возникших повторных интегралах, получаем, что

$$\int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Значит

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

т.е. условие (6.62) является необходимым, если мы используем рассматриваемое интегральное представление.

Проведенное рассуждение было нестрогим. Строгое рассуждение требует анализа поведения поля скоростей $\vec{w}(x)$ в окрестности ребер и краев поверхностей, а также в окрестности углов крыла, и соответственно анализа поведения плотностей $g(x)$ и $g_1(x)$ в этих же окрестностях. Эти вопросы, в свою очередь, упираются в вопрос построения строгой теории разрешимости для записанных граничных интегральных уравнений. Такой теории, включающей доказательство существования и единственности решения в определенном классе функций, в настоящее время нет.

В случае телесного крыла для получения устойчивого уравнения будем использовать метод регуляризирующей переменной, который мы применяли для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Вместо уравнения (6.57) запишем уравнение

$$\int_{\Sigma} g(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy + \int_{\Sigma_1} g_1(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy + \lambda = f(x), \quad x \in \Sigma, \tag{6.64}$$

где λ – неизвестная регуляризирующая переменная. Остальные уравнения системы (6.57)-(6.61) остаются без изменений.

6.5.3 Численная схема решения задачи методом вихревых рамок. Уравнения (6.57)-(6.61) относительно неизвестных плотностей потенциала двойного слоя g и g_1 можно решить численно методом вихревых рамок. Опишем схему этого метода, следуя работе [33] (см., так же [26, §23.4]).

Поверхность Σ аппроксимируется ячейками σ_i , $i = 1, \dots, n$, имеющими четырехугольную форму. Пусть S_j – площадь ячейки σ_j . В центре каждой ячейки σ_i , под которым понимается пресечение

отрезков, соединяющих середины противоположных сторон ячейки, размещаем точку коллокации x^i и строим вектор нормали к ячейке $\vec{n}_i = \vec{n}(x^i)$. (Приближенно считается, что \vec{n}_i – перпендикуляр к указанным отрезкам, а площадь s_i приближенно считается как площадь параллелограмма, для которого эти отрезки есть середины сторон). Может возникнуть необходимость использовать в некоторых местах треугольные ячейки. Такие ячейки следует рассматривать как вырожденный случай четырехугольных при совпадении двух угловых точек, и контрольную точку следует помещать в середину медианы, опущенной из сдвоенной точки.

Линия отрыва предполагается состоящей из отрезков $[z^{i-}, z^{i+}]$, $i = 1, \dots, m$, где z^{i-} – начало отрезка с номером i , z^{i+} – конец этого отрезка. При этом начало следующего отрезка является концом предыдущего: $z^{i+1-} = z^{i+}$, и предполагается, что отрезок $[z^{i-}, z^{i+}]$ является в случае телесного крыла стороной одной из рамок на верхней поверхности $j_{sep}^+(i)$ и стороной одной из рамок на нижней поверхности $j_{sep}^-(i)$, а в случае тонкого крыла – стороной ячейки $j_{sep}(i)$.

Построим разбиение поверхности Σ_1 на полубесконечные ячейки, которые затем аппроксимируем конечными ячейками большой длины $\sigma_j^1 \equiv \sigma_{n+j}$, $j = 1, \dots, m$, так, что σ_j^1 есть четырехугольник с вершинами

$$z^{i-}, z^{i+}, q^{i+}, q^{i-}, \text{ где } q^{i+} = z^{i+} + D\vec{e}_1, q^{i-} = z^{i-} + D\vec{e}_1,$$

где D – некоторое большое число, \vec{e}_1 – орт оси Ox_1 .

Приближенное распределение плотности потенциала двойного слоя ищем в виде кусочно-постоянной функции, принимающей постоянное значение g_i , $i = 1, \dots, n + m$, на ячейке разбиения σ_i .

Будем искать приближенное решение в виде:

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^{n+m} g_j U_{\sigma_j}[e], \quad (6.65)$$

где, как и в формуле (5.72), $U_{\sigma_j}[e]$ – потенциал двойного слоя с плотностью $e(x) \equiv 1$, размещенного на ячейке σ_j . При этом градиент потенциала двойного слоя \tilde{u} запишется в виде

$$\text{grad } \tilde{u} = \sum_{j=1}^{n+m} g_j \vec{W}_{\sigma_j}, \text{ где } \vec{W}_{\sigma_j} = \text{grad } U_{\sigma_j}[e], \quad (6.66)$$

для векторного поля \vec{W}_{σ_j} используем выражение (5.74).

Полная скорость жидкости в каждой точке $x \in \Omega$ аппроксимируется выражением

$$\vec{W}(x) = \vec{w}_\infty + \sum_{j=1}^{N+m} g_j \vec{W}_{\sigma_j}(x). \quad (6.67)$$

6.5 Задача об обтекании крыла конечного размаха

Неизвестные g_j в случае задачи об обтекании тонкого крыла, ищутся из системы линейных уравнений, которые аппроксимируют уравнение (6.57), записанное в точках коллокации x^i , $i = 1, \dots, n$, и соотношение (6.59):

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} g_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.68)$$

$$g_{n+i} = s(i) g_{j_{sep}(i)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.69)$$

$$a_{ij} = \vec{W}_{\sigma_j}(x^i) \vec{n}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n+m, \quad f_i = -\vec{w}_{\infty} \vec{n}_i, \quad (6.70)$$

$s(i)$ – коэффициенты, указывающие на согласование ориентаций ячеек: $s(i) = 1$ при $\vec{n}_i \vec{n}_j \geq 0$, $s(i) = -1$ при $\vec{n}_i \vec{n}_j < 0$, $j = j_{sep}(i)$ (см. рисунок 6.7).

В случае телесного крыла, поскольку неизвестные g_j на поверхности Σ определены с точностью до постоянного слагаемого, и поскольку есть условие разрешимости (6.62), вместо уравнения (6.57) решается уравнение (6.64) и используется условие (6.60):

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} g_j + g_{n+m+1} = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.71)$$

$$\sum_{j=1}^n g_j s_j = 0, \quad (6.72)$$

$$g_{n+i} = s^+(i) g_{j_{sep}^+(i)} + s^-(i) g_{j_{sep}^-(i)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.73)$$

коэффициенты и правые части уравнений (6.71) определяются формулами (6.70),

$$s^+(i) = 1 \text{ при } \vec{n}_i \vec{n}_j \geq 0, \quad s^+(i) = -1 \text{ при } \vec{n}_i \vec{n}_j < 0, \quad j = j_{sep}^+(i),$$

$$s^-(i) = 1 \text{ при } \vec{n}_i \vec{n}_j \geq 0, \quad s^-(i) = -1 \text{ при } \vec{n}_i \vec{n}_j < 0, \quad j = j_{sep}^-(i)$$

(см. рисунок 6.8).

После решения системы линейных уравнений можно вычислить приближенно поле скоростей вне крыла и вихревого следа по формулам (6.67).

6.5.4 Расчет аэродинамических сил. Полную информацию о силах, действующих на крыло в рамках модели идеальной жидкости дает распределение по его поверхности коэффициента давления

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{q},$$

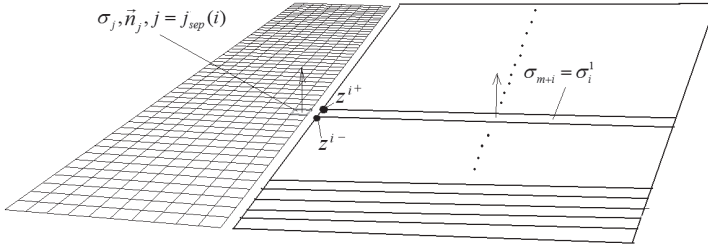


Рис. 6.7: Схема расположения ячеек на линии отрыва. Тонкое крыло

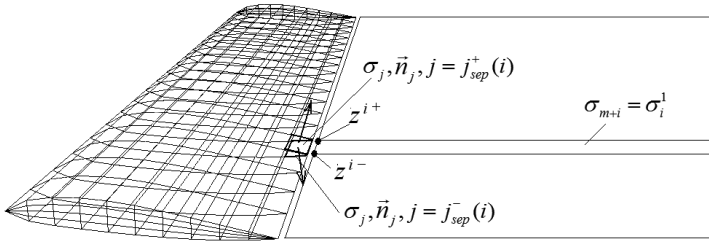


Рис. 6.8: Схема расположения ячеек на линии отрыва. Телесное крыло

где p – давление в рассматриваемой точке жидкости, p_∞ – давление невозмущенного потока на бесконечности, $q = \rho W_\infty^2 / 2$ – скоростной напор, ρ – плотность жидкости, $W_\infty = |\vec{w}_\infty|$.

Опишем коротко способ вычисления коэффициента давления на поверхности тела, следуя статье [12]

В случае телесного крыла, поле скоростей жидкости определяется выражениями (6.45), (6.50) и (6.55). Этими выражениями поле определено, также, и во внутренней области Ω^- , ограниченной поверхностью Σ . При этом внутри для краевых значений вектора скорости жидкости (полной!) справедливы соотношения, которые следуют из формул (3.94) - (3.95)

$$\vec{W} = \frac{\vec{W}^+ + \vec{W}^-}{2}, \quad (\vec{W}^+ - \vec{W}^-)\vec{n} = 0,$$

6.5 Задача об обтекании крыла конечного размаха

где \vec{W} – прямое значение вектора скорости, которое приближенно может быть вычислено в точках коллокации с использованием выражения (6.67). Для потенциала u в области Ω^- выполнено уравнение Лапласа, а на поверхности Σ выполнено условие (6.52). Тогда в области Ω^- для полного поля скоростей выполнены уравнения

$$\operatorname{div} \vec{W} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{W} = 0,$$

а на границе этой области выполнено условие:

$$\vec{W}^- \vec{n} = 0.$$

Но тогда справедливо равенство: $\vec{W} \equiv 0$ в области Ω^- , откуда имеем на поверхности Σ соотношение: $\vec{W}^+ = 2\vec{W}$. Поэтому для краевого значения коэффициента давления на внешней поверхности крыла справедливо выражение:

$$C_p = 1 - 4 \frac{\vec{W}^2}{W_\infty^2}.$$

В случае тонкого крыла, моделируемого разомкнутой поверхностью Σ , ищем краевые значения коэффициента давления, для которых справедливо выражение:

$$C_p^\pm = 1 - \frac{\vec{W}^{\pm 2}}{W_\infty^2},$$

соответственно, где для краевых значений вектора скорости справедливо выражение следующее выражение, вытекающее из формулы (3.94):

$$\vec{W}^\pm = \vec{W} \pm \frac{1}{2} \operatorname{Grad} g.$$

Способ приближенного нахождения величины $\operatorname{Grad} g$ описан, например, в статье [12].

Отметим, также, что вектор суммарной силы давления, действующей на тело, находится по формуле:

$$\vec{F} = - \int_{\Sigma} \vec{n}(x) p(x) d\sigma, \quad p(x) = C_p(x) q + p_\infty$$

в случае телесного крыла,

$$\vec{F} = \int_{\Sigma} \vec{n}(x) (p^-(x) - p^+(x)) d\sigma, \quad p^\pm(x) = C_p^\pm(x) q + p_\infty$$

в случае тонкого крыла, q – скоростной напор.

6.6 О вихревых методах

Нами было рассмотрено применение метода интегральных уравнений в задачах о безвихревом обтекании тел, которые сводятся к решению краевых задач с условием Неймана для уравнения Лапласа (или тесно связаны с такими задачами, как в случае циркуляционного обтекания профиля, раздел 6.2). Описанные численные методы известны как вихревые или панельные методы аэродинамики. Подробнее с такими методами можно ознакомиться в книгах [3], [26], [55].

В разделе 6.5 при рассмотрении задачи об обтекании крыла конечного размаха была использована математическая модель, в которой вихревой след за телом аппроксимировался тонкой поверхностью разрыва поля скоростей заданной формы – так называемым вихревым слоем или вихревой пеленой. При этом форма этой поверхности предполагалась заданной. Обобщением такого подхода является математическая модель, в которой вихревой след по-прежнему аппроксимируется тонкой поверхностью (вихревой пеленой), но эта поверхность предполагается подвижной и ее форма является неизвестной.

Такая модель может применяться для моделирования отрывного обтекания тел в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Задача решается в нестационарной постановке. Предполагается, что вихревой образуется на заданных линиях отрыва потока, и представляет собой вихревую пелену, точки которой движутся по скорости жидкости. При этом на каждом шаге интегрирования по времени возникает по сути рассмотренная нами краевая задача об определении поля скоростей вне тела и вихревой пелены, но при этом рассматривается еще и движение этой самой вихревой пелены. Такие модели достаточно успешно работают в задачах обтекания тел, в которых имеется явно выраженная линия отрыва потока, положение которой известно. Так обычно отрыв потока происходит на острых кромках несущих поверхностей и на ребрах тел. Описание такой модели в различных вариациях можно найти в книгах [3], [26], [55]. Отметим, что описание модели такого типа, наиболее близкое к стилю изложения настоящей книги, сформулировано в статьях [12], [48].

Вихревые методы, основанные на аппарате интегральных уравнений, могут применяться и для моделирования вихревых течений более общего вида. В основе здесь лежит интегральное представление для поля скоростей несжимаемой жидкости в виде (2.64) в безграничном течении и (2.75) в случае обтекания тел, причем, в данном случае в этих формулах $\rho \equiv 0$ в силу условия несжимаемости жидкости. Например, в отсутствие границ, поле скоростей ищется в интегральном виде

$$\vec{w}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\omega}(y, t) \vec{V}(x - y) dy,$$

где $\vec{\omega}(y, t)$ – неизвестное поле распределения завихренности. Так в задаче, когда в начальный момент времени поле завихренности задано, возможна следующая модель описания течения. В начальный момент данный интеграл замняется интегральной суммой, как суперпозиция поля скоростей, индуцируемых некоторыми вихревыми частицами. Далее моделируется движение вихревых частиц, исходя из законов гидродинамики, в силу которых эти частицы движутся вместе с жидкостью не меняя свои циркуляции (интенсивности). В результате течение жидкости аппроксимируется так называемой задачей N – тел: рассматривается движение ансамбля из N вихревых частиц, причем скорость каждой частицы есть суперпозиция скоростей, индуцируемых всеми частицами.

В случае задач обтекания тел такие модели так же развиваются в последнее время. При этом моделируется движение вихревых частиц, которые рождаются в каждый момент времени на поверхности обтекаемого тела и учитывается непротекание жидкости через поверхность тела путем введения дополнительной добавки к полю скоростей. Эта добавка, например, может индуцироваться дополнительными вихревыми элементами на поверхности тела, циркуляции которых ищутся из условия непротекания (как в линейной задаче об обтекании крыла, рассмотренной в разделе 6.5). Описание таких методов можно найти, например, в [50], [15], [56].

Глава 7

Приложение к задачам рассеяния скалярных волн

7.1 Уравнение для звуковых волн

Рассмотрим задачу о развитии малых колебаний в покоящейся жидкости [25, глава 8, §64].

Пусть идеальная сжимаемая жидкость (газ) находится в состоянии покоя, которое описывается постоянными давлением p_0 и плотностью ρ_0 . Под малыми колебаниями мы понимаем процесс движения жидкости, в котором скорость, давление и плотность имеют вид:

$$\vec{w} = \vec{w}', \quad p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho',$$

где \vec{w}' , p' и ρ' есть малые величины, являющиеся функциями от координат $x = (x_1, x_2, x_3)$ и времени t .

Движение сжимаемой жидкости описывается уравнениями неразрывности и Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{w}) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + (\vec{w} \nabla) \vec{w} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p. \end{aligned}$$

Под малостью величин \vec{w}' , p' и ρ' будем понимать условия

$$p' \ll p_0, \quad \rho' \ll \rho_0, \quad |(\vec{w} \nabla) \vec{w}| \ll \left| \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \right|.$$

Тогда, пренебрегая малыми величинами второго порядка, уравнения движения жидкости можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{w} = 0, \tag{7.1}$$

7.1 Уравнение для звуковых волн

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p'. \quad (7.2)$$

Будем искать потенциальные решения данной системы, т.е. решения, в которых поле скоростей жидкости представляется в виде

$$\vec{w} = \text{grad } \varphi. \quad (7.3)$$

Так же считаем, что течение происходит без притока или оттока энергии. Такие течения называются адиабатическими. В адиабатических течениях давление p есть определенная функция от давления ρ . Тогда

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \rho',$$

где производная $\partial p / \partial \rho$ соответствует адиабатическому процессу. Обозначим $c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0}}$

Тогда

$$p' = c^2 \rho' \quad (7.4)$$

Величина c называется скоростью звука. Смысл такого термина мы поясним далее.

Из уравнения (7.2) и равенства (7.4) имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} p' \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} c^2 \rho'. \quad (7.5)$$

Теперь из уравнения (7.1) имеем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi. \quad (7.6)$$

Уравнение (7.6) называется волновым уравнением.

Нас будут интересовать монохроматические решения волнового уравнения, под которыми понимаются решения вида:

$$\varphi = u(x) e^{-i\omega t}, \quad (7.7)$$

здесь ω – заданная действительная константа, называемая частотой (круговой частотой) колебаний. Для функции $u(x)$ из уравнения (7.6) имеем:

$$-\omega^2 u = c^2 \Delta u.$$

Последнее уравнение перепишем в виде:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (7.8)$$

где

$$k = \omega/c, \quad (7.9)$$

константа k называется волновым числом.

Таким образом, для потенциала скорости возникло известное нам уравнение Гельмгольца. Заметим, что возмущенное давление в силу формулы (7.5), имеет вид:

$$p' = \rho_0 i \omega u(x) e^{-i \omega t}.$$

Физический смысл, как возмущенное давление, могут иметь действительная и мнимая части последней функции.

7.2 Плоская волна. Сферическая волна

Рассмотрим некоторые важные частные решения уравнения (7.8).

7.2.1 Плоская волна. Важным частным решением уравнения (7.8) является функция вида:

$$u(x) = e^{i(\vec{k}, \vec{r})}, \quad (7.10)$$

\vec{r} – радиус-вектор точки x , \vec{k} – постоянный вектор, удовлетворяющий условию $|\vec{k}| = k$, где k – волновое число. Вектор \vec{k} – называется волновым вектором.

Поясним физический смысл решения (7.10) (см. рисунок 7.1, слева).

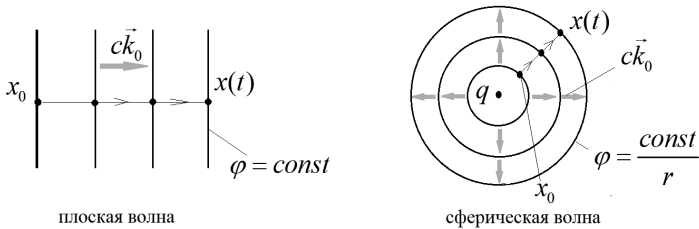


Рис. 7.1: Плоская и сферическая волна

Представим вектор \vec{k} в виде $\vec{k} = k \vec{k}_0$, где \vec{k}_0 – единичный вектор (орт вектора \vec{k}). Соответствующая функция $\varphi(x, t)$ вида (7.7) является решением волнового уравнения (7.6) и представляется в виде:

$$\varphi = e^{i(\vec{k}, \vec{r})} e^{-i \omega t} = e^{i(k(\vec{k}_0, \vec{r}) - \omega t)}.$$

Представляя волновое число k в виде (7.9), последнее выражение можно преобразовать к виду:

$$\varphi(x, t) = e^{i(\vec{k}, \vec{r})} e^{-i \omega t} = e^{i \frac{\omega}{c} ((\vec{k}_0, \vec{r}) - ct)}.$$

7.2 Плоская волна. Сферическая волна

Теперь заметим следующее. Возьмем какую-нибудь точку x_0 и постоим плоскость π_0 , проходящую через точку x_0 перпендикулярно вектору \vec{k}_0 . Тогда для любой точки $x \in \pi_0$ рассматриваемая функция принимает одно и то же значение.

Далее, предположим, что точка x_0 является подвижной и движется в направлении вектора \vec{k}_0 со скоростью c , т.е. ее положение описывается формулой:

$$x_0(t) = a + \vec{k}_0 ct,$$

a – некоторое начальное положение. Пусть также, плоскость π_0 движется вместе с точкой x_0 , при этом $\pi_0 = \pi_0(t)$. Тогда в каждый момент времени t для любой точки $x \in \pi_0(t)$ с радиус вектором \vec{r} имеем:

$$\left(\vec{k}_0, \vec{r} \right) - ct = \left(\vec{k}_0, \vec{r}_a \right),$$

где \vec{r}_a – радиус вектор точки a .

Таким образом, имеем:

$$\varphi(x, t) = \varphi(x_0, 0) \text{ при } x \in \pi_0(t). \quad (7.11)$$

Это означает, что на любой плоскости $\pi_0(t)$, ортогональной вектору \vec{k}_0 и движущейся в направлении вектора \vec{k}_0 со скоростью c , функция φ принимает одно и то же значение, не зависящее от времени. Такое решение называется плоской волной, причем эта волна распространяется в направлении вектора \vec{k}_0 со скоростью c . Поэтому в задачах акустики число c называется скоростью звука – оно характеризует скорость распространения звуковых волн.

7.2.2 Сферическая волна. Теперь рассмотрим уже знакомую нам функцию

$$u(x) = F(x - q), \quad (7.12)$$

где

$$F(x - q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = |x - q|,$$

q – некоторая точка – центр волны.

Напомним, что $F(x - q)$ – потенциал точечного заряда для уравнения Гельмгольца (7.8), который является решением этого уравнения при $x \neq q$.

Построим соответствующее решение уравнения (7.6), определяемое формулой (7.7):

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} = \frac{1}{4\pi r} e^{i\frac{\omega}{c}(r-ct)}.$$

Рассмотрим расширяющуюся сферу $S(t)$ с центром в точке q , радиус которой меняется по закону $r = r_0 + ct$, $r_0 > 0$ – некоторое начальное значение радиуса (см. рисунок 7.2, справа). Тогда

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{4\pi r} e^{i\frac{\omega}{c}r_0} \text{ при } x \in S(t). \quad (7.13)$$

Т.е. можно сказать, что функция $\varphi(x, t)$ меняется по закону $\varphi(x, t) = \varphi_0/r$ на такой подвижной сфере, где φ_0 – некоторая константа. Такое решение называется расходящейся сферической волной (сфера «расходится» от центра с увеличением времени) или волной, уходящей от тела.

Напомним, так же, что функция $u(x)$ вида (7.12) удовлетворяет условию излучения на бесконечности вида

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \rightarrow \infty \quad (7.14)$$

(см. формулу (2.18)). Теперь мы видим, что это условие соответствует расходящейся волне.

Так же легко заметить, что если рассмотреть функцию

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad r = |x - q|,$$

то условие (7.13) будет выполняться на сфере, радиус которой меняется по закону $r = r_0 - ct$, т.е. сфера сжимается к точке q . Такую волну называют сходящейся волной или приходящей с бесконечности волной. Соответственно для нее вместо условия (7.14) выполнено соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (7.15)$$

Таким образом, используемое нами условие излучения вида (7.14), является условием, что решение уравнения Гельмгольца на бесконечности должно иметь вид уходящей волны. Отметим, что данное условие согласовано с выбором зависимости от времени в виде (7.7). Если использовать зависимость $\varphi = u(x)e^{+i\omega t}$, то условия (7.14) и (7.15) меняются местами, в том смысле, что условие (7.14) будет определять уже сходящуюся волну, а условие (7.15) расходящуюся. В литературе иногда используется и последний вид зависимости от времени. В этом случае при решении внешних задач для уравнения Гельмгольца нужно брать условие излучения в виде (7.15). Отметим, что все рассуждения здесь соответствуют действительному значению параметра k . Об условиях излучения можно посмотреть подробнее в [43, глава 7, §3, п.4].

7.3 Задача рассеяния

Будем рассматривать монохроматические звуковые поля, описываемые уравнением Гельмгольца (7.8) для пространственной составляющей. При решении задачи рассеяния ищется полное поле u_{tot} , возникающее при взаимодействии некоторого заданного первичного поля u_{inc} с объектами, помещенными во внешнюю среду. При этом полное поле ищется в виде

$$u_{tot} = u_{inc} + u, \quad (7.16)$$

где u – неизвестное вторичное (рассеянное поле).

Мы рассмотрим случай, когда окружающая среда является однородной. Акустическое поле в такой среде описывается уравнением Гельмгольца с постоянным значением параметра k – волнового числа. При этом свойства внешней среды описываются параметром c – скоростью звука в этой среде.

Под первичным полем понимается некоторая функция u_{inc} , которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца (7.8) всюду вне источников звука. В качестве такого первичного поля, например, могут выступать плоская волна (7.10), сферическая волна (7.12), система сферических волн, излучаемых комбинацией источников вида

$$u_{inc}(x) = \sum_{k=1}^K Q_k F(x - q_k)$$

или

$$u_{inc}(x) = \int_D Q(y) F(x - y) dy,$$

где в первом случае q_k – система заданных точек, Q_k – заданные интенсивности источников излучения, во втором случае D – множество точек, в которых сосредоточены источники излучения, $Q(y)$ – функция, задающая распределение интенсивности источников.

Пусть Ω – область вне облучаемых объектов. Мы рассмотрим случай, когда поле не проникает внутрь объектов (точнее, когда задача сводится к рассмотрению уравнений только в области Ω). При решении задач рассеяния будем искать вторичное поле u , удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (7.8) в области Ω вне облучаемого объекта и условиям излучения на бесконечности (7.14). Как было показано, смысл этих условий состоит в том, в том, что рассеянное поле на бесконечности должно вести себя как расходящаяся сферическая волна.

Перейдем к постановке граничных условий на облучаемых объектах. Облучаемые объекты можно разделить на телесные объекты (каждый такой объект ограничен замкнутой поверхностью) и экраны (каждый экран представляет собой разомкнутую поверхность с

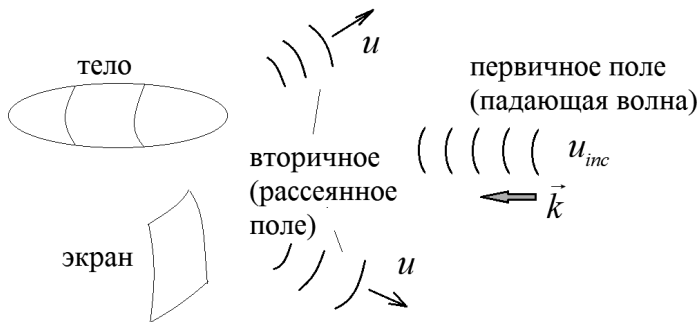


Рис. 7.2: Рассеяние на системе объектов

краем). Пусть Σ – суммарная поверхность этих объектов. Эта поверхность может состоять из замкнутых компонент (поверхности телесных объектов) и разомкнутых компонент (поверхности экранов).

Выделяются два важных случая, в которых акустическое поле не проникает во внутрь тел, и можно решать краевую задачу в области Ω (см. [23, глава 3, §3/1], [47, глава 1, §1.1]).

Первый случай – это случай жестких тел и экранов – в этом случае на поверхности Σ ставится условие Неймана:

$$\frac{\partial u_{tot}}{\partial n} = 0. \quad (7.17)$$

С физической точки зрения это означает, что поле скоростей жидкости (7.3) удовлетворяет на поверхности тел условию непротекания $\vec{w}\vec{n} = 0$ (здесь мы считаем, что $\vec{w} = \text{grad } u_{tot} e^{-i\omega t}$).

Второй случай – это случай мягких тел и экранов. В этом случае на поверхности Σ ставится условие Дирихле:

$$u_{tot} = 0. \quad (7.18)$$

С физической точки зрения это означает следующее. Возмущенное давление определяется формулой (7.5), которая в монохроматическом случае имеет вид

$$p' = i\omega\rho_0 u_{tot} e^{-i\omega t}.$$

Поэтому условие (7.18) равносильно условию на возмущенное давление $p' = 0$ на поверхности Σ .

Записанные граничные условия перепишем в виде условий на вторичное поле:

7.4 Численное решение задачи рассеяния на жестких телах и экранах

в случае жесткого тела:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \text{ на поверхности } \Sigma, \quad (7.19)$$

где

$$f = -\partial u_{inc}/\partial n;$$

в случае мягкого тела:

$$u = f \text{ на поверхности } \Sigma, \quad (7.20)$$

где

$$f = -u_{inc}.$$

7.4 Численное решение задачи рассеяния на жестких телах и экранах

Ищется полное поле u_{tot} вида (7.16), где u_{inc} – заданное первичное поле, u – неизвестное вторичное поле. Для неизвестного вторичного поля, определенного в области Ω вне облучаемых тел, решается уравнение Гельмгольца (7.8) с граничным условием (7.19) на поверхности Σ и условиями на бесконечности (7.14). Также ставятся условия на поведение функции u в окрестности граничной поверхности, сформулированные в разделе 5.5.

В случае, если Σ – замкнутая поверхность (т.е. рассматривается рассеяние на телесном объекте), мы имеем задачу, рассмотренную в п.5.1.2. Решение такой задачи можно искать в виде потенциала простого слоя (5.9). При этом возникает интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода (5.17), которое решается численно. Методы численного решения такого уравнения описаны в п.5.2. Такой подход легко обобщается на случай, когда рассматривается несколько тел, каждое из которых ограничено замкнутой поверхностью. При этом вид решения (5.9) и уравнение (5.17) сохраняются, в них Σ – суммарная поверхность, состоящая из нескольких замкнутых компонент.

Если рассматривается рассеяние на экране или на системе объектов, среди которых есть экраны, применим единый подход, при котором решение ищется в виде потенциала двойного слоя. Этот подход работает и в случае рассеяния на теле, ограниченном замкнутой поверхностью (системе тел ограниченных замкнутыми поверхностями). Опишем численную схему решения такой задачи, представленную в статье [13].

Будем искать решение в виде потенциала двойного слоя:

$$u(x) = U_{\Sigma}[\nu](x) = \int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y} dy.$$

На плотность потенциала двойного слоя ставится условие

$$\nu(y) = 0 \text{ при } y \in \partial\Sigma,$$

$\partial\Sigma$ – совокупность точек, лежащих на краях разомкнутых компонент суммарной поверхности Σ . В соответствии с теоремой 3.11 для плотности потенциала двойного слоя имеем интегральное уравнение на граничной поверхности:

$$\int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} dy = f(x), \quad x \in \Sigma, \quad (7.21)$$

где интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару:

$$\int_{\Sigma} \nu(y) \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Sigma/U(x,\varepsilon)} \nu(y) \frac{\partial^2 F(x-y)}{\partial n_x \partial n_y} dy - \frac{\nu(x)}{2\varepsilon} \right],$$

$U(x, \varepsilon) - \varepsilon$ – окрестность точки x .

Заметим, что уравнение (7.21) должно выполняться в точках поверхности Σ , являющихся точками гладкости и не являющихся точками края, мы предполагаем, что функция $\nu(y)$ достаточно гладкая для выполнения формул (3.94)–(3.95).

Численно для решения уравнения (7.21) применяем схему, которая близка к схеме решения краевой задачи Неймана на экране для уравнения Лапласа, описанной в разделе 5.5.

Поверхность Σ аппроксимируется ячейками σ_i , $i = 1, \dots, n$. Используется разбиение на треугольные ячейки или на четырехугольные ячейки (с возможностью появления треугольных ячеек как вырожденного случая) как указано в п. 5.2. На каждой ячейке строим точку коллокации x^i и вектор нормали n_i по формулам (5.35) в случае треугольных ячеек или (5.36) в случае четырехугольных ячеек.

Приближенное решение ищется в виде:

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^n \nu_j U_{\sigma_j}[e], \quad (7.22)$$

где $U_{\sigma_j}[e]$ – потенциал двойного слоя с плотностью $e(x) \equiv 1$, размещенного на ячейке σ_j . При этом градиент потенциала двойного слоя \tilde{u} запишется в виде

$$\text{grad } \tilde{u} = \sum_{j=1}^n \nu_j \vec{W}_{\sigma_j}, \quad \vec{W}_{\sigma_j} = \text{grad } U_{\sigma_j}[e]. \quad (7.23)$$

Требую выполнения граничного условия (7.19) для поля \tilde{u} в точках коллокации, получаем систему линейных алгебраических уравнений

7.4 Численное решение задачи рассеяния на жестких телах и экранах

с квадратной матрицей:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \nu_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.24)$$

где

$$a_{ij} = \vec{W}_{\sigma_j}(x^i) \vec{n}_i, \quad f_i = f(x^i), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (7.25)$$

Заметим, что как уже отмечалось, точка коллокации может не лежать строго на поверхности. Но в данном случае правая часть $f = -\partial u_{inc} / \partial n$ определена в окрестности поверхности Σ и значение $f(x^i)$ определено напрямую.

Для вычисления коэффициентов матрицы систем линейных уравнений, определяемых формулой (7.25) предлагается следующий алгоритм. Функцию $F(x - y)$ представим в виде:

$$F(x - y) = F_0(x - y) + \tilde{F}(x - y),$$

$$F_0(x - y) = \frac{1}{4\pi r}, \quad \tilde{F}(x - y) = \frac{e^{ikr} - 1}{4\pi r}, \quad r = |x - y|.$$

При этом коэффициенты a_{ij} представляются в виде

$$a_{ij} = a_{ij}^0 + \tilde{a}_{ij},$$

$$a_{ij}^0 = \vec{W}_{\sigma_j}^0(x^i) \vec{n}_i, \quad \vec{W}_{\sigma_j}^0(x^i) = \text{grad} \int_{\sigma_j} \frac{\partial F_0(x^i - y)}{\partial n_y} dy,$$

$$\tilde{a}_{ij} = \int_{\sigma_j} \frac{\partial^2 \tilde{F}(x - y)}{\partial n_x \partial n_y} dy \Big|_{x=x^i}.$$

Заметим, что a_{ij}^0 есть точности коэффициенты системы (5.76), возникающие при решении задачи Неймана для уравнения Лапласа. В случае ячеек треугольной или четырехугольной формы эти коэффициенты вычисляются по формулам (5.74)-(5.75).

В выражении для коэффициентов \tilde{a}_{ij} подынтегральная функция имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial \tilde{F}(x - y)}{\partial n_y} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{k^2 e^{ikr}}{r^3} + \frac{3ike^{ikr}}{r^4} - \frac{3e^{ikr} - 3}{r^5} \right] \cdot [(x - y) \vec{n}(x)] \cdot [(x - y) \vec{n}(y)] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr} - 1 - ikre^{ikr}}{r^3} \vec{n}(x) \vec{n}(y),$$

это выражение имеет особенность порядка $O(1/r)$ (учитывая, что $(x - y) \vec{n}(x)$, $(x - y) \vec{n}(y)$ и $e^{ikr} - 1 - ikre^{ikr}$ есть бесконечно малые порядка $O(r^2)$). Поэтому интеграл в выражении для коэффициентов \tilde{a}_{ij} можно вычислять численно по формулам (4.20), используя доразбиение ячейки σ_j по схеме, описанной в п.5.2.

7.5 Численное решение задачи рассеяния на мягких телах и экранах

Ищется полное поле u_{tot} вида (7.16), где u_{inc} – заданное первичное поле, u – неизвестное вторичное поле. Для неизвестного вторичного поля, определенного в области Ω вне облучаемых тел, решается уравнение Гельмгольца (7.8) с граничным условием Дирихле (7.18) на поверхности Σ и условиями на бесконечности (7.14). Решение ищется в классе функций, имеющих краевые значения во всех точках гладкости, ограниченной в окрестностях ребер и конических точек и непрерывной на краях поверхности Σ .

В случае, если Σ – замкнутая поверхность (т.е. рассматривается рассеяние на телесном объекте), мы имеем задачу, рассмотренную в п.5.1.2. Решение такой задачи можно искать в виде потенциала двойного слоя (5.10). При этом возникает интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода (5.15), которое решается численно. Методы численного решения такого уравнения описаны в п.5.2. Такой подход легко обобщается на случай, когда рассматривается несколько тел, каждое из которых ограничено замкнутой поверхностью. При этом вид решения (5.10) и уравнение (5.15) сохраняются, в них Σ – суммарная поверхность, состоящая из нескольких замкнутых компонент.

Если рассматривается рассеяние на экране или на системе объектов, среди которых есть экраны, здесь применим единый подход, при котором решение ищется в виде потенциала простого слоя. Этот подход работает и в случае рассеяния на теле, ограниченном замкнутой поверхностью (системе тел ограниченных замкнутыми поверхностями). Будем искать решение в виде потенциала простого слоя:

$$u(x) = V_{\Sigma}[\nu](x) = \int_{\Sigma} \nu(y)F(x-y)dy.$$

На плотность потенциала простого слоя ставится условие непрерывности ν в точках гладкости поверхности Σ и интегрируемости по поверхности. При этом для плотности потенциала простого слоя возникает интегральное уравнение на граничной поверхности:

$$\int_{\Sigma} \nu(y)F(x-y)dy = f(x), \quad x \in \Sigma. \quad (7.26)$$

При численном решении такого уравнения методом кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций поверхность Σ аппроксимируется ячейками σ_i , $i = 1, \dots, n$. На каждой ячейке строим точку коллокации x^i . Далее решение ищем в виде кусочно-постоянной функции

$$\tilde{\nu}(x) = \nu_j \text{ при } x \in \sigma_j^{in}.$$

7.5 Численное решение задачи рассеяния на мягких телах и экранах

Записывая уравнение (7.26) в точках коллокации, имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \nu_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.27)$$

$$a_{ij} = \int_{\sigma_j} F(x^i - y) dy, \quad f_i = f(x^i) = -u_{inc}(x^i), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Интеграл в выражении для коэффициентов a_{ij} можно вычислять численно по формулам (4.20), используя доразбиение ячейки σ_j по схеме, описанной в п.5.2.

Глава 8

Приложение к задачам рассеяния электромагнитных волн

8.1 Уравнения Максвелла. Монохроматический случай

Приведем основные сведения, связанные с математическим описанием распространения электромагнитных волн ([46, глава 1, §1, §4]), [63, глава 1, §1.1 - 1.4].

Распространение электромагнитного поля описывается нестационарными уравнениями Максвелла, которые связывают распределения напряженностей электрического и магнитного полей $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$ и $\vec{H} = \vec{H}(x, t)$ и полей электрической и магнитной индукций $\vec{D} = \vec{D}(x, t)$ и $\vec{B} = \vec{B}(x, t)$, где t – время, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точки пространства:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

здесь ρ – плотность распределения электрических зарядов, \vec{j} – плотность электрических токов.

Чтобы получить полную систему уравнений электродинамики, необходимо дополнить записанные уравнения так называемыми материальными соотношениями, которые устанавливают связь между полями \vec{E} и \vec{D} и между полями \vec{H} и \vec{B} , определяемую свойствами среды, в которой распространяется электромагнитное поле.

В линейной модели изотропной среды векторы напряженностей электрического и магнитного полей и векторы индукций электрического и магнитного полей связаны соотношениями:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (8.1)$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon' \varepsilon_0, \quad \mu = \mu' \mu_0, \quad (8.2)$$

ε – диэлектрическая проницаемость среды, μ – магнитная проницаемость среды, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c_0^2)$ – электрическая постоянная, $c_0 = 299792458$ м/с – скорость света в вакууме, ε' – относительная диэлектрическая проницаемость среды, μ' – относительная магнитная проницаемость среды. Заметим, что величины ε' и μ' могут быть функциями от точки x (случай неоднородной среды), а также матрицами (в левых частях формул (8.1) стоит умножение матриц ε и μ на векторы \vec{E} и \vec{H} , соответственно). Будем называть среду однородной изотропной, если в ней ε' и μ' есть числовые константы.

При наличии материальных соотношений перепишем уравнения Максвелла в виде

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho, \quad (8.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (8.4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (8.5)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}. \quad (8.6)$$

В монохроматическом случае ищется решение уравнений (8.3)-(8.6) с гармонической зависимостью от времени, вида:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_\omega(x) e^{-i\omega t}, \quad \vec{H}(x, t) = \vec{H}_\omega(x) e^{-i\omega t}. \quad (8.7)$$

Всюду далее будем опускать индекс ω при обозначении пространственных составляющих электрического и магнитного полей, т.е. обозначать $\vec{E}(x) = \vec{E}_\omega(x)$ и $\vec{H}(x) = \vec{H}_\omega(x)$.

Так же всюду далее будем рассматривать случай, когда в среде отсутствуют внешние заряды (т.е. $\rho(x) \equiv 0$), а токи \vec{j} в уравнении (8.6) либо отсутствуют, либо определяются линейным соотношением:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (8.8)$$

где $\sigma \geq 0$ – проводимость среды. Среду, в которой токи подчинены соотношению (8.8) называют средой с проводимостью, подчиняющейся линейному закону. Непроводящую среду, в которой токи отсутствуют, можно рассматривать как проводящую среду с параметром $\sigma = 0$.

Уравнение (8.6) для поля вида (8.7) принимает вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x)e^{-i\omega t} = -i\omega\varepsilon\vec{E}(x)e^{-i\omega t} + \sigma\vec{E}(x)e^{-i\omega t}. \quad (8.9)$$

Последнее уравнение разделим на множитель $e^{-i\omega t}$. Кроме того, вместо действительного параметра ε введем комплексный параметр

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \varepsilon_2 = \frac{i\sigma}{\omega} \quad (8.10)$$

где реальную диэлектрическую проницаемость среды мы переобозначили как ε_1 . Тогда уравнение (8.9) переписется в виде

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x) = -i\omega\varepsilon\vec{E}(x). \quad (8.11)$$

Аналогично уравнение (8.5) принимает вид

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x) = i\omega\mu\vec{H}(x). \quad (8.12)$$

В случае, когда среда неоднородна (т.е. параметры ε и μ в уравнениях (8.11) и (8.12) зависят от координат точки), эти уравнения следует дополнить уравнениями

$$\operatorname{div} \vec{E}(x) = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H}(x) = 0. \quad (8.13)$$

В случае однородной среды, т.е. когда ε и μ есть константы, уравнения (8.13) следуют автоматически из уравнений (8.11) и (8.12).

Отметим, что, так же, как и для звуковых волн, физический смысл имеют действительная и мнимая части полей \vec{E} и \vec{H} , которые являются решениями записанных уравнений.

8.2 Решения уравнений Максвелла с точечной особенностью

При построении интегральных представлений решений уравнений Лапласа и Гельмгольца (однородного) ключевую роль играл потенциал точечного заряда, который являлся решением соответствующего уравнения во всем пространстве, кроме одной точки. Получим для уравнений Максвелла решения с особенностью в одной точке, которые позволят нам строить векторные поверхностные потенциалы. При этом рассматриваем случай, когда ε и μ есть константы в области, в которой рассматриваются уравнения Максвелла.

8.2 Решения уравнений Максвелла с точечной особенностью

Исключим из уравнений (8.11)-(8.12) магнитное поле \vec{H} . Из уравнения (8.12) имеем:

$$\vec{H}(x) = -\frac{i}{\omega\mu} \operatorname{rot} \vec{E}(x). \quad (8.14)$$

Тогда из уравнения (8.11) имеем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \omega^2 \varepsilon \mu \vec{E}.$$

Используя формулу векторного анализа:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F},$$

и учитывая уравнения (8.13), получаем векторное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad (8.15)$$

где

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (8.16)$$

Параметр k называется волновым числом.

Решением уравнения (8.15), определенным вне произвольной фиксированной точки y является функция

$$\vec{A}(x) = \vec{j} F(x - y), \quad (8.17)$$

где \vec{j} – произвольный постоянный вектор, F – уже хорошо знакомое нам фундаментальное решение уравнения Гельмгольца:

$$F(x - y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = |x - y|.$$

Здесь, как и для скалярных волн, мы берем функцию F , удовлетворяющей условию излучения на бесконечности (7.14). При этом в случае комплексного значения параметра ε , в формуле (8.16), следует выбирать значение корня из комплексного числа так, чтобы мнимая часть волнового числа k была неотрицательной.

Однако, нас интересуют не любые решения уравнения (8.15), а решения, удовлетворяющие дополнительно условию (8.13).

Пусть $\vec{A}(x)$ – некоторое решение уравнения (8.15) (не обязательно вида (8.17)). Покажем, что тогда поле

$$\vec{E}(x) = \operatorname{rot} \vec{A}(x)$$

также решение уравнения (8.15). Действительно, в этом случае

$$\Delta \vec{E}(x) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}(x) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}(x),$$

причем,

$$\operatorname{div} \vec{E}(x) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}(x) = 0.$$

Тогда:

$$\Delta \vec{E} = -\operatorname{rot} \left(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} \right) = -\operatorname{rot} \left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} \right) + \operatorname{rot}(\Delta \vec{A}) = -k^2 \operatorname{rot} \vec{A}$$

и мы можем записать

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}, \quad (8.18)$$

что и требовалось доказать.

Теперь пусть $\vec{A}(x)$ есть поле вида (8.17). Тогда решениями уравнения Гельмгольца во всем пространстве, за исключением точки $x = y$, будут также поля:

$$\vec{E}_1(x) = \operatorname{rot} \vec{A}(x) = \operatorname{grad}_x F(x-y) \times \vec{j}, \quad (8.19)$$

$$\vec{E}_2(x) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(x) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\vec{j} F(x-y) \right) + k^2 \vec{j} F(x-y). \quad (8.20)$$

Поля вида (8.19) и (8.20) удовлетворяют, также уравнению (8.13). Заметим, также, что соответствующие магнитные поля могут быть найдены по формуле (8.14):

$$\vec{H}_1(x) = -\frac{i}{\omega \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(x),$$

откуда имеем:

$$\vec{H}_1(x) = -\frac{i}{\omega \mu} \left\{ \operatorname{grad} \operatorname{div} \left(\vec{j} F(x-y) \right) + k^2 \vec{j} F(x-y) \right\}; \quad (8.21)$$

$$\vec{H}_2(x) = -\frac{i}{\omega \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(x)$$

и, используя те же выкладки, что и в цепочке формул (8.18), с учетом формулы (8.16), имеем:

$$\vec{H}_2(x) = -i\omega \varepsilon \operatorname{rot} \vec{A}(x) = -i\omega \varepsilon \operatorname{grad}_x F(x-y) \times \vec{j}. \quad (8.22)$$

Пары полей \vec{E}_1, \vec{H}_1 и \vec{E}_2, \vec{H}_2 являются решениями уравнений Максвелла (8.11)-(8.12) при $x \neq y$.

Пусть проницаемости ε и μ есть действительные числа (среда без проводимости). Мы выбрали в формуле (8.17) функцию F – фундаментальное решение скалярного уравнения Гельмгольца (5.2), удовлетворяющее условию излучения на бесконечности (5.8). Тогда и поле \vec{A} вида (8.17) удовлетворяет условию излучения, аналогичному (5.8):

$$\vec{A} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial r} - ik\vec{A} = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \text{при } r \equiv |x| \rightarrow \infty. \quad (8.23)$$

8.3 Поверхностные векторные потенциалы

Для пояснения физического смысла последнего условия заметим, что также, как и в скалярном случае (см. 7.2.2), поле \vec{A} вида (8.17) в монохроматическом случае и при $y = 0$ есть пространственная составляющая поля

$$\vec{j} \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} e^{-i\omega t} = \vec{j} \frac{1}{4\pi r} \frac{e^{ik(r-ct)}}{r}, \quad r = |x|, \quad c = \frac{\omega}{k}.$$

Это поле представляет собой расходящуюся сферическую волну. Таким образом, условия (8.23), выполненные для электрического и магнитного полей, означают, что это последнее поле на бесконечности ведет себя как расходящаяся волна.

В случае среды с проницаемостью будем задавать проницаемость ε в виде (8.10). При этом мнимая часть ε положительна. Далее, волновое число k определяется формулой (8.16), где под корнем понимается главное значение корня из комплексного числа, у которого аргумент лежит в пределах от 0 до $\pi/2$. При этом мнимая часть k положительна и, тогда, условия (8.23) также выполнены.

8.3 Поверхностные векторные потенциалы

Пусть Σ – некоторая ограниченная поверхность (замкнутая либо разомкнутая с краем), $\vec{j}(y)$ – касательное векторное поле на поверхности Σ (т.е. $\vec{j}(y)\vec{n}(y) = 0$, $y \in \Sigma$).

Рассмотрим два вида поверхностных векторных потенциалов.

Пусть

$$\vec{E}_1(x) = \vec{R}[\Sigma, \vec{j}](x) \equiv \int_{\Sigma} \text{grad}_x F(x-y) \times \vec{j}(y) dy, \quad (8.24)$$

$$\vec{E}_2(x) = \vec{K}[\Sigma, \vec{j}](x) \equiv \text{grad div} \int_{\Sigma} \vec{j}(y) F(x-y) dy + k^2 \int_{\Sigma} \vec{j}(y) F(x-y) dy. \quad (8.25)$$

Заметим, что если мы обозначим

$$\vec{A}(x) = \int_{\Sigma} \vec{j}(y) F(x-y) dy,$$

то справедливы также формулы:

$$\vec{R}[\Sigma, \vec{j}](x) = \text{rot } \vec{A}(x),$$

$$\vec{K}[\Sigma, \vec{j}](x) \equiv \text{grad div } \vec{A}(x) + k^2 \vec{A}(x) = \text{rot rot } \vec{A}(x).$$

Поля $\vec{E}_1(x)$ и $\vec{E}_2(x)$ всюду вне поверхности Σ удовлетворяют векторному уравнению Гельмгольца (8.15) и условию на дивергенцию (8.13). Построим соответствующие магнитные поля по формуле (8.14). Из формул (8.21) и (8.22) имеем:

$$\vec{H}_1(x) = -\frac{i}{\omega\mu} \text{rot rot } \vec{A}(x) = -\frac{i}{\omega\mu} \vec{K}[\Sigma, \vec{j}](x),$$

$$\vec{H}_2(x) = -i\omega\varepsilon \vec{R}[\Sigma, \vec{j}](x).$$

Пары полей \vec{E}_1, \vec{H}_1 и \vec{E}_2, \vec{H}_2 являются решениями уравнений Максвелла (8.11)-(8.12) вне поверхности Σ и удовлетворяют условиям излучения (8.23). Функцию $\vec{j}(y)$ называют поверхностным током.

Приведем сведения, относящиеся к существованию и свойствам краевых значений полей, определяемых введенными операторами \vec{R} и \vec{K} .

Если поверхность Σ и поле $\vec{j}(y)$ является достаточно гладкой (Σ – поверхность класса C^3 (гладкая замкнутая или элементарная разомкнутая), поле $\vec{j}(y)$ непрерывно по Гельдеру), то в каждой точке $x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$, поле $\vec{E}(x) = \vec{R}[\Sigma, \vec{j}](x)$ имеет краевые значения, для которых справедливы формулы:

$$\vec{E}(x)^\pm \equiv \left(\vec{R}[\Sigma, \vec{j}](x) \right)^\pm = \vec{R}[\Sigma, \vec{j}](x) \pm \frac{1}{2} \vec{j}(x) \times \vec{n}(x), \quad (8.26)$$

$\vec{R}[\Sigma, \vec{j}](x)$ – прямое значение, получаемое непосредственно из формулы (8.24) (см. [23, §2.6]).

Если поверхность Σ и поле $\vec{j}(y)$ является достаточно гладкой (Σ – поверхность класса C^3 – гладкая замкнутая или элементарная разомкнутая, поле \vec{j} имеет поверхностный градиент $\text{Grad } \vec{j}$ непрерывный по Гельдеру), то в каждой точке $x \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ поле $\vec{E}(x) = \vec{K}[\Sigma, \vec{j}](x)$ имеет краевые значения, для которых справедливы формулы:

$$\vec{E}(x)^\pm \equiv \left(\vec{K}[\Sigma, \vec{j}](x) \right)^\pm = \vec{K}[\Sigma, \vec{j}](x) \mp \frac{1}{2} \vec{n}(x) \text{Div } \vec{j}(x), \quad (8.27)$$

$\vec{K}[\Sigma, \vec{j}](x)$ – прямое значение, получаемое непосредственно из формулы (8.25), причем, интеграл слугет понимать в смысле конечного значения по Адамару, $\text{Div } \vec{j}(x)$ – поверхностная дивергенция поля $\vec{j}(x)$ (см. [16], в этой статье поясняется понятие поверхностной дивергенции и доказывается формула для краевых значений).

8.4 Постановка задачи рассеяния на системе идеально проводящих тел и экранов

Рассмотрим задачу рассеяния монохроматического электромагнитного поля на системе идеально-проводящих тел и экранов. Пред-

8.4 Постановка задачи рассеяния на системе идеально проводящих тел и экранов

полагается, что каждое тело ограничено некоторой замкнутой поверхностью, а каждый экран задается ограниченной поверхностью с краем. Пусть Σ – суммарная поверхность облучаемых объектов. Эта поверхность может состоять из одной или нескольких компонент: замкнутых (поверхности идеально проводящих тел) и разомкнутых (поверхности экранов). Пусть Ω – область, состоящая из точек, лежащих вне замкнутых компонент поверхности Σ и вне экранов.

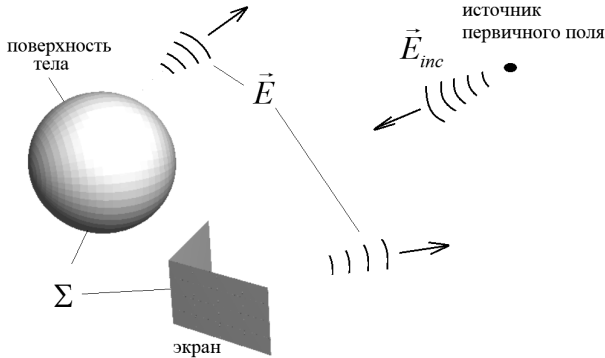


Рис. 8.1: Рассеяние на идеально проводящих телах и экранах

При решении задачи рассеяния ищется полное поле \vec{E}_{tot} , \vec{H}_{tot} , возникающее при взаимодействии некоторого заданного первичного поля \vec{E}_{inc} , \vec{H}_{inc} с рассматриваемым телом, помещенными во внешнюю среду. При этом полное поле ищется в виде

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}, \quad \vec{H}_{tot} = \vec{H}_{inc} + \vec{H}, \quad (8.28)$$

где \vec{E} , \vec{H} – неизвестное вторичное (рассеянное поле).

Предполагается, зависимость от времени для всех рассматриваемых полей – первичного, полного и рассеянного, определяется множителем $e^{-i\omega t}$, как в формуле (8.7), и что в формулах (8.28) мы рассматриваем пространственные составляющие этих полей, являющиеся функциями только от набора координат x .

Предполагается, что первичное поле создается сторонними источниками, и что это поле определено и удовлетворяет уравнениям (8.11)-(8.12) всюду вне источников поля (в том числе и на поверхности Σ , и во внутренних областях, ограниченных замкнутыми компонентами поверхности Σ).

Примером такого поля может служить плоская волна. Электрическое поле плоской волны определяется формулой

$$\vec{E}_{inc}(x) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (8.29)$$

где \vec{k} – произвольный вектор, удовлетворяющий условию $|\vec{k}| = k$, \vec{r} – радиус вектор точки x , \vec{E}_0 – произвольный вектор, удовлетворяющий условию $\vec{E}_0 \vec{k} = 0$. Векторы \vec{k} и \vec{E}_0 называются волновым вектором и вектором поляризации плоской волны, соответственно. Заметим, что здесь в данном случае мы имеем дело с векторной плоской волной, для которой выполнено соотношение, аналогичное соотношению (7.11) для скалярной волны.

Соответствующий вектор магнитного поля находится из формулы (8.14). Используя формулу векторного анализа

$$\text{rot}(\varphi \vec{F}) = \text{grad} \varphi \times \vec{F} + \varphi \text{rot} \vec{F}$$

получаем, что соответствующее магнитное поле имеет вид

$$\vec{H}_{inc}(x) = \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\omega\mu_0} \vec{k} \times \vec{E}_0. \quad (8.30)$$

С математической точки зрения под идеальным проводником понимается тело (экран), на поверхности которого касательная компонента полного электрического поля является нулевой. Таким образом, на поверхности Σ ставится граничное условие:

$$\vec{n} \times \vec{E}_{tot} = 0, \quad (8.31)$$

здесь \vec{n} – орт вектора нормали на поверхности Σ . Всюду далее считаем, что на замкнутых компонентах поверхности \vec{n} есть вектор внешней нормали, на разомкнутых компонентах вектор нормали обращен в одну из сторон поверхности. В точках замкнутых компонент поверхности Σ условие (8.31) ставится на краевые значения со стороны области Ω , т.е. с положительной стороны поверхности. На разомкнутых компонентах поверхности граничное условие ставится на обеих сторонах.

Таким образом, ставится задача нахождения вторичных электрического и магнитного полей \vec{E} и \vec{H} . Эти поля определены в области Ω вне облучаемых тел и экранов и должны удовлетворять в этой области уравнениям (8.11)-(8.12). Так же вторичные поля \vec{E} и \vec{H} должны удовлетворять условию излучения (8.23). Отметим, что вблизи краев, ребер и конических точек поверхности Σ поля \vec{E} и \vec{H} могут иметь особенность. Но при этом должно выполняться условие конечности энергии, которое можно сформулировать как требование локальной интегрируемости функции $|\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2$ (т.е. эти функции должны быть интегрируемы по любой ограниченной подобласти области Ω).

8.5 Численное решение задач рассеяния на идеально проводящих объектах

8.5.1 Численное решение задачи рассеяния на идеально проводящем теле. Сначала рассмотрим случай рассеяния на идеально проводящем теле, ограниченном замкнутой поверхностью, т.е. суммарная поверхность Σ есть одна замкнутая поверхность (см. [46, глава 3, §4, п.80], [23, глава 4, §4.4]).

Электрическое поле для такой задачи можно искать в виде

$$\vec{E}(x) = \vec{R}[\Sigma, \vec{j}](x), \quad (8.32)$$

где \vec{j} – неизвестное касательное поле на поверхности Σ . Магнитное поле будет определяться формулой (8.14). При этом уравнения Максвелла (8.21) и (8.22) и условия излучения на бесконечности выполнены автоматически, а из граничного условия (8.31), с учетом формул (8.26), получаем уравнение:

$$n \times \vec{R}[\Sigma, \vec{j}](x) + \frac{1}{2}\vec{j}(x) = \vec{f}(x), \quad x \in \Sigma, \quad (8.33)$$

где

$$\vec{f}(x) = -\vec{n}(x) \times \vec{E}_{inc}(x). \quad (8.34)$$

При этом $\vec{f}(x)$ – заданное касательное поле на поверхности Σ . Уравнение (8.33) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\vec{j}(x) + \int_{\Sigma} \vec{n}(x) \times \left[\text{grad}_x F(x-y) \times \vec{j}(y) \right] dy = \vec{f}(x), \quad x \in \Sigma. \quad (8.35)$$

В случае, когда Σ есть гладкая замкнутая поверхность класса C^3 , подынтегральное выражение для непрерывной функции $\vec{j}(y)$ имеет особенность порядка $O(1/r)$, $r = |x - y|$. Действительно, это следует из оценок:

$$\text{grad}_x F(x-y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{x-y}{r^3} + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\vec{n}(x) \times \left[(x-y) \times \vec{j}(y) \right] = O(r^2).$$

Тогда если ввести пространство L , элементами которого являются непрерывные на поверхности Σ касательные векторные поля с нормой

$$\|\vec{j}\| = \max_{x \in \Sigma} |\vec{j}|,$$

то оператор $n \times \vec{R}[\Sigma, \vec{j}]$ есть компактный оператор: $L \rightarrow L$ и тогда уравнение (8.34) есть уравнение Фредгольма 2-го рода (для него

выполнены теоремы Фредгольма). Анализ вопроса о разрешимости такого уравнения описан в [23, глава 4, §4.4].

Численно уравнение (8.34) можно решать, например, методом кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций. Аппроксимируем поверхность Σ системой трех и/или четырехугольных ячеек σ_i , $i = 1, \dots, n$, так же, как описано в п. 5.2. На каждой ячейке построим точку коллокации x^i , вектор нормали \vec{n}_i , и определим приближенную площадь ячейки s_i по схеме, описанной в п.5.2. Так же на каждой ячейке построим ортогональный базис в касательной плоскости $\vec{\tau}_i^1, \vec{\tau}_i^2$ так, что бы тройка векторов $\vec{\tau}_i^1, \vec{\tau}_i^2, \vec{n}_i$ образовывала правый декартов базис в пространстве. Например, можно построить векторы $\vec{\tau}_i^1, \vec{\tau}_i^2, \vec{n}_i$ на четырехугольной ячейке $ABCD$ по схеме:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_i^1 &= \frac{C - A}{|C - A|}, \\ \vec{n}'_i &= (C - A) \times (D - B), \quad \vec{n}_i = \frac{\vec{n}'_i}{|\vec{n}'_i|}, \\ \vec{\tau}_i^2 &= \vec{n}_i \times \vec{\tau}_i^1, \\ s_i &= \frac{1}{2} |\vec{n}'_i|. \end{aligned} \tag{8.36}$$

Для треугольной ячейки ABC используем те же формулы с $D = C$.

Обозначим через h – диаметр разбиения.

Пусть $\vec{j}(x)$ – заданное на поверхности Σ касательное векторное поле (т.е. $\vec{j}(x)\vec{n}(x) = 0$, $x \in \Sigma$), удовлетворяющее условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$, и пусть h – диаметр разбиения. Будем аппроксимировать векторное поле $\vec{j}(x)$ набором значений $\vec{j}_i = \vec{j}(x^i)$.

Оператор $\vec{R}[\Sigma, \vec{j}]$ аппроксимируем выражением:

$$\vec{R}[\Sigma, \vec{j}] = \sum_{i=1}^n \vec{R}[\sigma_i, \vec{j}_i], \tag{8.37}$$

значения $\vec{R}[\sigma_i, \vec{j}_i]$ можно рассчитать по формулам, аналогичным формулам (4.21), осуществив доразбиение ячейки σ_i на систему ячеек второго уровня σ_i^p :

$$\vec{R}[\sigma_j, \vec{j}_j](x) = \sum_{p=1}^M \vec{j}_j \times \vec{V}(x - y_j^p) \theta_\varepsilon(|x - y_j^p|) s_j^p, \tag{8.38}$$

$\theta_\varepsilon(r)$ – сглаживающая функция,

$$\vec{V}(x) = -\text{grad} \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad r = |x|, \tag{8.39}$$

8.5 Численное решение задач рассеяния на идеально проводящих объектах

выбор сглаживающей функции θ_ε описан в пояснении к формуле (4.21), доразбиение ячеек можно осуществлять по схеме, описанной в п. 5.2.

Потребуем выполнения уравнений, аппроксимирующих уравнение (8.33), в точках коллокации:

$$\vec{n}_i \times \sum_{j=1}^n \vec{R}[\sigma_j, \vec{j}_j](x^i) + \frac{1}{2} \vec{j}_i = \vec{f}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.40)$$

$$\vec{f}_i = -\vec{n}_i \times \vec{E}_{inc}(x^i).$$

Векторные уравнения (8.40) равносильны скалярным уравнениям

$$\left(\vec{\tau}_i^k, \vec{n}_i \times \sum_{j=1}^n \vec{R}[\sigma_j, \vec{j}_j](x^i) + \frac{1}{2} \vec{j}_i \right) = \left(\vec{\tau}_i^k, \vec{f}_i \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2. \quad (8.41)$$

Будем искать неизвестные векторы \vec{j}_i в виде:

$$\vec{j}_i = j_i^1 \vec{\tau}_i^1 + j_i^2 \vec{\tau}_i^2. \quad (8.42)$$

Тогда систему уравнений (8.41) можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных j_i^k , $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2$:

$$\sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ m=1, 2}} a_{ij}^{km} j_j^m = f_i^k, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \quad (8.43)$$

$$a_{ij}^{km} = \left(\vec{\tau}_i^k, \vec{n}_i \times \vec{R}[\sigma_j, \vec{\tau}_j^m](x^i) \right) + \frac{1}{2} \delta_i^j \delta_k^m, \quad f_i^k = \left(\vec{\tau}_i^k, \vec{f}_i \right),$$

δ_i^j – символ Кронекера ($\delta_i^j = 1$ при $i = j$, $\delta_i^j = 0$ при $i \neq j$).

Решив систему (8.42), можно построить поверхностные токи \vec{j}_i , $i = 1, \dots, n$, по формулам (8.42). Далее можно рассчитать приближенное значение полного электрического поля вида (8.28) в любой точке пространства, используя формулу (8.32) для вторичного поля \vec{E} , где оператор $\vec{R}[\Sigma, \vec{j}]$ аппроксимируется выражением (8.37).

8.5.2 Численное решение задачи рассеяния на системе идеально проводящих тел и экранов. Уравнение (8.33) обеспечивает выполнение граничного условия только с одной стороны поверхности. Поэтому для случая рассеяния на системе идеально проводящих тел и экранов электрическое поле будем искать в виде (см. [46, глава 3, §1, п.51])

$$\vec{E}(x) = \vec{K}[\Sigma, \vec{j}](x), \quad (8.44)$$

где \vec{j} – неизвестное касательное поле на поверхности Σ . Магнитное поле будет определяться формулой (8.14). При этом уравнения Максвелла (8.21) и (8.22) и условия излучения на бесконечности выполнены автоматически, а из граничного условия (8.31), с учетом формул (8.27), получаем уравнение:

$$\vec{n}(x) \times \vec{K}[\Sigma, \vec{j}](x) = \vec{n}(x) \times \vec{f}(x), \quad (8.45)$$

которое можно расписать как интегро-дифференциальное уравнение на поверхности Σ :

$$\text{grad div} \int_{\Sigma} \vec{j}(y) F(x-y) d\sigma_y + k^2 \int_{\Sigma} \vec{j}(y) F(x-y) d\sigma_y = f(x), \quad x \in \Sigma,$$

где

$$\vec{f}(x) = -\vec{E}_{inc}(x). \quad (8.46)$$

Заметим, что если в уравнении (8.45) формально внести производные под знак интеграла, возникнет интеграл с сильной особенностью. Такое уравнение может рассматриваться, если понимать возникающий интеграл как псевдодифференциальный оператор (см. [10], [40]), или как гиперсингулярный интеграл, понимаемый в смысле конечной части по Адамару ([16]). Мы дальше, не вдаваясь в подробности, опишем конструктивно численную схему решения задачи. Формально это можно сделать не аппелируя к граничному интегральному уравнению, а записав приближенное выражение для электрического поля и потребовав для него выполнения граничного условия в приближенном смысле. Мы будем использовать кусочно-постоянную аппроксимацию электрического поля и потребуем выполнения граничного условия в точках коллокации. Отметим, что идея такой численной схемы восходит к статье [9]. Приводимое же ниже описание следует статьям [16] и [60].

Аппроксимируем поверхность Σ системой трех и/или четырехугольных ячеек σ_i , $i = 1, \dots, n$, так же, как описано в п. 5.2. На каждой ячейке построим точку коллокации x^i , вектор нормали \vec{n}_i , и определим приближенную площадь ячейки s_i по схеме, описанной в п.5.2. Так же на каждой ячейке построим ортогональный базис в касательной полоскости $\vec{\tau}_i^1, \vec{\tau}_i^2$ так, что бы тройка векторов $\vec{\tau}_i^1, \vec{\tau}_i^2, \vec{n}_i$ образовывала правый декартов базис в пространстве, по формулам (8.36).

Будем аппроксимировать поверхностные токи $\vec{j}(x)$ набором значений \vec{j}_i , а оператор $\vec{K}[\Sigma, \vec{j}]$ аппроксимируем выражением:

$$\vec{K}[\Sigma, \vec{j}] = \sum_{i=1}^n \vec{K}[\sigma_i, \vec{j}_i], \quad (8.47)$$

где

$$\vec{K}[\sigma_i, \vec{j}_i] = \vec{K}_0[\sigma_i, \vec{j}_i] + \vec{K}_1[\sigma_i, \vec{j}_i],$$

8.5 Численное решение задач рассеяния на идеально проводящих объектах

$$\vec{K}_0[\sigma_i, \vec{j}_i] = \text{grad div} \int_{\sigma_i} \vec{j}_i F(x-y) d\sigma_y,$$

$$\vec{K}_1[\sigma_i, \vec{j}_i] = k^2 \vec{j}_i \int_{\sigma_i} F(x-y) d\sigma_y.$$

В выражении для \vec{K}_1 интеграл вычисляем по формулам, аналогичным формулам (4.21), осуществив доразбиение ячейки σ_i на систему ячеек второго уровня σ_i^p и введя сглаживающую функцию θ_ε :

$$\int_{\sigma_i} F(x-y) d\sigma_y = \sum_{p=1}^M F(x-y_j^p) \theta_\varepsilon(|x-y_j^p|) s_j^p, \quad (8.48)$$

доразбиение ячеек можно осуществляем по схеме, описанной в п. 5.2.

Рассмотрим вычисление $\vec{K}_0[\sigma_i, \vec{j}_i]$. Для этого выполним следующие преобразования, в которых предполагаем, что ячейка является плоской и применяем формулу Остроградского Гаусса:

$$\begin{aligned} \text{div} \int_{\sigma_i} \vec{j}_i F(x-y) d\sigma_y &= \int_{\sigma_i} \vec{j}_i \text{grad}_x F(x-y) d\sigma_y = \\ &= - \int_{\sigma_i} \vec{j}_i \text{grad}_y F(x-y) d\sigma_y = - \int_{\sigma_i} \text{Div}_y(\vec{j}_i F(x-y)) d\sigma_y = \\ &= - \int_{\sigma_i} \text{Div}_y(\vec{j}_i F(x-y)) d\sigma_y = - \int_{\partial\sigma_i} \vec{\nu}(y) F(x-y) d\sigma_y \end{aligned}$$

где $\partial\sigma_i$ – край ячейки, $\vec{\nu}(y)$ – вектор нормали к контуру $\partial\sigma_i$, лежащий в плоскости к ячейке и направленный наружу от ячейки, Div – дивергенция, вычисляемая в плоскости ячейки как от функции на этой плоскости. Заметим, что полученная формула справедлива и для неплоской ячейки, при этом вектор $\vec{\nu}(y)$ – вектор нормали к контуру $\partial\sigma_i$, лежащий в касательной плоскости к ячейке, построенной в данной точке, и направленный наружу от ячейки, Div – так называемая поверхностная дивергенция (см. [39]).

Тогда

$$\vec{K}_0[\sigma_i, \vec{j}_i](x) = - \int_{\partial\sigma_i} \vec{\nu}(y) \text{grad}_x F(x-y) d\sigma_y = \int_{\partial\sigma_i} \vec{\nu}(y) \vec{V}(x-y) d\sigma_y, \quad (8.49)$$

\vec{V} – функция, определяемая выражением (8.39). Интеграл выражения (8.49) можно вычислить приближенно численно, например, используя формулу прямоугольников (аппроксимируя контур $\partial\sigma_i$ системой коротких отрезков).

Теперь уравнение (8.45) аппроксимируем системой уравнений

$$\left(\vec{\tau}_i^k, \sum_{j=1}^n \vec{K}[\sigma_j, \vec{j}_j](x^i) \right) = \left(\vec{\tau}_i^k, \vec{f}(x^i) \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2. \quad (8.50)$$

Неизвестные векторы \vec{j}_i ищем в виде:

$$\vec{j}_i = j_i^1 \vec{\tau}_i^1 + j_i^2 \vec{\tau}_i^2. \quad (8.51)$$

Тогда систему уравнений (8.50) можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных j_i^k , $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2$:

$$\sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ m=1, 2}} a_{ij}^{km} j_j^m = f_i^k, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \quad (8.52)$$

$$a_{ij}^{km} = \left(\vec{\tau}_i^k, \vec{K}[\sigma_j, \vec{\tau}_j^m](x^i) \right), \quad f_i^k = \left(\vec{\tau}_i^k, \vec{f}(x^i) \right).$$

Решив систему (8.52), можно построить поверхностные токи \vec{j}_i , $i = 1, \dots, n$, по формулам (8.51). Далее можно рассчитать приближенное значение полного электрического поля вида (8.28) в любой точке пространства, используя формулу (8.44) для вторичного поля \vec{E} , где оператор $\vec{K}[\Sigma, \vec{j}]$ аппроксимируется выражением (8.47).

8.6 Рассеяние на диэлектрическом теле. Вывод объемных интегральных уравнений

8.6.1 Постановка задачи. Пусть диэлектрическое тело занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, границей которой является замкнутая поверхность Σ . Мы предполагаем, что электродинамические свойства диэлектрического тела определяются диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon = \varepsilon' \varepsilon_0$ и $\mu = \mu' \mu_0$, где ε_0 и μ_0 есть диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающей среды (являются константами), $\varepsilon' = \varepsilon'(x)$ и $\mu' = \mu'(x)$ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Задача рассматривается в монохроматической постановке. Напряженности электрического и магнитного полей должны, как и ранее, удовлетворять в области Ω , занятой диэлектриком, уравнениям Максвелла для пространственных составляющих этих полей:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x) = -i\omega \varepsilon \vec{E}(x), \quad (8.53)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x) = i\omega \mu \vec{H}(x). \quad (8.54)$$

8.6 Рассеяние на диэлектрическом теле. Вывод объемных интегральных уравнений

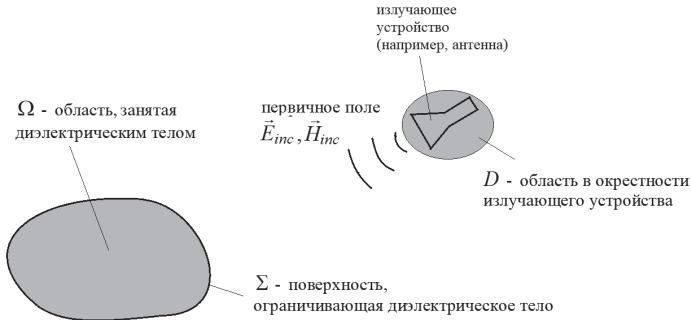


Рис. 8.2: Рассеяние на диэлектрическом теле

Будем предполагать, что неизвестное электромагнитное поле $\vec{E}(x)$, $\vec{H}(x)$ формируется при рассеянии заданного первичного поля $\vec{E}_{inc}(x)$, $\vec{H}_{inc}(x)$. В роли этого первичного поля может выступать плоская волна, определяемая формулами (8.29)–(8.30), либо иное поле, создаваемое некоторыми источниками излучения. В последнем случае будем предполагать, что источники излучения занимают некоторое множество D , которое отделено конечным расстоянием от области Ω . При этом первичное поле $\vec{E}_{inc}(x)$, $\vec{H}_{inc}(x)$ определено и удовлетворяет уравнениям (8.53)–(8.54) с $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$ всюду вне источников излучения (вне множества D), в том числе и в области Ω . В случае плоской волны, считаем, что D есть пустое множество.

В данной задаче мы будем трактовать поле $\vec{E}(x)$, $\vec{H}(x)$ как полное поле, это поле должно быть определено всюду вне источников излучения (множества D) и при этом вне диэлектрического тела должны выполняться уравнения (8.53)–(8.54) с $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$.

Пусть $\vec{E}_{sc}(x)$, $\vec{H}_{sc}(x)$ (scattered field) есть вторичное (рассеянное поле), определяемое всюду вне источников излучения соотношениями

$$\vec{E}_{sc}(x) = \vec{E}(x) - \vec{E}_{inc}(x), \quad \vec{H}_{sc}(x) = \vec{H}(x) - \vec{H}_{inc}(x). \quad (8.55)$$

При этом предполагается, что вторичное поле $\vec{E}_{sc}(x)$, $\vec{H}_{sc}(x)$ может быть продолжено на множество D (т.е. это поле определено и внутри источников излучения) так, что всюду вне диэлектрического тела (вне замыкания области Ω) это поле удовлетворяет уравнениям (8.53)–(8.54) с $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$. При этом вторичные поля $\vec{E}_{sc}(x)$, $\vec{H}_{sc}(x)$ должно удовлетворять условиям излучения на бесконечности в форме (8.23). На поверхности диэлектрика Σ полные поля $\vec{E}(x)$,

$\vec{H}(x)$ должны иметь краевые значения, одинаковые с обеих сторон поверхности.

Покажем, как данная задача может быть сведена к объемным интегральным уравнениям.

8.6.2 Идея преобразований. Основная идея применяемого подхода состоит в том, что бы записать уравнения (8.53)–(8.54) в виде:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x) = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}(x) + \vec{J}_E(x), \quad (8.56)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x) = i\omega\mu_0 \vec{H}(x) - \vec{J}_M(x), \quad (8.57)$$

где

$$\vec{J}_E(x) = -i\omega(\varepsilon' - 1)\varepsilon_0 \vec{E}(x), \quad (8.58)$$

$$\vec{J}_M(x) = -i\omega(\mu' - 1)\mu_0 \vec{H}(x). \quad (8.59)$$

Функции $\vec{J}_E(x)$ и $\vec{J}_M(x)$ называются объемными электрическими и магнитными токами, соответственно. Заметим, что эти функции непосредственно определены формулами (8.58) – (8.59) всюду вне источников излучения (вне множества D). При этом вне диэлектрического тела (вне области Ω) эти функции равны 0 ($\varepsilon' - 1 = \mu' - 1 = 0$). Поэтому мы можем считать, что эти функции определены во всем пространстве, доопределив их нулем в области D .

Теперь предположим, что $\vec{J}_E(x)$ и $\vec{J}_M(x)$ есть некоторые заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\vec{J}_E(x), \vec{J}_M(x) \in C^1[\bar{\Omega}], \quad \vec{J}_E(x) = \vec{J}_M(x) = 0 \text{ при } x \notin \bar{\Omega}. \quad (8.60)$$

Сначала рассмотрим вспомогательную задачу о решении уравнений (8.56)–(8.57) относительно полей $\vec{E}(x)$ и $\vec{H}(x)$ при заданных функциях $\vec{J}_E(x)$ и $\vec{J}_M(x)$, удовлетворяющих условиям (8.60). Требуется найти поля $\vec{E}(x)$ и $\vec{H}(x)$ в классе функций, непрерывных во всем пространстве, дифференцируемых всюду вне поверхности Σ (т.е. в областях Ω и $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$), удовлетворяющие уравнениям (8.56)–(8.57) всюду вне поверхности Σ и удовлетворяющие условию излучения (8.23) на бесконечности (т.е. с физической точки зрения ищем рассеянное поле, вызванное заданными объемными токами).

Такое решение будем нами представлено в виде интегрального линейного оператора от полей $\vec{J}_E(x)$ и $\vec{J}_M(x)$.

Наконец, подставляя в полученные интегральные представления для полей $\vec{E}(x)$ и $\vec{H}(x)$ токи $\vec{J}_E(x)$ и $\vec{J}_M(x)$ в виде (8.58)–(8.59), получим искомые интегральные уравнения.

8.6.3 Вспомогательные утверждения. Докажем теорему, в которой строится частное решение неоднородного уравнения Гельмгольца в ограниченной области. Эта теорема является обобщением теоремы 2.10, в которой речь идет о построении решения уравнения Пуассона, и доказывается аналогично.

Теорема 8.1. Пусть Ω – ограниченная область в пространстве R^3 , границей которой является кусочно-гладкая замкнутая поверхность Σ (как и ранее предполагаем, что в области Ω выполнена формула Остроградского Гаусса, см. замечание к теореме 2.1). Рассмотрим уравнение относительно комплексной функции $u(x)$

$$(Lu)(x) \equiv \Delta u(x) + k^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (8.61)$$

где $f \in C^1[\bar{\Omega}]$ – заданная функция с комплексными значениями. Тогда функция

$$u(x) = - \int_{\Omega} f(y) F(x-y) dy, \quad F(x-y) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad r = |x-y|, \quad (8.62)$$

является решением уравнения (8.61) в области Ω в классе функций $u \in C^1[\bar{\Omega}] \cap C^2[\Omega]$.

Кроме того, эта функция определена при $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяет условиям $u \in C^1[\mathbb{R}^3]$, $u \in C^\infty[\mathbb{R}^3/\bar{\Omega}]$, и удовлетворяет равенству

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^3/\bar{\Omega}. \quad (8.63)$$

Доказательство. Для любого $x \in \mathbb{R}^3$ интеграл в выражении (8.62) сходится и значит функция u определена этим выражением при всех $x \in \mathbb{R}^3$, причем, $u \in C[\mathbb{R}^3]$ (см. теорему 3.1).

Сразу заметим, что при $x \in \mathbb{R}^3/\bar{\Omega}$ функция u бесконечно дифференцируема под знаком интеграла и удовлетворяет равенству (8.63), в силу выбора функции $F(x-y)$.

Далее, при любом $x \in \mathbb{R}^3$ выражение для функции u можно продифференцировать под знаком интеграла. Пусть

$$I_i(x) = - \int_{\Omega} f(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial x_i} dy, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8.64)$$

Заметим, что функция

$$K(x, y) = f(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial x_i}$$

определена при $y \in \bar{\Omega}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$, и представляется в виде

$$K(x, y) = \frac{K^*(x, y)}{|x-y|^2},$$

где $K^*(x, y)$ – функция, определенная и непрерывная при $y \in \bar{\Omega}$, $x \in \mathbb{R}^3$. При этом для любого замкнутого ограниченного множества $B \subset \mathbb{R}^3$ функция $K^*(x, y)$ равномерно непрерывна по совокупности аргументов на множестве $B \times \bar{\Omega}$. Тогда по лемме 3.1 $I_i(x) \in C[B]$. Интеграл $I_i(x)$ сходится равномерно по x на таком множестве B , а значит, в силу произвольности множества B , $\partial u / \partial x_i = I_i \in C[\mathbb{R}^3]$, $u \in C^1[\mathbb{R}^3]$.

Далее, для любого $x \in \Omega$, можем записать:

$$I_i(x) = - \int_{\Omega} f(y) \frac{\partial F(x-y)}{\partial y_i} dy = I_{i1}(x) + I_{i2}(x),$$

$$I_{i1}(x) = - \int_{\Omega} \frac{\partial f(y) F(x-y)}{\partial y_i} dy,$$

$$I_{i2}(x) = \int_{\Omega} F(x-y) \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} dy.$$

При этом $I_{i2}(x) \in C^1[\Omega]$, что доказывается тем же рассуждением, что и для при доказательстве дифференцируемости функции $u(x)$. А для интеграла $I_{i1}(x)$ справедливо выражение (см. формулу (2.2)):

$$I_{i1}(x) = - \int_{\Omega} \frac{\partial f(y) F(x-y)}{\partial y_i} dy = - \int_{\Sigma} f(y) F(x-y) n_i(y) dy,$$

$n_i(y) = 1, 2, 3$ – координаты вектора внешней нормали к поверхности Σ в точке y . Тогда $I_{i1} \in C^\infty(\Omega)$. Тем самым мы доказали, что $u \in C^2[\Omega]$.

Наконец, докажем, что рассматриваемая функция u есть решение уравнения (8.61) в области Ω . Для этого возьмем произвольный замкнутый шар $B \subset \Omega$ и финитную функцию $v \in C^2(\mathbb{R}^3)$ такую, что $v \equiv 0$ вне шара B . При этом функция v и ее первые и вторые частные производные равны нулю на сфере ∂B , ограничивающей шар B . Тогда, в силу 2-й формулы Грина (теорема 2.5) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Lu(x)v(x)dx &= \int_B Lu(x)v(x)dx = \int_B u(x)Lv(x)dx = \\ &= - \int_B \left(\int_B F(x-y)f(y)dy \right) Lv(x)dx. \end{aligned}$$

8.6 Рассеяние на диэлектрическом теле. Вывод объемных интегральных уравнений

Меняя порядок интегрирования в последней формуле, можем записать:

$$\int_{\Omega} Lu(x)v(x)dx = - \int_B \left(\int_B F(x-y)Lv(x)dx \right) f(y)dy.$$

Но по третьей формуле Грина (теорема 2.6) имеем:

$$v(y) = - \int_B F(x-y)Lv(x)dx, \quad y \in B.$$

Тогда справедливо равенство

$$\int_{\Omega} Lu(x)v(x)dx = \int_B f(y)v(y)dy = \int_{\Omega} f(y)v(y)dy.$$

Последнюю формулу можно переписать в виде:

$$\int_{\Omega} (Lu(x) - f(x))v(x)dx = 0.$$

В силу произвольности выбора шара B и функции v , заключаем, что

$$Lu(x) - f(x) \equiv 0 \text{ при } x \in \Omega,$$

что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Из теоремы 8.1 сразу следует следующая теорема.

Теорема 8.2. Пусть Ω – ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^3 , границей которой является кусочно-гладкая замкнутая поверхность. Рассмотрим уравнение относительно комплексного векторного поля $\vec{j}(x)$

$$\Delta \vec{j}(x) + k^2 \vec{j}(x) = \vec{f}(x), \quad x \in \Omega, \quad (8.65)$$

где $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $f_i \in C^1[\bar{\Omega}]$, $i = 1, 2, 3$, – заданное комплексное поле.

Тогда поле

$$\vec{j}(x) = - \int_{\Omega} \vec{f}(y)F(x-y)dy, \quad F(x-y) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad r = |x-y|, \quad (8.66)$$

является решением уравнения (8.65) в области Ω в классе функций $\vec{j}(x) = (j_1(x), j_2(x), j_3(x))$, $j_i \in C^1[\bar{\Omega}] \cap C^2[\Omega]$, $i = 1, 2, 3$.

Кроме того, поле \vec{j} определено при $x \in \mathbb{R}^3$, удовлетворяет условиям $j_i \in C^1[\mathbb{R}^3]$, $j_i \in C^\infty[\mathbb{R}^3/\bar{\Omega}]$, $i = 1, 2, 3$, и удовлетворяет равенству

$$\Delta \vec{j}(x) + k^2 \vec{j}(x) = 0 \quad (8.67)$$

при $x \in \mathbb{R}^3/\bar{\Omega}$.

8.6.4 Выражение электрического и магнитного полей через электрические и магнитные токи для вспомогательной задачи. Рассмотрим систему (8.56)–(8.57), где токи $\vec{J}_E(x)$ и $\vec{J}_M(x)$ заданы. Обращаем внимание, что здесь мы ищем решение – поля \vec{E} и \vec{H} , определенные и в области Ω и в области $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$, непрерывные на поверхности Σ и удовлетворяющие условию излучения (8.23) на бесконечности.

А) Случай нулевых магнитных токов. Сначала рассмотрим случай $\vec{J}_M(x) \equiv 0$, т.е. рассмотрим систему

$$\text{rot } \vec{H}(x) = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}(x) + \vec{J}_E(x), \quad (8.68)$$

$$\text{rot } \vec{E}(x) = i\omega\mu_0 \vec{H}(x), \quad (8.69)$$

где $x \in \mathbb{R}^3/\Sigma$, $\vec{J}_E \in C^1[\bar{\Omega}]$, и полагаем, что $\vec{J}_E = 0$ при $x \in \mathbb{R}^3/\bar{\Omega}$.

Будем искать магнитное поле в виде

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A}, \quad (8.70)$$

где \vec{A} – неизвестный векторный потенциал. Тогда из уравнения (8.69) имеем:

$$\text{rot } \vec{E} = i\omega \text{rot } \vec{A}$$

и тогда электрическое поле представляется в виде

$$\vec{E} = i\omega \vec{A} - \text{grad } \varphi, \quad (8.71)$$

где φ – некоторая неизвестная функция, называемая скалярным потенциалом. Подставляя выражения (8.70) и (8.71) в уравнение (8.68) и домножая его на μ_0 , получаем:

$$\text{rot rot } \vec{A} = k^2 \vec{A} + i\omega\varepsilon_0\mu_0 \text{grad } \varphi + \mu_0 \vec{J}_E, \quad k^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0.$$

Используя формулу

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}, \quad (8.72)$$

последнее уравнение запишем в виде:

$$-\Delta \vec{A} + \text{grad div } \vec{A} = k^2 \vec{A} + i\omega\varepsilon_0\mu_0 \text{grad } \varphi + \mu_0 \vec{J}_E$$

8.6 Рассеяние на диэлектрическом теле. Вывод объемных интегральных уравнений

или

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} - i\omega\varepsilon_0\mu_0\varphi \right) - \mu_0 \vec{J}_E.$$

В выборе векторного и скалярного потенциалов имеется значительный произвол. Попробуем искать эти потенциалы так, чтобы выполнилось равенство:

$$\text{div} \vec{A} - i\omega\varepsilon_0\mu_0\varphi = 0. \quad (8.73)$$

Заметим, что последнее условие известно в физике как условие калибровки Лоренца. Тогда мы имеем уравнение:

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_E. \quad (8.74)$$

По теореме 8.2 одним из его решений является функция

$$\vec{A}(x) = \mu_0 \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy. \quad (8.75)$$

Теперь из условия калибровки (8.73) запишем выражение для скалярного потенциала:

$$\varphi = -\frac{i}{\omega\varepsilon_0\mu_0} \text{div} \vec{A} = -\frac{i}{\omega\varepsilon_0} \text{div} \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy. \quad (8.76)$$

(8.18-1) Подставляя найденные выражения для потенциалов в формулу (8.71), имеем:

$$\vec{E} = \frac{i}{\omega\varepsilon_0} \text{grad} \text{div} \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy + i\omega\mu_0 \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy.$$

Последнее выражение можно, также, записать в виде:

$$\vec{E} = \frac{i}{\omega\varepsilon_0} \left\{ \text{grad} \text{div} \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy + k^2 \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy \right\}. \quad (8.77)$$

Тогда из формулы (8.70) имеем:

$$\vec{H}(x) = \text{rot} \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy. \quad (8.78)$$

Из формул (8.71)–(8.76) и теоремы 8.2, примененной к полю \vec{A} , следует, что поля \vec{E} и \vec{H} непрерывны во всем пространстве \mathbb{R}^3 и дифференцируемы всюду вне поверхности Σ .

Наконец, непосредственной проверкой убедимся, что построенные поля (8.73), (8.77) действительно удовлетворяют уравнениям (8.68)–(8.69). В самом деле, из формулы (8.77) имеем:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{ik^2}{\omega\varepsilon_0} \operatorname{rot} \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy = i\omega\mu_0 \vec{H}(x),$$

т.е. уравнение (8.69) выполнено. Из формулы (8.78) можем записать:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A},$$

где \vec{A} есть поле, определяемое формулой (8.75). Но тогда

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x) = \frac{1}{\mu_0} \left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \right).$$

При этом для поля \vec{A} выполнено уравнение (8.74), причем, всюду вне поверхности Σ , если считать $\vec{J}_E = 0$ при $x \in \mathbb{R}^3/\bar{\Omega}$. Тогда легко получить, что

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x) = \frac{1}{\mu_0} \left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} + k^2 \vec{A} + \mu_0 \vec{J}_E \right), \quad x \in \mathbb{R}^3/\Sigma.$$

Отсюда, с учетом формул (8.75) и (8.77), следует уравнение (8.68).

Б) Случай нулевых магнитных токов. Теперь рассмотрим случай $\vec{J}_E(x) \equiv 0$, т.е. рассмотрим систему

$$\operatorname{rot} \vec{H}(x) = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}(x), \quad (8.79)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x) = i\omega\mu_0 \vec{H}(x) - \vec{J}_M(x), \quad (8.80)$$

где $x \in \mathbb{R}^3/\Sigma$, $\vec{J}_M \in C^1[\bar{\Omega}]$, и полагаем, что $\vec{J}_M = 0$ при $x \in \mathbb{R}^3/\bar{\Omega}$.

Будем искать электрическое поле в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{rot} \vec{C}, \quad (8.81)$$

где \vec{C} – неизвестный векторный потенциал. Тогда поле \vec{H} представляется в виде

$$\vec{H} = -i\omega \vec{C} - \operatorname{grad} \psi \quad (8.82)$$

где ψ – некоторый скалярный потенциал. Подставляя выражения (8.81) и (8.82) в уравнение (8.80) и, домножая его на ε_0 , получаем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{C} = k^2 \vec{C} + i\omega\varepsilon_0 \mu_0 \operatorname{grad} \psi - \varepsilon_0 \vec{J}_M, \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0.$$

8.6 Рассеяние на диэлектрическом теле. Вывод объемных интегральных уравнений

Далее, используя формулу (8.72), последнее выражение переписываем в виде:

$$\Delta \mathcal{T} + k^2 \vec{C} = -grad \left(i\omega \varepsilon_0 \mu_0 \psi + div \vec{C} \right) + \varepsilon_0 \vec{J}_M.$$

Вводим условие калибровки, по которому скалярный потенциал имеет вид:

$$\psi = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} div \vec{C}$$

и получаем уравнение для векторного потенциала:

$$\Delta \vec{C} + k^2 \vec{C} = \varepsilon_0 \vec{J}_M.$$

Его решение берем в виде

$$\vec{C}(x) = -\varepsilon_0 \int_{\Omega} \vec{J}_M(y) F(x-y) dy.$$

При этом

$$\psi = -\frac{i}{\omega \mu_0} div \int_{\Omega} \vec{J}_M(y) F(x-y) dy,$$

и для полей \vec{E} и \vec{H} получаем выражения:

$$\vec{H}(x) = \frac{i}{\omega \mu_0} \left\{ grad div \int_{\Omega} \vec{J}_M(y) F(x-y) dy + k^2 \int_{\Omega} \vec{J}_M(y) F(x-y) dy \right\},$$

$$\vec{E}(x) = -rot \int_{\Omega} \vec{J}_M(y) F(x-y) dy.$$

С) Общий случай. Решение системы (8.56)-(8.57) получим как сумму решений систем (8.68)-(8.69) и (8.79)-(8.80):

$$\vec{E} = \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \left\{ grad div \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy + k^2 \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy \right\} - rot \int_{\Omega} \vec{J}_M(y) F(x-y) dy, \quad (8.83)$$

$$\vec{H}(x) = rot \int_{\Omega} \vec{J}_E(y) F(x-y) dy +$$

$$+ \frac{i}{\omega \mu_0} \left\{ grad div \int_{\Omega} \vec{J}_M(y) F(x-y) dy + k^2 \int_{\Omega} \vec{J}_M(y) F(x-y) dy \right\}. \quad (8.84)$$

8.6.5 Запись объемных интегральных уравнений. Теперь вернемся к задаче рассеяния, поставленной в п.8.6.1. Полное поле ищем в виде (8.55). Поскольку первичное поле $\vec{E}_{inc}(x)$, $\vec{H}_{inc}(x)$ определено и удовлетворяет в области Ω уравнениям

$$\text{rot } \vec{H}_{inc}(x) = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_{inc}(x),$$

$$\text{rot } \vec{E}_{inc}(x) = i\omega\mu_0\vec{H}_{inc}(x),$$

мы можем переписать соотношения (8.56)-(8.57) в виде

$$\text{rot } \vec{H}_{sc}(x) = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_{sc}(x) + \vec{J}_E(x), \quad (8.85)$$

$$\text{rot } \vec{E}_{sc}(x) = i\omega\mu_0\vec{H}_{sc}(x) - \vec{J}_M(x), \quad (8.86)$$

где токи $\vec{J}_E(x)$ и $\vec{J}_M(x)$ выражаются в виде (8.58)–(8.59) через полные электрическое и магнитное поля. При этом рассеянное поле $\vec{E}_{sc}(x)$ \vec{H}_{sc} должно быть определено и непрерывно во всем пространстве, удовлетворяя уравнениям 8.85–8.86 в области Ω и в области $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ (с $\vec{J}_E(x) = 0$ и $\vec{J}_M(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$) и удовлетворять условию излучения (8.23) на бесконечности.

Это вторичное поле связано с токами $\vec{J}_E(x)$ и $\vec{J}_M(x)$ интегральными соотношениями (8.83)-(8.84). Тогда соотношения

$$\vec{E} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{sc}, \quad \vec{H} = \vec{H}_{inc} + \vec{H}_{sc},$$

выполненные в области Ω , можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) &= \vec{E}_{inc}(x) + \text{grad div} \int_{\Omega} (\varepsilon'(y) - 1)\vec{E}(y)F(x-y)dy + \\ &+ k^2 \int_{\Omega} (\varepsilon'(y) - 1)\vec{E}(y)F(x-y)dy + \\ &+ i\omega\mu_0 \text{rot} \int_{\Omega} (\mu'(y) - 1)\vec{H}(y)F(x-y)dy \end{aligned} \quad (8.87)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(x) &= \vec{H}_{inc}(x) - i\omega\varepsilon_0 \text{rot} \int_{\Omega} (\varepsilon'(y) - 1)\vec{E}(y)F(x-y)dy + \\ &+ \text{grad div} \int_{\Omega} (\mu'(y) - 1)\vec{H}(x)F(x-y)dy + \\ &+ k^2 \int_{\Omega} (\mu'(y) - 1)\vec{H}(x)F(x-y)dy. \end{aligned} \quad (8.88)$$

Равенства (8.87)-(8.88) мы рассматриваем как уравнения относительно неизвестных функций $\vec{E}(x)$ и $\vec{H}(x)$, определенных в области Ω , т.е уравнения рассматриваются только при $x \in \Omega$. Это есть объемные интегральные уравнения. Численное решение этих уравнений требует специальных подходов, на которых мы в нашей книге не

8.7 О методе интегральных уравнений в задачах электромагнитного рассеяния

останавливаемся. Методы численного решения этих уравнений можно найти в книгах и статьях [36], [37], [41].

После того, как поля \vec{E} и \vec{H} найдены из этих уравнений в области Ω , мы можем найти эти поля и всюду вне области Ω , рассматривая формулы (8.87)-(8.88) для $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$ как выражения для этих полей через их значения в области Ω .

8.7 О методе интегральных уравнений в задачах электромагнитного рассеяния

Мы немного остановились только на некоторых задачах электродинамики. В частности, нами были рассмотрены задачи рассеяния монохроматических электромагнитных волн на идеально проводящих объектах. На примере этих задач проиллюстрируем достоинство такого подхода.

Если при моделировании рассеяния внешнего поля пытаться решить численно непосредственно краевую задачу для уравнений Максвелла (8.11)-(8.12) в исходной форме, возникают 2 серьезные проблемы.

Первая проблема связана с тем, что задача является внешней и для ее решения нужно строить расчетную сетку в области больших размеров вне тела. При этом, у нас есть условия на бесконечности, которые несколько труднее выполнить, чем в случае уравнения Лапласа. Решения однородного уравнения Гельмгольца (как скалярного, так и векторного) имеют на бесконечности порядок затухания $O(1/r)$, а не $O(1/r^2)$ как для уравнения Лапласа, здесь $r = |x|$, x – точка, в которой рассматривается поле. Кроме того, условие на бесконечности вида (8.23) сложнее, чем просто условие затухания. Это приводит к тому, что помимо увеличения расчетной области, необходимо еще и использовать специальные аппроксимации условий на внешней границе расчетной области, имитирующие условия излучения на бесконечности и не допускающие возникновения в численном решении паразитных отраженных от этой границы волн. Это отдельная проблема, которой нет при использовании метода интегральных уравнений.

Вторая проблема состоит в том, что в задачах рассеяния имеется требование к расчетной сетке – размер ячеек разбиения должен быть существенно меньше длины волны. Это требование одинаково и в случае решения задачи рассеяния непосредственно в пространственной области, и при решении граничного интегрального уравнения. Однако, требование малости шага сетки по отношению к длине волны часто бывает определяющим при построении сетки. В этом случае, в отличие, например, от задач аэродинамики, нельзя использовать неравномерные сетки, которые сгущаются вблизи тела, и являются разреженными на больших расстояниях от тела.

Эти обстоятельства делают применение в задачах рассеяния волн метода граничных интегральных уравнений предпочтительным, по сравнению с методами, в которых решаются уравнения Максвелла непосредственно.

Мы описали схему решения задач рассеяния электромагнитных волн на идеально проводящих телах. Но применение метода граничных интегральных уравнений не ограничивается только этим классом задач.

В случае задач рассеяния на комбинациях идеально проводящих и кусочно-однородных диэлектрических тел, возможен подход, при котором задача сводится к решению интегральных уравнений, записанных на идеально проводящих поверхностях и на границах раздела диэлектрических областей с различными физическими свойствами. В этом случае можно по-прежнему использовать метод кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций. Такой подход описан в статьях [52], [17], [59].

Другой подход к численному решению граничных интегральных уравнений для поверхностных токов основан на применении конечно-элементного варианта метода Галеркина с так называемыми базисными функциями типа RWG – название по фамилиям авторов статьи, к которой восходит этот метод Rao S.M., Wilton D.R., Glisson A.W. [57]. В настоящее время этот метод широко распространен и применяется для различных классов задач рассеяния. Описание развития этого метода для задач на идеально проводящих телах можно найти в [63]), [51]. В последней книге рассмотрены, так же, задачи рассеяния на кусочно-однородных диэлектриках и их комбинациях с идеальными проводниками, а так же некоторые задачи изучения антенн. Вопросы обоснования этого метода рассмотрены в работах Ильинского А.С. и Смирнова Ю.Г. [10], [40].

В случае задач рассеяния для неоднородных диэлектрических тел (равно как и кусочно-однородных, в том числе и в комбинации с идеально проводящими объектами), может применяться метод объемных интегральных уравнений. Для случая, когда рассматривается только диэлектрический объект, объемные уравнения были получены в разделе 8.6. Более подробно такие уравнения рассматриваются в книгах Самохина А.Б. [36], [37], где так же описаны подходы к численному решению этих уравнений с применением метода коллокаций. Описание применения метода Галеркина для таких уравнений с базисными функциями, являющимися аналогами функций RWG, можно найти в книге Смирнова Ю.Г. и Цупака А.А. [41].

Так же обратим внимание на книги [8], [14], где рассматриваются различные приложения метода интегральных уравнений к задачам электродинамики.

Литература

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. Перев. с франц. — М.: Наука, 1978. — 352 с.
2. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях (и их приложение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике). — М.: Наука, 1985. — 256 с.
3. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. — М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978. — 352 с.
4. Бойков И.В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов: Монография. Часть вторая. Гиперсингулярные интегралы. — Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. — 252 с.
5. Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. — М.: Янус-К, 2001. — 508 с.
6. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Учеб. пособие. — Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. — 296 с.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.:Наука, 1981. — 512 с.
8. Галишникова Т. Н., Ильинский А. С. Метод интегральных уравнений в задачах дифракции волн. — М.: МАКС Пресс, 2013. — 248 с.
9. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы // ДАН. — 1984. — Т. 276, № 1. — С. 96–100.

10. Ильинский А.С. , Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции. — М.: ИПРЖ, 1996. — 176 с.
11. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. 3-е изд. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
12. Гутников В. А., Лифанов И. К., Сетуха А. В. О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. — 2006. — № 4. — С. 78–92.
13. Даева С. Г., Сетуха А. В. О численном решении краевой задачи неймана для уравнения Гельмгольца методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Вычислительные методы и программирование. — 2015. — Т. 16. — С. 421–435.
14. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. - М.: МАКС Пресс, 2013. — 2008 с.
15. Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье-Стокса // ДАН — 2004. — т.399, №1. — С. 42-46
16. Захаров Е. В., Рыжаков Г. В., Сетуха А. В. Численное решение трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на системе идеальнопроводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 9. — С. 1253–1263
17. Захаров Е.В., Сетуха А.В., Безобразова Е.Н. Метод гиперсингулярных интегральных уравнений в трехмерной задаче дифракции электромагнитных волн на кусочно-однородном диэлектрическом теле. // Дифференциальные уравнения, 2015, том 51, № 9, с. 1206-1219.
18. Зорич В. А. Математический анализ. Ч.1. Изд. 10-е, испр. — М: МЦНМО, 2019. —564 с.
19. Зорич В. А. Математический анализ. Ч.2. Изд. 9-е, испр. — М: МЦНМО, 2019. —676 с.
20. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Начальный курс. — М: Изд-во МГУ, 1985. — 662 с.
21. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Продолжение курса. — М:Изд-во МГУ, 1987. — 358 с.
22. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 572 с.

23. Колтон Д, Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. — Пер. с англ. М.: Мир, 1987. — 311 с.
24. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа (в 2-х томах). — М.: Высш. школа, 1981. — Т.1. — 687 с. — Т.2. — 584 с.
25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. Т. 6 Гидродинамика. — 3-е изд. перераб. — М.: Наука, 1986. — 736 с.
26. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО "Янус 1995. - 520 с.
27. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учебник для вузов. — 7-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с
28. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — Л.: Физматлит, 1962. — 256 с.
29. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. — М: Наука, 1981. — 416 с.
30. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1968. — 513 с.
31. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. Учебное пособие. Изд. 2-е перераб. и доп. — М.: Наука, 1984. — 344 с.
32. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений / Под ред. О. А. Олейник. — 4-е изд., испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 136 с.
33. Писарев И. В., Сегуха А. В. Снесение граничного условия на срединную поверхность при численном решении краевой задачи линейной теории крыла // Вычислительные методы и программирование. — 2014. — Т. 15. — С. 109–120.
34. Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика. В 2-х — М.: ОНТИ НТКП СССР, 1933 – 1935. — Т.1 — 223 с., Т.2 — 313 с.
35. Рыжаков Г. В., Сегуха А. В. О сходимости численной схемы типа метода вихревых рамок на замкнутой поверхности с аппроксимацией формы поверхности. // Дифференциальные уравнения, том 48, № 9, 2012. — с. 1327-1336.
36. Самохин А. Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. — М.: Радио и связь, 2001. — 160 с.

37. Самохин А.Б. Объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики. — М.:Техносфера, 2021. — 218 с.
38. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. Учеб.: Для вузов. — 6-е изд. — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005. 336 с.
39. Сетуха А.В. Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения. — М.:Аргатак-Медиа, 2014. — 256 с.
40. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. — Пенза: Информационно издательский центр ПензГУ, 2009. — 268 с.
41. Смирнов, Ю. Г., Цупак А.А. Математическая теория дифракции акустических и электро- магнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. — М.: КноРус, 2016. — 224 p.
42. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. — М.: Мир, 1977. — 349 с.
43. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 798 с.
44. Тыртышников Е. Е. Методы численного анализа: уч. пособ. — М.: Академия, 2007. — 320 с.
45. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3 — М.:Наука, 1966. — 656 с.
46. Хёнл Х., Мауэ А., Веспфаль К. Теория дифракции (пер. с немецкого). — М.: Мир, 1964. — 428 с.
47. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. — Л.:Судостроение. — 1989. — 304 с.
48. Aparinov A. A., Setukha A. V., Zhelannikov A. I. Numerical simulation of separated flow over three-dimensional complex shape bodies with some vortex method // AIP Conference Proceedings. — 2014. — Vol. 1629. — P. 69–76.
49. Barnes J., Hut P. A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm // Nature, 1986. — V. 324, No. 4. — P. 446–449.
50. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. Vortex Methods: Theory and Practice. — Cambridge: Cambridge University Press, - 2000. - 320 p.
51. Gibson W. The Method of Moments in Electromagnetics, Second edition. — CRC Press, 2014. — 450 p.

52. Davydov A. G., Zakharov E. V., Pimenov Yu. V. Hypersingular integral equations for the diffraction of electromagnetic waves on homogeneous magneto-dielectric bodies // *Computational Mathematics and Modeling*. — 2006. — V. 17, No 2. — p. 97-104.
53. Ergul O., Gurel L. The Multilevel Fast Multipole Algorithm (MLFMA) for Solving Large-Scale Computational Electromagnetics Problems. — IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, John Wiley and Sons, Ltd. — 2014.
54. Hackbusch, W.: A Sparse Matrix Arithmetic Based on H-Matrices. Part I: Introduction to H-Matrices. // *Computing*. — 1999. V.62. — P. 89–108.
55. Katz J., Plotcin A. Low-speed aerodynamics. Cambridge Aerospace Series (No. 13), 2nd ed. — New York: Cambridge University Press, 2001. — 613 c.
56. Mimeau, C.; Mortazavi, I. A Review of Vortex Methods and Their Applications: From Creation to Recent Advances // *Fluids*. — 2021. — V 6, No 68. (<https://doi.org/10.3390/fluids6020068>)
57. Rao S.M., Wilton D.R., Glisson A.W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. — 1982. — v. AP-30, no. 3. — pp. 409–418.
58. Rokhlin V. Rapid solution of integral equations of classical potential theory // *J. Comput. Physics*. — 1985. — V. 60. — P. 187-207
59. Setukha A. V., Bezobrazova E. N. The method of hypersingular integral equations in the problem of electromagnetic wave diffraction by a dielectric body with a partial perfectly conducting coating // *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. — 2017. — Vol. 32, no. 6. — P. 371–380.
60. Setukha A., Fetisov S. The method of relocation of boundary condition for the problem of electromagnetic wave scattering by perfectly conducting thin objects // *Journal of Computational Physics*. — 2018. — Vol. 373. — P. 631–647.
61. Tyrtshnykov E.E. Mosaic skeleton approximations // *Calcolo*. — 1996. — V. 33. № 1–2. — P. 47–57.
62. Tyrtshnykov E. Incomplete cross approximation in the mosaic-skeleton method // *Computing*. — 2000. — v. 64, no. 4. — P. 367-380.
63. Volakis J. L., Sertel K. Integral equation methods for electromagnetics. — SciTech Publishing, 2012. — 560 p.

Предметный указатель

А

абсолютная сходимость
интеграла — 32, 67
адиабатическое течение — 265
атлас поверхности — 20

Б

безвихревое течение — 234
безотрывное обтекание — 250

В

вихревая нить — 161
вихревой след — 244, 250
вихревой слой — 128, 161
вихрь (точечный) — 124
волновое уравнение — 265
волновое число — 265-266, 281
волновой вектор — 284

Г

главное значение
интеграла Коши — 54, 131
гладкая поверхность — 21
гиперсингулярный
интеграл — 58

Д

двумерный ротор
вектора — 74

двумерный ротор
функции — 96
диаметр множества — 14
диаметр разбиения — 14, 16
диполь — 77
диэлектрическая
проницаемость — 277
диэлектрическая
проницаемость
комплексная — 278

Ж

жесткое тело — 270

З

закон Бернулли — 235
закон Био-Савара — 96, 161
закон Кулона — 91
замкнутая кривая — 17

И

идеальная несжимаемая
жидкость — 234
идеальная сжимаемая
жидкость — 264
идеальный проводник — 284
измеримое
множество — 13, 15
индукция магнитного
поля — 276

индукция электрического поля — 276
интеграл Коши — 54, 130
интеграл Римана — 13
интегральная сумма — 14, 16
интеграл в смысле конечной части по Адамару — 58, 59
источник (точечный) — 91, 123

К

компактный оператор — 173
конечные элементы — 191
коэффициент давления — 261
краевая задача Дирихле — 201
краевая задача Неймана — 201
краевые значения градиента потенциала двойного слоя — 138, 162
краевые значения градиента потенциала простого слоя — 137, 154
краевые значения нормальной производной — 102
краевые значения потенциала двойного слоя — 112
краевые значения потенциала простого слоя — 107
краевые значения функции — 101
край поверхности — 19
кратный интеграл — 13
криволинейный интеграл 1-го рода — 17
кусочно-гладкая кривая — 18
кусочно-гладкая поверхность — 24
кусочно-линейная аппроксимация — 193

кусочно-непрерывная функция — 28
кусочно-постоянная аппроксимация — 176, 191

Л

линейный интегральный оператор — 48
линия отрыва — 251
локальная карта поверхности — 20

М

магнитная постоянная — 277
магнитная проницаемость — 277
мажорантный признак сходимости интеграла — 31
мера Жордана — 13, 15
метод Бубнова-Галеркина — 190
метод вихревых рамок — 232, 257
метод Галеркина — 189
метод Галеркина-Петрова — 190
метод дискретных вихрей — 248
метод коллокаций — 176
метрический тензор (поверхности) — 142
монохроматическое решение — 265
модуль непрерывности — 48
мягкое тело — 271

Н

напряженность магнитного поля — 276
напряженность электрического поля — 276
непрерывность по Гельдеру — 42

несобственный
интеграл — 28, 63
несобственный интеграл
2-го рода — 62
нормаль к поверхности — 21
нормальная производная
потенциала
простого слоя — 119

О

ориентация края
поверхности — 70
ориентированная
гладкая поверхность — 21
ориентированная
кусочно-гладкая
поверхность — 70
ограниченный оператор — 48
ортогональная
проекция — 188
отмеченное разбиение — 16

П

парадокс Д'Аламбера — 244
плоская волна — 266, 283
поверхность — 19
поверхностная
дивергенция — 289
поверхностный интеграл
1-го рода — 27
полярная особенность — 28
полярное ядро — 49
потенциал
диполя — 76
потенциал точечного
заряда — 73
потенциальное
обтекание — 239
правильные краевые
значения нормальной
производной — 102
проводимость среды — 278
пространство H^α — 44

Р

разбиение множества — 15
разложение Гельмгольца — 94
размерность множества — 28
разомкнутая кривая — 17

С

сапог Шварца — 183
сглаживающий
множитель — 186
сингулярный интеграл
в смысле главного
значения — 54, 56
скалярное произведение
с весом — 187
скорость звука — 265, 267
сопряженные
операторы — 173
союзное уравнение — 172
специальная система
координат — 37
средняя кривизна
поверхности — 146
стандартный радиус
кривой — 34
стереографическая
проекция — 22
сферическая волна — 267

Т

телесный угол — 216
теорема Жуковского — 245
теоремы Фредгольма — 173
тестовые функции — 193
триангуляция
поверхности — 182

У

уравнение
Гельмгольца — 73, 200
уравнение Лапласа — 73, 200
уравнение
неразрывности — 234

уравнение Пуассона — 75
уравнение Эйлера — 234
уравнения Максвелла — 276
уравнения Максвелла для
монохроматического
случая — 278
уравнения
Фредгольма — 171, 172
условие Гельдера — 42
условие Липшица — 42
условие
Чаплыгина-
Жуковского — 245
условия Зоммерфельда
(излучения) — 74, 268

Ф

финитная функция — 85
формула Грина
(для циркуляции
вектора) — 71
формула Грина (3-я) — 78
формула

Остроградского-Гаусса — 68
формула Стокса — 73
формулы Грина
(для дифференциального
оператора) — 72
формулы Сохоцкого — 134

Ц

центр масс — 179

Э

электрическая
постоянная — 277
элементарная кривая — 17
элементарная разомкнутая
поверхность — 23

Я

якобиан
(поверхностный) — 27, 142

Оглавление

Предисловие	3
Введение	6
1 Интегралы и интегральные операторы	13
1.1 Интегралы по различным областям интегрирования . .	13
1.1.1 Кратные интегралы.	13
1.1.2 Криволинейные интегралы.	17
1.1.3 Поверхностные интегралы 1-го рода. Задание поверхностей.	19
1.1.4 О некоторых общих свойствах интегралов. . .	28
1.2 Несобственные интегралы с полярной особенностью .	28
1.2.1 Понятие о несобственном интеграле с полярной особенностью.	28
1.2.2 Несобственный кратный интеграл с полярной особенностью.	33
1.2.3 Несобственный криволинейный интеграл.	34
1.2.4 Несобственный поверхностный интеграл.	36
1.2.5 Равномерная ограниченность несобственных ин- тегралов.	40
1.3 Функции, непрерывные по Гельдеру	42
1.4 Линейные интегральные операторы с интегрируемым ядром	48
1.5 Сингулярный интеграл в смысле главного значения .	54
1.5.1 Сингулярный интеграл на отрезке.	54
1.5.2 Общее определение интеграла в смысле глав- ного значения. Кратный сингулярный интеграл.	56
1.6 Гиперсингулярный интеграл	58
1.7 Приложение к главе 1	62
2 Основные формулы теории потенциала	68
2.1 Основные интегральные теоремы	68
2.2 Формулы Грина для дифференциального оператора .	72

2.3	Уравнения Лапласа, Пуассона, Гельмгольца. Потенциалы	73
2.4	Решения однородных уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешней области	82
2.5	Решение уравнения Пуассона во всем пространстве	85
2.6	Восстановление векторного поля по ротору и дивергенции. Пространственный случай	89
2.7	Восстановление векторного поля по ротору и дивергенции. Плоский случай	94
2.8	Восстановление векторного поля по ротору и дивергенции. Область в границей	97
3	Поверхностные потенциалы	101
3.1	Понятие краевых значений	101
3.2	Некоторые вспомогательные утверждения	103
3.3	Непрерывность потенциала простого слоя	106
3.4	Краевые значения потенциала двойного слоя	108
3.4.1	Прямые значения потенциала двойного слоя.	108
3.4.2	Потенциал двойного слоя с плотностью равной 1.	109
3.4.3	Краевые значения потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью.	112
3.5	Нормальная производная потенциала простого слоя	119
3.6	Градиенты потенциалов. Плоский случай	122
3.6.1	Точечные источник и вихрь.	122
3.6.2	Выражения для градиентов потенциалов простого и двойного слоя через слой источников и вихревой слой.	126
3.6.3	Связь градиентов потенциалов простого и двойного слоя с аналитическими функциями и интегралом Коши.	128
3.6.4	Значения интеграла Коши на контуре интегрирования.	130
3.6.5	Краевые значения интеграла Коши на контуре интегрирования. Формулы Сохоцкого.	134
3.6.6	Краевые значения градиентов потенциалов простого и двойного слоя на плоскости.	136
3.6.7	Выражение для краевых значений градиента потенциала двойного слоя непосредственно через его плотность.	139
3.7	Градиенты потенциалов. Пространственный случай	142
3.7.1	Некоторые дополнительные свойства поверхностей. Поверхностный градиент. Средняя кривизна поверхности.	142
3.7.2	Формулы для поверхностных интегралов, содержащих поверхностный градиент.	147

3.7.3	Свойства контура, являющегося пересечением границы окрестности точки на поверхности с поверхностью.	149
3.7.4	Краевые значения градиента потенциала простого слоя.	154
3.7.5	Формула для градиента потенциала двойного слоя. Градиент потенциала двойного слоя уравнения Лапласа: вихревая нить, вихревой слой. .	158
3.7.6	Краевые значения градиента потенциала двойного слоя.	162
4	Уравнения Фредгольма. О численных методах	171
4.1	Уравнения Фредгольма. Теоремы Фредгольма	171
4.2	О численных методах решения интегральных уравнений	175
4.2.1	Общие замечания.	175
4.2.2	Метод коллокации с кусочно-постоянной аппроксимацией неизвестной функцией.	176
4.2.3	О разбиении области интегрирования на ячейки.	179
4.2.4	О приближенном вычислении интегралов по ячейкам.	185
4.2.5	Метод Галеркина. Конечно-элементная реализация.	187
4.3	Численное решение уравнений Фредгольма 2-го рода в случае неоднозначной разрешимости	195
5	Краевые задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца	200
5.1	Случай области с замкнутой границей	200
5.1.1	Постановка основных краевых задач.	200
5.1.2	Сведение краевых задач к уравнениям Фредгольма 2-го рода.	202
5.1.3	Анализ разрешимости краевых задач для уравнения Лапласа и соответствующих интегральных уравнений.	205
5.2	О численном решении краевых задач	212
5.3	Задача Дирихле на экране	217
5.3.1	Постановка задачи.	217
5.3.2	Сведение задачи к интегральному уравнению и его численное решение.	218
5.4	Задача Неймана для уравнения Лапласа на разрезе . .	221
5.4.1	Постановка задачи.	221
5.4.2	Единственность решения задачи.	221
5.4.3	Сведение задачи к сингулярному интегральному уравнению.	223
5.4.4	Сведение задачи к гиперсингулярному интегральному уравнению.	225
5.5	Задача Неймана для уравнения Лапласа на экране . .	228

6	Приложения к задачам аэродинамики	234
6.1	Основные уравнения для течений идеальной жидкости	234
6.2	Плоское обтекание гладких профилей	237
6.3	Задача об обтекании профиля крыла	244
6.3.1	Постановка задачи. Условие Чаплыгина-Жуковского.	244
6.3.2	Сведение задачи к интегральному уравнению. .	246
6.3.3	Численный метод дискретных вихрей.	248
6.4	Обтекание тел в трехмерном случае	249
6.5	Задача об обтекании крыла конечного размаха	250
6.5.1	Постановка задачи.	250
6.5.2	Сведение задачи к интегральному уравнению. .	254
6.5.3	Численная схема решения задачи методом вихревых рамок.	257
6.5.4	Расчет аэродинамических сил.	259
6.6	О вихревых методах	262
7	Приложение к задачам рассеяния скалярных волн	264
7.1	Уравнение для звуковых волн	264
7.2	Плоская волна. Сферическая волна	266
7.2.1	Плоская волна.	266
7.2.2	Сферическая волна.	267
7.3	Задача рассеяния	269
7.4	Численное решение задачи рассеяния на жестких телах и экранах	271
7.5	Численное решение задачи рассеяния на мягких телах и экранах	274
8	Приложение к задачам рассеяния электромагнитных волн	276
8.1	Уравнения Максвелла. Монохроматический случай . .	276
8.2	Решения уравнений Максвелла с точечной особенностью	278
8.3	Поверхностные векторные потенциалы	281
8.4	Постановка задачи рассеяния на системе идеально проводящих тел и экранов	282
8.5	Численное решение задач рассеяния на идеально проводящих объектах	285
8.5.1	Численное решение задачи рассеяния на идеально проводящем теле.	285
8.5.2	Численное решение задачи рассеяния на системе идеально проводящих тел и экранов.	287
8.6	Рассеяние на диэлектрическом теле. Вывод объемных интегральных уравнений	290
8.6.1	Постановка задачи.	290
8.6.2	Идея преобразований.	292
8.6.3	Вспомогательные утверждения.	293

8.6.4	Выражение электрического и магнитного полей через электрические и магнитные токи для вспомогательной задачи.	296
8.6.5	Запись объемных интегральных уравнений.	300
8.7	О методе интегральных уравнений в задачах электромагнитного рассеяния	301
Литература		303
Предметный указатель		308

Учебное издание

Сету́ха Алексей Викторович

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Учебное пособие

Электронное издание сетевого распространения

Художественное оформление *Ю. Н. Симоненко*

Верстка *А. В. Сету́ха*

Макет утвержден 16.10.2023. Изд. № 12506.



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 15
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com
<http://msupress.com>. Отдел реализации:
тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com

В учебном пособии рассмотрено применение интегральных уравнений в задачах математической физики. Даны сведения, позволяющие сводить задачи для уравнений в частных производных к интегральным уравнениям. Изложены численные методы решения возникающих интегральных уравнений, показано применение интегральных уравнений при решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца, приложение метода интегральных уравнений к численному решению задач аэродинамики и рассеяния волн.



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

ISBN 978-5-19-011915-2



9 785190 119152